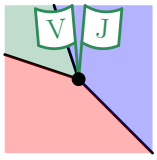
75. ročník Matematické olympiády (2025/2026)

Zadání úloh domácího kola

Kategorie A



1. Ostrov je rozdělený na několik království. Území každého království je konvexní mnohoúhelník, který má právě jeden nejsevernější, nejjižnější, nejvýchodnější a nejzápadnější bod. Každý král dostal 4 vlajky s písmeny S, J, V, Z, které umístil do těchto významných bodů svého království. (Například u trojmezí tří států na obrázku jsou takto zapíchnuté 2 vlajky.) Uprostřed ostrova je krtinec, kde se stýká 7 království. Určete všechny možné počty vlajek zapíchnutých do krtince. (*Josef Tkadlec*)

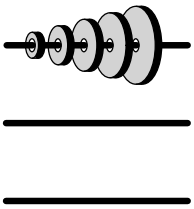
2. Nechť p, q jsou reálná čísla taková, že rovnici

$$|x^2 - 1| = px + q$$

s neznámou x vyhovují právě 4 navzájem různá reálná čísla.

a) Určete všechny možné hodnoty součtu těchto 4 čísel.

b) Dokažte, že součin těchto 4 čísel leží v intervalu $(-3, 1)$. (*Patrik Bak*)



3. Jozef má hlavolam, který se skládá ze tří vodorovných tyčí a z $n \geqq 2$ různě velkých kotoučů seřazených na první tyči podle velikosti, viz obrázek. V jednom tahu Jozef vysune z libovolné tyče krajní kotouč (zleva nebo zprava) a nasune jej na jinou tyč ze stejné strany. Hlavolam je vyřešený, pokud se všechny kotouče nachází na druhé tyči seřazené stejně jako na začátku. V závislosti na n určete nejmenší možný počet tahů, který je potřeba na vyřešení hlavolamu. (*Jozef Rajník*)

4. Jsou dána nesoudělná přirozená čísla a a b taková, že i čísla $a^3 - 1$ a $b^3 - 1$ jsou nesoudělná. Dokažte, že čísla $a^2 - b$ a $b^2 - a$ jsou rovněž nesoudělná. (*Patrik Bak*)

5. Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC je dán bod R. Na stranách AB a BC leží po řadě body P a Q tak, že obvod trojúhelníku PQR je nejmenší možný. Podobně na stranách BC a AC leží po řadě body S a T tak, že obvod trojúhelníku RST je nejmenší možný. Přímky PQ a ST se protínají v bodě K. Dokažte, že pokud platí $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAR|$, pak trojúhelníky PQR a RST mají stejný obvod. (*Michal Pecho*)

6. Na tabuli jsou napsána 4 přirozená čísla. Žirafa vykonává následující kroky: pokaždé si vybere jedno z čísel na tabuli, smaže ho a místo něj napíše jeho druhou mocninu. Může vždy žirafa po konečně mnoha krocích dosáhnout toho, aby rozdíl některých dvou čísel na tabuli byl násobkem 97? (*Josef Tkadlec*)

Kategorie B

1. Každé hraně čtyřstěnu přiřadíme jedno reálné číslo tak, aby každá stěna měla stejný součet čísel svých tří hran. Kolik nejvýše z šesti čísel přiřazených hranám může být navzájem různých? (*Mária Dományová*)

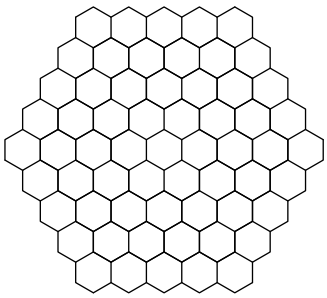
2. Zápis přirozeného čísla v desítkové soustavě končí dvojčíslím 90. Dokažte, že součin všech jeho kladných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla. (*Ján Mazák*)

