II. kolo kategorie Z5

Z5–II–1

Janka a Danka pojídaly během týdne ovoce. Janka jedla pouze hrušky anebo jablka, Danka jedla pouze třešně. Každý den snědla Janka nejvýše jeden kus ovoce a Danka tentýž den jedla podle následujícího rozpisu:

- Když Janka snědla hrušku, snědla Danka dvě třešně.
- Když Janka snědla jablko, snědla Danka tři třešně.
- Když Janka nesnědla žádné ovoce, snědla Danka šest třešní.

Od pondělí do neděle Danka snědla 19 třešní.

Kolik kterého ovoce mohla sníst za stejné období Janka? Najděte dvě možnosti.

(*E. Novotná*)

Možné řešení. Danka každý den jedla třešně buď po dvou, nebo po třech, nebo po šesti. Za sedm dní jich snědla celkem 19. Pomocí sedmi sčítanců 2, 3 či 6 lze číslo 19 vyjádřit (až na pořadí sčítanců) takto:

- $6 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 19$,
- $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 19$.

V prvním případě by Danka snědla jedenkrát šest, jedenkrát tři a pětkrát dvě třešně. To znamená, že Janka by jedenkrát nesnědla žádné ovoce, jedenkrát by snědla jablko a pětkrát hrušku.

Ve druhém případě by Danka snědla pětkrát tři a dvakrát dvě třešně. To znamená, že Janka by snědla pětkrát jablko a dvakrát hrušku.

Janka od pondělí do neděle snědla buď 1 jablko a 5 hrušek, nebo 5 jablek a 2 hrušky.

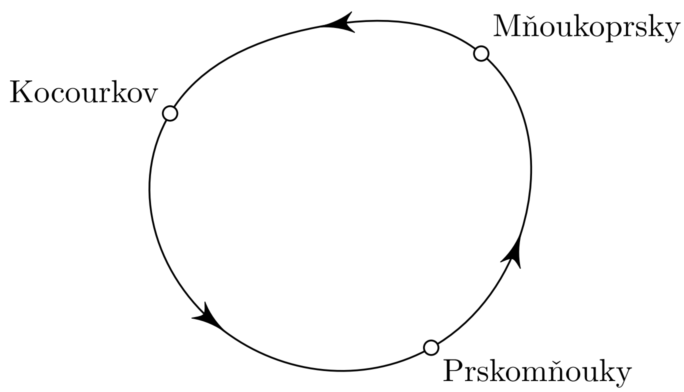
Hodnocení. 3 body za dvě vyjádření součtu 19 pomocí sčítanců 2, 3 a 6; 3 body za odpovídající závěry o konzumaci Janky.

Poznámka. Uvedené případy jsou jediné možné. Úplný rozbor možností lze provést např. tak, že se nejprve určí všechna možná vyjádření čísla 19 pomocí sčítanců 2, 3 a 6 a následně se vyberou ta s právě sedmi sčítanci.

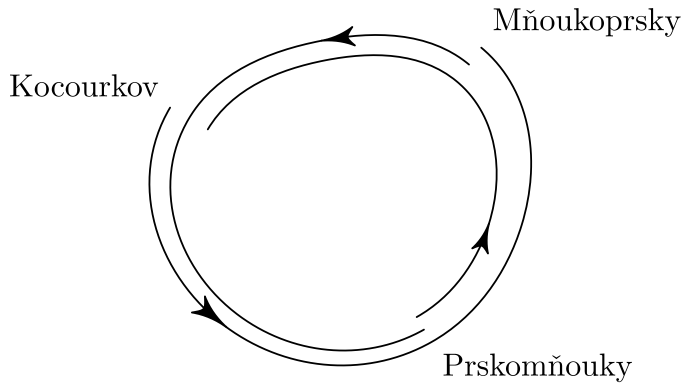
Z5–II–2

Okružní cesta spojuje tři vesnice jako na obrázku. Ve vyznačeném směru to je z Prskomňouk do Kocourkova 10 km, z Mňoukoprsk do Prskomňouk 15 km a z Kocourkova do Mňoukoprsk 16 km.

Jak dlouhá je celá okružní cesta? (*E. Semerádová*)



Možné řešení. Součet popsaných vzdáleností mezi vesnicemi odpovídá dvěma délkám okružní cesty:



Součet popsaných vzdáleností je $10 + 15 + 16 = 41$ (km).

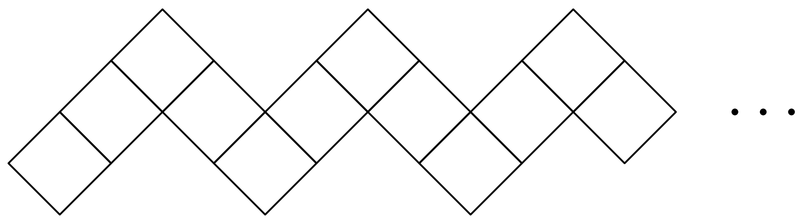
Délka okružní cesty je poloviční, tedy 20 km a 500 m.

