

Česko-Rakousko-Polsko-Slovenské střetnutí 2025

ISTA, Rakousko

(První den – 17. června, 2025)

1. Necht a, b, c, d jsou nezáporná reálná čísla taková, že $a^2 + b^2 = ac + bd$ a přitom c, d nejsou obě nula. Najděte maximum a minimum výrazu

$$\frac{ad + bc - cd}{c^2 + d^2}.$$

2. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných celých čísel taková, že pro každé kladné celé číslo n platí

$$a_{n+1} = (n+1)(a_n - n + 1).$$

V závislosti na a_1 určete největší celé číslo k , pro které existuje $i \geq 2$ takové, že $\gcd(a_i, a_{i+1}) = k$. (Poznamejme, že $\gcd(x, y)$ značí největší společný dělitel kladných celých čísel x a y .)

3. Na tabuli je na začátku napsán mnohočlen $XY - 1$. Merlin a Artuš hrají hru, přičemž se střídají v tazích a Artuš začíná. V každém tahu hráč nahradí mnohočlen $P(X, Y)$ na tabuli jedním z následujících:

(a) $X \cdot P(X, Y)$,

(b) $Y \cdot P(X, Y)$,

(c) $P(X, Y) + a$, kde $a \in (-\infty, 2025]$ je libovolné celé číslo.

Hra končí po té, co každý z hráčů provede přesně 2025 tahů. Necht $Q(X, Y)$ je mnohočlen na tabuli po skončení hry. Merlin vyhraje, pokud rovnice $Q(x, y) = 0$ má konečný a lichý počet řešení (x, y) v kladných celých číslech. Dokažte, že Merlin může vyhrát vždy bez ohledu na to, jak hraje Artuš.

Čas: 4 hodiny a 30 minut.

Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

Language: Czech

Česko-Rakousko-Polsko-Slovenské střetnutí 2025

ISTA, Rakousko

(Druhý den – 18. června, 2025)

4. Rovina byla svislými a vodorovnými přímkami rozdělena na čtvercová políčka 1×1 . Rozhodněte, zda je možné vepsat celá čísla do těchto políček tak, aby

- (i) každé políčko obsahovalo právě jedno celé číslo,
- (ii) každé celé číslo bylo v právě jednom políčku,
- (iii) pro každé dvě políčka A , B sdílející právě jeden vrchol a obsahující čísla a , b platilo, že některé z políček sdílejících hranu s A i B obsahuje celé číslo s hodnotou mezi a a b .

5. Necht ABC je ostroúhlý trojúhelník. Bod D leží ve stejné polorovině určené přímkou AB jako bod C a splňuje $DB \perp AB$ a $|\angle ADB| = 45^\circ + \frac{1}{2}|\angle ACB|$. Bod E leží ve stejné polorovině určené přímkou AC jako bod B a splňuje $AC \perp EC$ a $|\angle AEC| = 45^\circ + \frac{1}{2}|\angle ABC|$. Označme F bod středově souměrný s bodem A podle středu oblouku BAC . Dokažte, že body A , D , E , F leží na jedné kružnici.

6. Najděte všechny funkce $f: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ takové, že pro všechna $x, y \in (0, \infty)$ platí

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(x + y).$$

Čas: 4 hodiny a 30 minut.

Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

Language: Czech