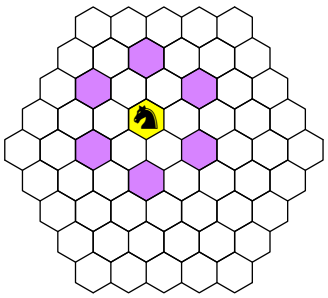
3. Na tabuli je nakreslena kružnice (bez středu) a na ní tři různé body A, B, C. Máme k dispozici křídu a trojúhelník s ryskou bez měřítka. Ten nám umožňuje jen vést přímku libovolnými dvěma body a k dané přímce p vést kolmici daným bodem (ne nutně ležícím na p). Popište a zdůvodněte konstrukci středu kružnice vepsané trojúhelníku ABC. (*Ema Čudaiová*)

4. Reálná čísla x, y splňují nerovnosti $xy \geqq x + y > 0$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat součet $x + y$? (*Patrik Bak*)

5. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC|$ a $|\sphericalangle BCD| = 3|\sphericalangle BAD|$. Body P a Q leží po řadě na úsečkách AB a AD tak, že $APCQ$ je rovnoběžník. Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku CPQ. Dokažte, že $AO \perp BD$. (*Patrik Bak*)

6. Hrací plán na obrázku vlevo se skládá z 61 pravidelných šestiúhelníků se stranou délky 1.* Na každém jeho políčku může stát nejvýše jeden jezdec. Dva jezdci se ohrožují právě tehdy, když stojí na políčkách se středy vzdálenými přesně 3 (políčka ohrožená jezdcem jsou na obrázku vpravo vybarvená). Kolik nejvýše jezdců můžeme umístit na tento plán tak, aby se žádní dva neohrožovali?





(*Jozef Rajník*)

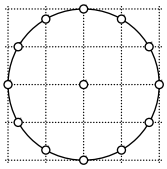
* Hrací plány najdete na https://www.matematickaolympiada.cz/media/3855053/hrplany_b6.pdf

Kategorie C

1. Přirozené číslo zapsané navzájem různými číslicemi nazveme *pitoreskní*, když každá jeho vnitřní číslice dělí dvojmístné číslo tvořené zleva doprava jejími sousedy. Například 1324 je pitoreskní, protože 3 dělí 12 a 2 dělí 34. Rozhodněte, zda existuje pitoreskní číslo tvořené všemi číslicemi a) 1 až 8, b) 1 až 9. (*Patrik Bak*)

2. Uvažujme přirozená čísla a, b, c taková, že čísla a, b, c, $a+b$, $b+c$, $c+a$ jsou navzájem různá a součet tří největších z nich je 75. Určete největší možnou hodnotu součtu $a+b+c$. (*Patrik Bak*)

3. V síti tvořené čtverci o straně 1 je dána kružnice se středem v mřížovém bodě a s poloměrem 2. Tato kružnice protíná přímky sítě dohromady ve 12 bodech. Dokažte, že těchto 12 průsečíků tvoří vrcholy pravidelného 12úhelníku. (*Josef Tkadlec*)

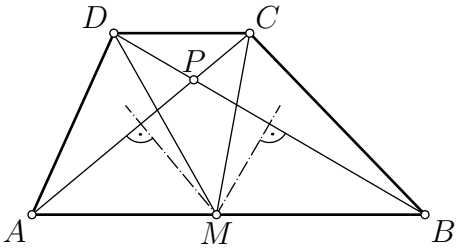


4. Najděte všechna čtyřmístná čísla $n = \overline{abcd}$, pro která platí

$$\overline{ab} + \overline{cd} = \sqrt{n}, \qquad \overline{cd} - \overline{ab} = 5.$$

(*Mária Dományová*)

5. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě P a jejich osy se protínají v bodě M. Předpokládejme, že M leží na základně AB. Dokažte, že P je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDM. (*Jaroslav Švrček*)



6. Na pekáči je 21 buchet, 10 z nich je plněných povidly, zbylých 11 tvarohem. Můžeme položit 10 otázek. V každé otázce ukážeme na dvě buchty a kuchař nám řekne, jestli mají stejnou náplň, nebo každá jinou. Je možné ptát se tak, abychom o alespoň jedné buchtě s jistotou zjistili, čím je plněná? (*Josef Tkadlec, Felix Schröder*)