Hodnocení. 3 body za součet vzdáleností; 3 body za výsledek.

Z5–II–3

Z 2025 stejných čtverců je složen útvar podle pravidla naznačeného na obrázku. Každé dva sousední čtverce mají společnou celou stranu, a ta měří 1 cm.

Určete obvod útvaru. (*K. Pazourek*)



Možné řešení. Krajní čtverce útvaru přispívají do obvodu třemi stranami, všechny ostatní čtverce přispívají dvěma stranami. Krajní čtverce jsou dva, ostatních je 2023. Obvod útvaru je

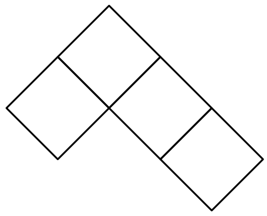
$$2 \cdot 3 + 2023 \cdot 2 = 4052 \text{ (cm)}.$$

Jiné řešení. Představme si postupné doplňování útvaru zleva doprava. Útvar sestávající z jednoho čtverce má obvod 4 cm, útvar sestávající ze dvou čtverců má obvod 6 cm, útvar sestávající ze tří čtverců má obvod 8 cm atd.

Přiložením každého čtverce se obvod útvaru zvětší o 2 cm (tři strany nového čtverce navíc, jedna společná strana méně). Obvod útvaru je

$$1 \cdot 4 + 2024 \cdot 2 = 4052\,(\mathrm{cm}).$$

Poznámka. Útvar si lze představit také tak, že k prvnímu čtverci je přiloženo 506 dílů následujícího tvaru $(1 + 506 \cdot 4 = 2025)$:



Přiložením každého takového dílu se obvod útvaru zvětší o 8 cm (devět stran nového dílu navíc, jedna společná strana méně). Vyjádření obvodu útvaru pak vypadá takto:

$$1 \cdot 4 + 506 \cdot 8 = 4052\,(\mathrm{cm}).$$

Hodnocení. 3 body za dílčí pozorování; 3 body za zobecnění a výsledek.

II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Neznámé přirozené číslo je větší než 7000 a součin jeho číslic je 252.

Najděte dvě nejmenší čísla s těmito vlastnostmi. (*I. Jančigová*)

Možné řešení. Jednomístní dělitelé čísla 252 jsou 1, 2, 3, 4, 6, 7 a 9. Pomocí těchto číslic má být vyjádřeno hledané číslo.

Nejmenší čísla větší než 7000 jsou tvaru 71∗∗, kde také číslice na místech hvězdiček jsou někteří z výše uvedených dělitelů. Přitom $252 : 7 = 36$, tedy součin těchto číslic musí být 36. Číslice na místech hvězdiček jsou buď 4 a 9, nebo 6 a 6.

Nejmenší čísla s uvedenými vlastnostmi jsou 7149 a 7166.

Hodnocení. 2 body za jednomístné dělitele čísla 252; 2 body za rozbor možností, příp. úplnost zkoušení; po 1 bodu za každé z hledaných čísel.

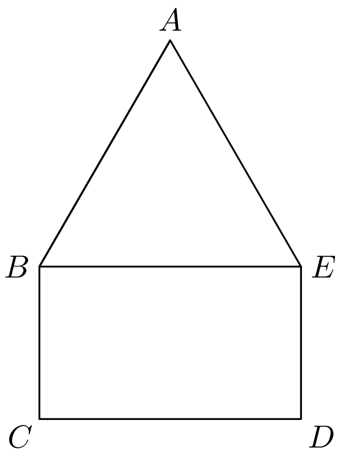
Při opomenutí dělitele 1 vychází nejmenší dvě čísla 7229 a 7236. Takové řešení hodnoťte nejvýše 3 body podle kvality komentáře.

Z6–II–2

Cestičky mezi úkryty cvrčků Adama, Broňka, Cyrila, Daniela a Erika tvoří síť jako na obrázku (kde úkryty jsou označeny prvními písmeny jmen cvrčků) a platí:

- Cestičky mezi úkryty Adama, Broňka a Erika tvoří rovnostranný trojúhelník.
- Cestičky mezi úkryty Broňka, Cyrila, Daniela a Erika tvoří obdélník s obsahem $360\,\mathrm{dm}^2$.
- Délka procházky po cestičkách od Adama k Broňkovi, Cyrilovi, Danielovi, Erikovi a Adamovi je o $24\,\mathrm{dm}$ delší než délka procházky od Adama k Broňkovi, Erikovi a Adamovi.

Jak dlouhá je cestička mezi úkryty Adama a Erika? (*E. Novotná*)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Možné řešení. Čtyřúhelník $BCDE$ je obdélník, tedy jeho protější strany jsou shodné, $|BE| = |CD|$ a $|BC| = |DE|$. Rozdíl délek dvou popsaných procházek odpovídá dvojnásobku strany BC:

$$(|AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EA|) - (|AB| + |BE| + |EA|) = |BC| + |DE| = 2|BC|.$$

To je podle zadání 24 dm, tedy $|BC| = 12$ dm.

