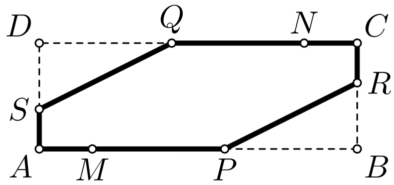
13th Czech-Polish-Slovak Junior Mathematical Competition

May 20th, 2025 — Team Competition

1. Uvažujme následující operaci s dvojmístným číslem: Nejprve vynásobíme jeho číslice, poté vypočteme druhou mocninu jeho poslední číslice a tyto dva výsledky zapíšeme za sebou v tomto pořadí (např. pro číslo 27 spočteme 14 a 49, odkud získáme 1449). Čtyřmístné číslo nazveme *okázalé*, pokud je jeho druhá odmocnina dvojmístným číslem a operací z ní vznikne původní čtyřmístné číslo. Určete všechna okázalá čísla.

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po poľsky.

2. Pro obdélníkový list papíru $ABCD$ platí $|AB| : |BC| = 3 : 1$. Na jeho stranách AB a CD leží po řadě takové body M a N, že $|AM| : |AD| = |CN| : |CB| = 1 : 2$. List přeložíme tak, že bod D splyne s bodem M. Poté jej opět přeložíme bodem B na bod N. Vznikne šestiúhelník $APRCQS$ jako na obrázku. Dokažte, že tento šestiúhelník lze 6 přímkami rozdělit na pravoúhlé trojúhelníky.



Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

3. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Na płaszczyźnie zaznaczono $2n$ punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wśród tych punktów n punktów pomalowano na czerwono, a pozostałe n pomalowano na niebiesko (każdy punkt ma dokładnie jeden kolor). Wyznacz, w zależności od n, największą dodatnią liczbę całkowitą k o następującej własności: zawsze (niezależnie od tego, które punkty wybrano i jak je pomalowano) można narysować k-kąt o czerwonych wierzchołkach oraz k-kąt o niebieskich wierzchołkach w taki sposób, aby nie miały one żadnych punktów wspólnych.

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenštině.

4. Wykaż, że pośród każdych 21 parami różnych liczb rzeczywistych można wskazać dwie różne liczby x, y o tej własności, że

$$20|x-y| < (x+1)(y+1).$$

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po česky.

5. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných reálnych čísel taká, že pre všetky kladné celé čísla n platí

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}.$$

Nájdite najväčšie celé číslo N také, že presne N členov postupnosti je celočíselných pre nejaké reálne a_1.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

6. Nech $n \geq 1$ je celé číslo. Postupnosť n šípok, z ktorých každá z nich ukazuje doľava ($\leftarrow$) alebo doprava ($\rightarrow$) sa volá *zaujímavá*, ak žiadne dve šípky neukazujú na ten istý počet šípok. Určte počet všetkých zaujímavých postupností n šípok.

Príklad: Pre $n = 5$ v postupnosti $\rightarrow\leftarrow\leftarrow\rightarrow\rightarrow$ sú počty šípok na ktoré ukazujú jednotlivé šípky postupne $4, 1, 2, 1, 0$. Preto táto postupnosť nie je zaujímavá (keďže počet 1 sa objavil dvakrát).

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte v polštině.

Time: 5 hours