



XIII. ČESKO-POLSKO-SLOVENSKÉ STŘETNUTÍ JUNIORŮ

19. KVĚTNA 2025 — SOUTĚŽ JEDNOTLIVCŮ

1. Najděte všechna prvočísla p , pro která lze číslo

$$p^3 + p^2 + p + 1$$

zapsat jako součin dvou různých prvočísel.

2. Určete všechny trojúhelníky, které lze rozřezat na shodné pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s odvěsnami délek 1.

3. V daném trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$. Body D a E jsou po řadě body stran BC a AC . Uvažujme vrcholy K , L rovnostranných trojúhelníků ADK , BEL takových, že body A a L leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou BE a body B a K leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AD . Dokažte, že $|AE| + |BD| = |KL|$.

4. Na tabuli jsou na počátku napsána tři nezáporná celá čísla. V každém kroku čísla a , b , c napsaná na tabuli nahradíme hodnotami součtů $a + b$, $b + c$, $c + a$. Určete největší možný počet kroků, po kterých se na tabuli může objevit číslo 111.

5. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$A_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{4}{n+4} + \dots + \frac{2n-1}{3n-1} > \frac{1}{3}.$$

Poznámka. Slabší odhady (např. $A_n > 0$ pro každé n) mohou být ohodnoceny částečnými body.

ČAS: 3 HODINY 30 MINUT