Obsah obdélníku $BCDE$ je $|BC| \cdot |BE| = 360\,\mathrm{dm}^2$. Tedy $|BE| = 360/12 = 30$ (dm).

Trojúhelník ABE je rovnostranný, tedy $|AE| = |BE|$. Cestička mezi úkryty Adama a Erika je dlouhá 30 dm.

Hodnocení. 2 body za velikost strany BC či DE; 2 body za velikost druhé strany obdélníku; 1 bod za velikost strany AE; 1 bod za kvalitu komentáře.

Z6–II–3

Jakub přečetl knihu během tří dnů: v úterý přečetl třetinu všech stran, ve středu přečetl tři sedminy zbylých stran a posledních 32 stran přečetl ve čtvrtek.

Kolik stran měla kniha? (*E. Novotná*)

Možné řešení. V úterý Jakub přečetl $\frac{1}{3}$ všech stran. Zbývalo mu $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ všech stran.

Ve středu přečetl $\frac{3}{7}$ zbývajících stran, tj. $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7}$ všech stran. Zbývalo mu $\frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{8}{21}$ všech stran.

Ve čtvrtek přečetl všechny zbývající strany, a těch bylo 32. Kniha měla $\frac{21}{8} \cdot 32 = 84$ stran.

Jiné řešení. 32 stran, které Jakub přečetl ve čtvrtek, je počet stran, které mu zbyly ze středy. To odpovídá $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ stran, které měl ke čtení ve středu. Ve středu měl ke čtení $\frac{7}{4} \cdot 32 = 56$ stran.

56 stran, které měl Jakub ke čtení ve středu, je počet stran, které mu zbyly z úterý. To odpovídá $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ stran, které měl ke čtení v úterý. V úterý začal knihu číst, kniha měla $\frac{3}{2} \cdot 56 = 84$ stran.

Poznámka. Počet stran přečtených v úterý, resp. ve středu je vyjádřen pomocí třetin, resp. sedmin a obdobně je vyjádřen počet zbylých stran v jednotlivých dnech. Na čtvrtek připadlo 32 stran. Nejmenší číslo, které je násobkem tří a sedmi, je 21. Pro násobky 21 větší než 32 lze postupně doplňovat, kolik stran Jakub přečetl, kolik stran zbylo, a ověřit, zda na čtvrtek vychází 32 stran. Pro knihu o 42, resp. 63 stranách, na čtvrtek vychází 16, resp. 24 stran, což je málo. Pro knihu o 84 stranách, na čtvrtek vychází 32 stran:

	ke čtení	přečetl	zbylo
úterý	84	28	56
středa	56	24	32
čtvrtek	32	32	0

Hodnocení. 4 body za dílčí úpravy, mezivýsledky, příp. úplnost zkoušení (úpravy zlomků, přečtené/zbylé strany v jednotlivých dnech, zkoušení násobků 21); 2 body za výsledek. Výše uvedená tabulka bez dalšího komentáře má hodnotu 3 bodů.

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Maminka si nachystala perníčky ke zdobení. Každý perníček zdobí stejně dlouho. Kdyby při zdobení každého perníčku byla o minutu rychlejší, pak by mohla skončit o 48 minut dříve, nebo by v takto ušetřeném čase mohla ozdobit (v novém zrychleném tempu) přesně 12 dalších perníčků.

Kolik perníčků si maminka nachystala a jak dlouho jí bude trvat jejich zdobení (v obvyklém nezrychleném tempu)? (*M. Petrová*)

Možné řešení. O minutu rychlejší zdobení každého perníčku by vedlo k celkové úspoře 48 minut. Maminka si ke zdobení nachystala 48 perníčků.

Ve zrychleném tempu by za 48 minut nazdobila 12 perníčků, tedy jeden perníček za $48/12 = 4$ minuty. V obvyklém tempu jí jeden perníček zabere $4 + 1 = 5$ minut. Zdobení 48 perníčků bude mamince trvat $48 \cdot 5 = 240$ minut.

Hodnocení. 2 body za počet perníčků; 2 body za časy zdobení jednoho perníčku; 2 body za celkový čas zdobení.

Z7–II–2

V útulku je 60 zvířat, a to výhradně kočky a psi. Třetina koček a tři osminy psů nejsou ani rok staří, 39 zvířat má rok nebo více.

Kolik je v útulku koček a kolik psů? (*L. Dedková*)

Možné řešení. V útulku je 60 zvířat, počet koček je dělitelný třemi, počet psů je dělitelný osmi, dvě třetiny koček a pět osmin psů má rok nebo více. Pro násobky osmi nepřevyšující 60 vyjádříme rozdíl od 60, ověříme dělitelnost třemi a v kladném případě určíme počet zvířat starých rok nebo více:

p	8	16	24	32	40	48	56
$k = 60 - p$	52	44	36	28	20	12	4
k děl. 3	ne	ne	ano	ne	ne	ano	ne
$\frac{2}{3}k + \frac{5}{8}p$			39			38	

39 zvířat starých rok nebo více vychází pro hodnoty ve třetím sloupci tabulky. V útulku je 36 koček a 24 psů.

