



Příklad I–1

Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu kladných reálných čísel. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takovou, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Dokažte, že existuje kladné celé číslo n_0 takové, že pro všechna kladná celá čísla $n \geq n_0$ a pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f^n(x) \geq x.$$

Poznámka. Výraz f^n zde značí funkci f aplikovanou n -krát, tedy $f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n\text{-krát}}$.

Příklad I–2

Předpokládejme, že máme nekonečnou čtvercovou tabulku, v níž jsou některá políčka obarvena červeně. Potom je *rubínová věž* figurka, která se v jednom tahu může pohnout o libovolný počet políček v jednom ze směrů rovnoběžných se stranami políček tabulky (buď svisle, nebo vodorovně), přičemž musí po celý tah zůstat na červených políčkách.

Andulka začíná s neobarvenou nekonečnou čtvercovou tabulkou. Poté provede následující: Nejprve obarví nanejvýš 2025 políček červeně. Potom umístí několik rubínových věží na po dvou různá červená políčka tak, aby byla splněna následující dvě pravidla:

- Žádná rubínová věž se nemůže dostat jedním tahem na políčko, kde stojí jiná rubínová věž.
- Každá rubínová věž se může dvěma tahy dostat na libovolné políčko, kde stojí jiná rubínová věž.

Najděte největší možný počet rubínových věží, který může Andulka tímto způsobem umístit.

Příklad I–3

Buď ABC trojúhelník. Jeho kružnice vepsaná ω se dotýká stran BC , CA a AB postupně v bodech D , E a F . Nechť P a Q jsou body na přímce BC různé od D takové, že $|PB| = |BD|$ a $|QC| = |CD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům PCE a QBF a kružnice ω prochází společným bodem.

Příklad I–4

Nechť $\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel. Množinu $S \subseteq \mathbb{Z}$ nazveme *saskou*, je-li $ab + c$ pro libovolná tři po dvou různá $a, b, c \in S$ čtvercem celého čísla. Dokažte, že každá saská množina je konečná. Dále určete největší možný počet prvků saské množiny.