Poznámky. Počty koček a psů můžeme vyjádřit jako $k = 3l$ a $p = 8q$, kde l a q jsou přirozená čísla. Podmínky ze zadání lze vyjádřit pomocí rovnic:

$$3l + 8q = 60, \quad 2l + 5q = 39. \tag{$*$}$$

Podobným způsobem jako výše lze určit řešení každé rovnice. Pro $q = 1, 2, 3, \ldots$ vyjádříme rozdíl $60 - 8q$, resp. $39 - 5q$, ověříme dělitelnost třemi, resp. dvěma a v kladném případě určíme l:

$$l = \frac{60 - 8q}{3}, \quad \text{resp.} \quad l = \frac{39 - 5q}{2}. \tag{$**$}$$

Jediná dvojice vyhovující oběma podmínkám je $q = 3$ a $l = 12$. To odpovídá $p = 24$ a $k = 36$.

K témuž výsledku lze dospět řešením soustavy rovnic $(*)$. Z dvojího vyjádření $(**)$ neznámé l dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{60 - 8q}{3} &= \frac{39 - 5q}{2}, \\ 120 - 16q &= 117 - 15q, \\ 3 &= q. \end{aligned}$$

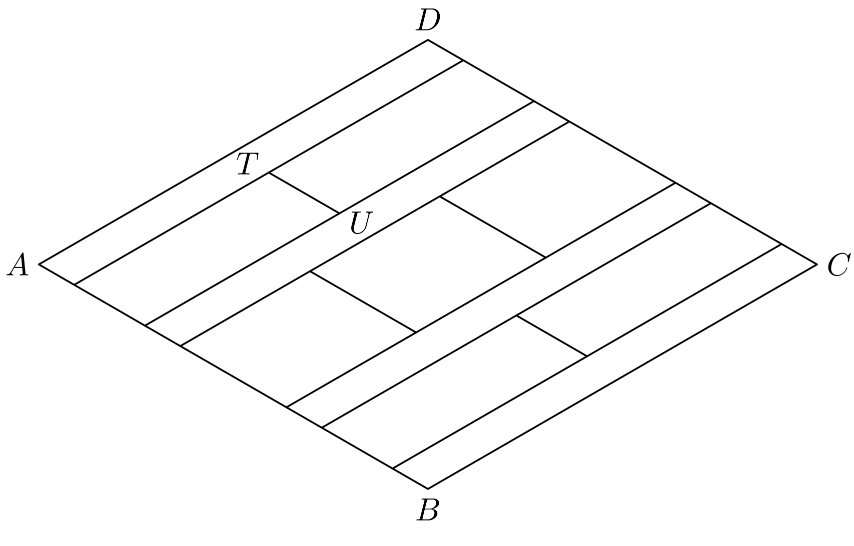
Dosazení $q = 3$ do $(**)$ dává $l = 12$.

Hodnocení. 2 body za postřehy s dělitelností třemi a osmi, příp. formulaci pomocí rovnic; 2 body za důsledné zkoušení možností, příp. řešení rovnic; 2 body za výsledek.

Z7–II–3

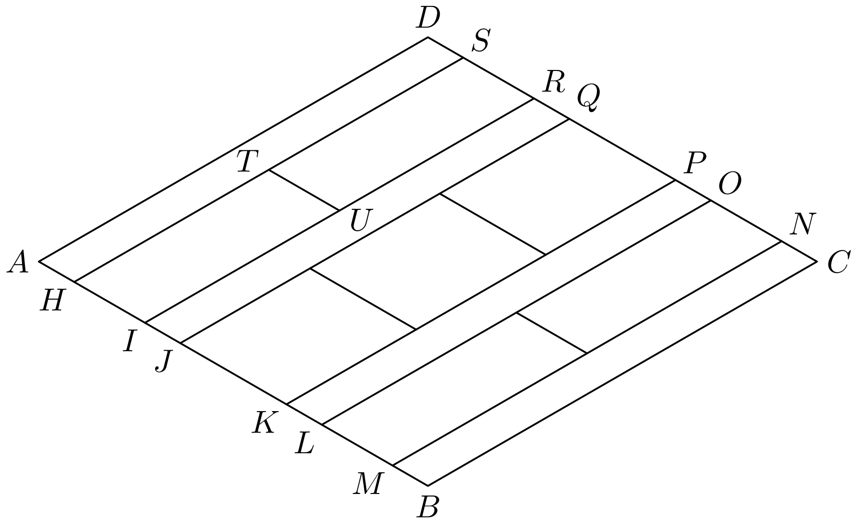
Kosočtverec $ABCD$ je složen z rovnoběžníků s navzájem stejnými obsahy. Vyznačená společná strana TU dvou rovnoběžníků měří 2 cm.

Určete obvod kosočtverce $ABCD$. (*K. Pazourek*)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Možné řešení. Všechny rovnoběžníky mají navzájem shodné vnitřní úhly. Porovnávání obsahů proto vede k porovnávání jejich stran. Kvůli snadnějšímu vyjadřování si vrcholy rovnoběžníků označíme:



Rovnoběžník $HIRS$ je rozdělen na dva rovnoploché, a proto shodné rovnoběžníky. Každý z nich má stejný obsah jako rovnoběžník $AHSD$, s nímž má rovnoběžník $HIRS$ společnou stranu. Proto je obsah $HIRS$ dvojnásobný vzhledem k obsahu $AHSD$ a platí $|HI| = |TU| = 2|AH|$ neboli

$$|AH| = \frac{1}{2}|TU| = 1\,\text{cm}.$$

Rovnoběžníky $AHSD$, $IJQR$, $KLOP$ a $MBCN$ mají stejné obsahy a shodné jedny strany. Proto jsou rovnoběžníky shodné navzájem a platí

$$|AH| = |IJ| = |KL| = |MB| = 1\,\text{cm}.$$

Rovnoběžník $JKPQ$ je rozdělen na tři rovnoploché, a proto shodné rovnoběžníky. Každý z nich má stejný obsah jako rovnoběžník $IJQR$, s nímž má rovnoběžník $JKPQ$ společnou stranu. Proto je obsah $JKPQ$ trojnásobný vzhledem k obsahu $IJQR$ a platí

$$|JK| = 3|IJ| = 3\,\text{cm}.$$

Obdobná úvaha jako v prvním odstavci pod obrázkem dává

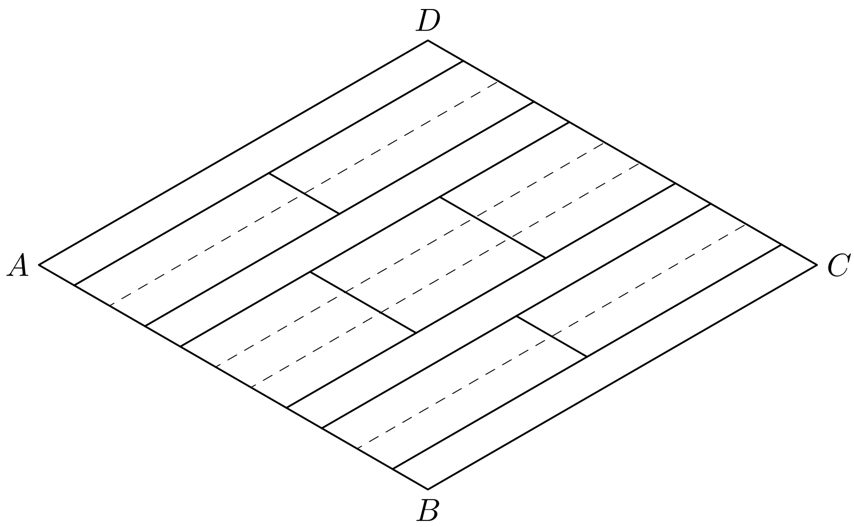
$$|LM| = |HI| = 2\,\text{cm}.$$

Délka strany kosočtverce je

$$|AB| = 4|AH| + 2|HI| + |JK| = 11\,\text{cm}.$$

Obvod kosočtverce je čtyřnásobkem délky strany, tj. 44 cm.

Poznámka. Znázornění poměrů mezi stranami dílčích rovnoběžníků může vypadat takto (nejmenší úsečky na stranách AB, resp. CD jsou navzájem shodné):



Hodnocení. Po 1 bodu za každý z mezivýsledků zobrazených odsazeně a vystředěně; 1 bod za obvod kosočtverce.

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Kouzelníkův provázek je delší než 10 m a je možné jej rozdělit v poměrech 3 : 5, 7 : 11 a 13 : 17 tak, že délky všech částí u těchto dělení jsou v celých centimetrech.

Jaká je nejmenší možná délka kouzelníkova provázku? (*V. Dedek*)

Možné řešení. Součet dílů uvedených dělení je 8, 18 a 30. Délka provázku v centimetrech je násobkem těchto čísel.

Nejmenší společný násobek čísel 8, 18 a 30 je 360. Další násobky 360 jsou 720, 1080 atd. Nejmenší možná délka provázku je 1080 cm.

Poznámka. Místo nejmenšího společného násobku daných čísel lze postupně hledat násobky 30 větší než 1000 (1020, 1050, 1080, ...) a ověřovat jejich dělitelnost 8 a 18. Nejmenší je 1080.

Hodnocení. 2 body za možnou délku provázku jako násobek čísel 8, 18 a 30; 2 body za nejmenší společný násobek těchto čísel či analogický postup; 2 body za výsledek.

Z8–II–2

Monika si vybrala dvě čísla a s nimi zkoušela robota Popletu. Nejprve mu dala sečíst první a druhé číslo, ale Popletův výsledek byl o 4,1 menší než správný. Pak mu dala sečíst trojnásobek prvního čísla a druhé číslo, ale Popletův výsledek byl o 8,4 menší než správný. Záhy zjistila, že Popleta pro dvě čísla, která dostane, nepočítá součet, ale aritmetický průměr.

Která čísla si Monika vybrala? (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Rozdíl mezi součtem dvou čísel a jejich aritmetickým průměrem je roven právě tomuto průměru. Pokud označíme první Moničino číslo a a druhé b, potom podle zadání platí

$$\frac{a+b}{2} = 4{,}1, \qquad \frac{3a+b}{2} = 8{,}4$$

neboli

$$a+b = 8{,}2, \quad 3a+b = 16{,}8.$$

Poslední dvě vyjádření se liší o dvojnásobek prvního čísla, tedy $2a = 8{,}6$. Odtud plyne $a = 4{,}3$, což po dosazení do kterékoli z předchozích rovnic dává $b = 3{,}9$. Monika si vybrala čísla 4,3 a 3,9.

Hodnocení. 2 body za vyjádření pomocí neznámých; 2 body za úpravy; 2 body za výsledek.

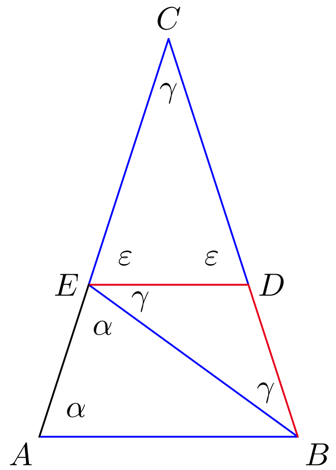
Z8–II–3

V trojúhelníku ABC leží bod D na straně BC, bod E na straně AC a platí

$$|AB| = |BE| = |EC| = |CD|, \quad |BD| = |DE|.$$

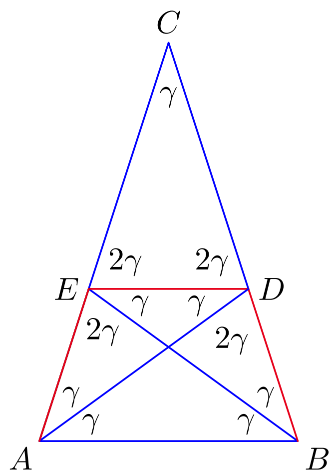
Určete velikosti úhlů ACB a BAD. (*P. Bak*)

Možné řešení. Díky shodnosti úseček je v útvaru několik rovnoramenných trojúhelníků. V každém rovnoramenném trojúhelníku jsou vnitřní úhly u základny shodné. V následujícím obrázku jsou shodné úsečky zvýrazněny stejnými barvami a shodné úhly označeny stejnými symboly:



Úhel EDC je vnějším úhlem trojúhelníku EDB, a ten je roven součtu nepřiléhajících vnitřních úhlů, tzn. $\varepsilon = 2\gamma$. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku EDC je $180°$, tzn. $2\varepsilon + \gamma = 180°$. Dohromady dostáváme $5\gamma = 180°$, tedy $\gamma = 36°$. Velikost úhlu ACB je $36°$.

Úhel CEA je přímý a jeho velikost je vyjádřena jako $\varepsilon + \gamma + \alpha$. Z předchozího víme, že $180° = 5\gamma$ a $\varepsilon = 2\gamma$, tedy $\alpha = 2\gamma$. Zejména úhly CED a CAB jsou shodné, tedy úsečky ED a AB jsou rovnoběžné. To znamená, že trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB. Ze souměrnosti tohoto trojúhelníku plyne, že také úhly BAD a ABE jsou shodné a mají velikost $\alpha - \gamma = \gamma = 36°$. Velikost úhlu BAD je $36°$.



Hodnocení. 1 bod za úvodní rozbor a rozpoznání shodných úhlů; 1 bod za velikost úhlu ACB; 2 body za zdůvodnění rovnoramennosti trojúhelníku ABC; 1 bod za velikost úhlu BAD; 1 bod za kvalitu komentáře.

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Najděte všechna dvojmístná přirozená čísla, která mají následující vlastnost: Když před číslo připíšeme součin jeho první číslice a jeho první číslice zvětšené o 1, dostaneme druhou mocninu původního čísla. (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Číslici na místě desítek označíme a, číslici na místě jednotek označíme b. Hledaná čísla jsou tvaru $10a + b$, kde $a = 1, \ldots, 9$, $b = 0, \ldots, 9$ a platí

$$100a(a + 1) + 10a + b = (10a + b)^2.$$

Po úpravách dostáváme:

$$\begin{aligned} 100a^2 + 100a + 10a + b &= 100a^2 + 20ab + b^2, \\ 110a + b &= 20ab + b^2. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Číslo v rovnosti $(*)$ je vícemístné. Aby souhlasily číslice na místě jednotek, musí být číslice na místě jednotek v b^2 stejná jako b. Této podmínce vyhovují pouze číslice 0, 1, 5 a 6. Postupně dosadíme všechny možnosti do $(*)$ a dořešíme:

- Pro $b = 0$ dostáváme
$$110a = 0.$$
Jediným řešením této rovnice je $a = 0$, což není vyhovující možnost.
- Pro $b = 1$ dostáváme
$$110a + 1 = 20a + 1.$$
Jediným řešením této rovnice je $a = 0$, což není vyhovující možnost.
- Pro $b = 5$ dostáváme
$$110a + 5 = 100a + 25.$$
Jediným řešením této rovnice je $a = 2$, což je vyhovující možnost.
- Pro $b = 6$ dostáváme
$$110a + 6 = 120a + 36.$$
Jediným řešením této rovnice je $a = -3$, což není vyhovující možnost.

Jediné číslo s vlastností ze zadání je 25.

Hodnocení. 2 body za formulaci pomocí rovnice a úpravy; 2 body za určení možností pro číslici b; 2 body za dořešení a závěr.

Bez neznámých a a b lze úlohu řešit zkoušením možností. V takovém případě hodnoťte podle úplnosti postupu a komentáře; za ověřený výsledek bez diskuze dalších možností udělte 1 bod.

Z9–II–2

Petr napsal na tabuli tři čísla od největšího po nejmenší. Prostřední číslo bylo aritmetickým průměrem zbylých dvou čísel. Součet aritmetického průměru prvního a druhého čísla a aritmetického průměru druhého a třetího čísla byl 628, rozdíl těchto dvou průměrů byl 83.

Která čísla napsal Petr na tabuli? *(K. Pazourek)*

Možné řešení. Rozdíl aritmetického průměru dvou čísel od každého z těchto čísel je (v absolutní hodnotě) stejný. Mezi čísly na tabuli jsou tedy stejné rozdíly a stejně tak, mezi těmito čísly a dalšími dvěma aritmetickými průměry.

Čísla na tabuli od největšího po nejmenší označíme a, b, c, aritmetický průměr a a b označíme p, aritmetický průměr b a c označíme q. Těchto pět čísel lze vyjádřit pomocí neznámé x takto:

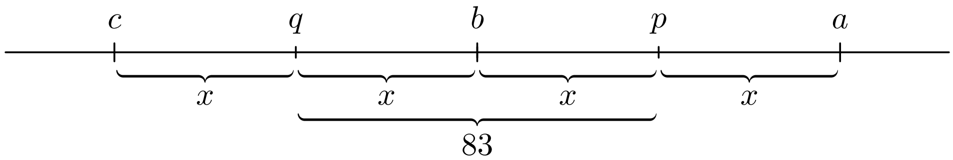
$$a = b + 2x, \quad p = b + x, \quad b, \quad q = b - x \quad c = b - 2x.$$

Z podmínky $p + q = 628$ dostáváme $2b = 628$, tedy $b = 314$. Z podmínky $p - q = 83$ dostáváme $2x = 83$. Celkem:

$$a = 314 + 83 = 397, \quad c = 314 - 83 = 231.$$

Petr napsal čísla 397, 314 a 231.

Poznámka. Znázornění předchozích myšlenek na číselné ose vypadá takto:



Jiné řešení. Čísla na tabuli od největšího po nejmenší označíme a, b, c. Prostřední je aritmetickým průměrem zbylých, tedy $b = \frac{a+c}{2}$. Aritmetický průměr prvního a druhého čísla je

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a + \frac{a+c}{2}}{2} = \frac{3a+c}{4},$$

aritmetický průměr druhého a třetího čísla je

$$\frac{b+c}{2} = \frac{\frac{a+c}{2} + c}{2} = \frac{a+3c}{4}.$$

Z informací o součtu a rozdílu těchto dvou průměrů dostáváme

$$a + c = 628, \quad a - c = 166.$$

Součet a rozdíl těchto dvou rovnic dává

$$2a = 628 + 166, \quad 2c = 628 - 166.$$

Celkem:

$$a = 314 + 83 = 397, \quad c = 314 - 83 = 231, \quad b = \frac{397 + 231}{2} = 314.$$

Petr napsal čísla 397, 314 a 231.

Hodnocení. 2 body za formulaci pomocí neznámých, příp. znázornění na číselné ose; 2 body za dílčí postřehy a úpravy; 2 body za výsledek a kvalitu komentáře.

Z9–II–3

Včera vydojili na farmě Doj dvakrát více mléka než na farmě Hoj a na farmě Joj dvakrát více mléka než na farmě Doj. Každá farma poslala část vydojeného mléka ke zpracování na máslo. Farma Doj poslala na výrobu másla 7/8 jejich mléka, farma Hoj 3/4 jejich mléka. Z mléka vydojeného na všech třech farmách dohromady šlo na výrobu másla 90 %.

Jakou část jejich mléka poslala na výrobu másla farma Joj? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Množství mléka vydojeného na farmě Hoj označíme h. Množství mléka vydojeného na farmě Doj bylo $2h$, na farmě Joj $4h$ a na všech třech farmách dohromady $7h$.

Množství mléka, které šlo na výrobu másla z farmy Doj, bylo $\frac{7}{8} \cdot 2h = \frac{7}{4}h$, z farmy Hoj to bylo $\frac{3}{4}h$ a ze všech tří farem dohromady $\frac{9}{10} \cdot 7h = \frac{63}{10}h$. Množství mléka, které šlo na výrobu másla z farmy Joj, bylo

$$\frac{63}{10}h - \frac{7}{4}h - \frac{3}{4}h = \frac{126 - 50}{20}h = \frac{76}{20}h = \frac{19}{5}h.$$

Celkem se na farmě Joj vydojilo $4h = \frac{20}{5}h$ mléka, tedy na výrobu másla poslali $\frac{19}{20} = 95\,\%$ jejich mléka.

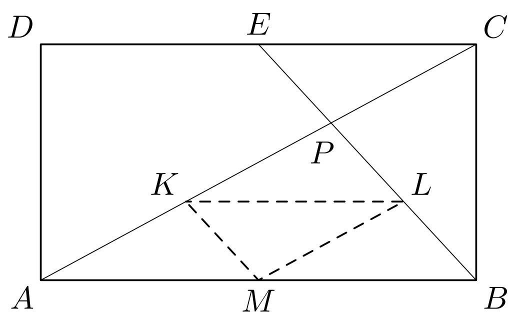
Hodnocení. 2 body za formulaci pomocí neznámých; 2 body za dílčí postřehy a úpravy; 2 body za výsledek a kvalitu komentáře.

Z9–II–4

Obdélník $ABCD$ má obsah $82\,\mathrm{cm}^2$. Bod E je středem strany CD a bod P je průsečíkem úseček AC a BE.

Určete obsah trojúhelníku ABP. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Úsečky AB a CE jsou rovnoběžné a pro jejich velikosti platí $|AB| = 2|CE|$. Proto je trojúhelník CEP shodný s příčkovými trojúhelníky trojúhelníku ABP, tzn. s trojúhelníky KLP, AMK, MBL a LKM určenými středními příčkami ABP jako na obrázku:



Zejména $|AK| = |KP| = |PC|$ neboli $|AP| = \frac{2}{3}|AC|$. Trojúhelníky ABP a ABC mají společný vrchol B a jemu protilehlé strany leží na téže přímce, tedy pro jejich obsahy platí

$$S_{ABP} = \frac{2}{3} S_{ABC}.$$

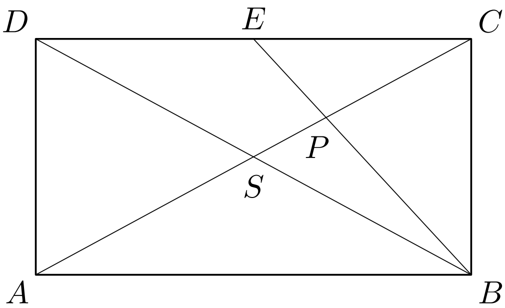
Trojúhelník ABC je polovinou obdélníku $ABCD$, tedy platí

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Celkem dostáváme

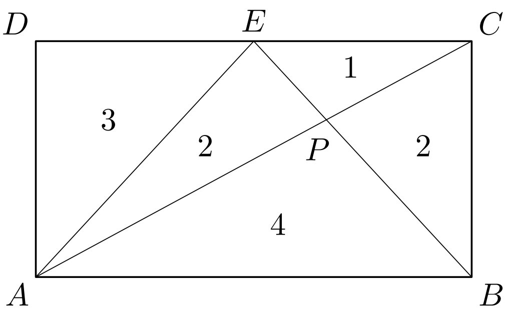
$$S_{ABP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 82 = 27{,}\overline{3}\,(\mathrm{cm}^2).$$

Jiné řešení. Úhlopříčky obdélníku $ABCD$ se protínají ve svých polovinách (tento bod označíme S) a bod E je středem úsečky CD. Proto jsou úsečky SC a BE těžnicemi trojúhelníku BCD, tedy jejich průsečík P je těžištěm.



Zejména $|AS| = |SC|$ a $|SC| = 3|SP|$, tedy $|AP| = 4|SP|$ a $|AC| = 6|SP|$. Odtud dostáváme $|AP| = \frac{2}{3}|AC|$ a dále postupujeme stejně jako v předchozím řešení.

Poznámky. Se znalostí poměru $|AP| : |AC| = 2 : 3$ či $|AP| : |PC| = 2 : 1$ lze obdélník $ABCD$ rozdělit na trojúhelníky se známými poměry obsahů (viz obrázek) a odtud vyjádřit poměr obsahu trojúhelníku ABP a obsahu obdélníku $ABCD$ jako $4 : 12 = 1 : 3$.



Poměr $|AP| : |PC| = 2 : 1$ lze odvodit z podobnosti (stejnolehlosti) trojúhelníků ABP a CEP, tzn. z faktu, že úsečky AB a CE jsou rovnoběžné a pro jejich velikosti platí $|AB| = 2|CE|$.

Hodnocení. 2 body za rozbor a dílčí postřehy; 2 body za pomocné vztahy; 2 body za výsledek a kvalitu komentáře.