

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii C

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástinu řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Přirozené číslo zapsané navzájem různými číslicemi nazveme pitoreskní, když každá jeho vnitřní číslice dělí dvojmístné číslo tvořené zleva doprava jejími sousedy. Například 1324 je pitoreskní, protože 3 dělí 12 a 2 dělí 34. Rozhodněte, zda existuje pitoreskní číslo tvořené všemi číslicemi a) 1 až 8, b) 1 až 9.* (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

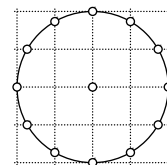
- N1. Rozhodněte, co je pravda: a) Každý dělitel sudého čísla je sudý. b) Každý dělitel lichého čísla je lichý. c) Sudé číslo dělí pouze sudá čísla. d) Liché číslo dělí pouze lichá čísla.
- N2. Najděte všechna čtyřmístná pitoreskní čísla složená z číslic 5, 6, 7, 8.
- N3. Zapište všechny číslice 1 až 9 do devítimístného čísla tak, aby každá dvojice po sobě jdoucích číslic (zleva doprava) tvořila násobek sedmi nebo třinácti.
- D1. Rozestavte po obvodu kruhu co nejvíce různých číslic tak, aby každá sousední dvojice tvořila ve vhodném pořadí násobek sedmi.
2. *Uvažujme přirozená čísla a, b, c taková, že čísla $a, b, c, a + b, b + c, c + a$ jsou navzájem různá a součet tří největších z nich je 75. Určete největší možnou hodnotu součtu $a + b + c$.* (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Číslo x je jednomístné, číslo y dvojmístné a číslo z trojmístné. Uspořádejte podle velikosti čísla a) $y + z + z, z + x + x, x + z + z$, b) $2x + y, 2y + z, 2z + y, 2y + x$.
- N2. Pro přirozená čísla x, y platí, že hodnota výrazu $3x + 5y$ je menší než 2025 a hodnota $5x + 3y$ je menší než 2026. Jaká je největší možná hodnota součtu $x + y$?
- D1. Kolik různých výsledků můžeme dostat, sečteme-li každá dvě z daných pěti různých přirozených čísel? Pro každý možný počet uveďte příklad takové pěti čísel.
- D2. Na tabuli je napsáno pět navzájem různých kladných čísel. Určete, kolika nejvýše způsoby se z nich dá sestavit dvojice, jejíž součet se rovná některému z pěti čísel napsaných na tabuli.

3. V síti tvořené čtverci o straně 1 je dána kružnice se středem v mřížovém bodě a s poloměrem 2. Tato kružnice protíná přímky sítě dohromady ve 12 bodech. Dokažte, že těchto 12 průsečíků tvoří vrcholy pravidelného 12úhelníku.

(Josef Tkadlec)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Z vrcholu K rovnoramenného trojúhelníku se základnou LM vychází dvě polopřímky, které protnou základnu v bodech X a Y . Přitom $|\sphericalangle LKM| = 75^\circ$, $|\sphericalangle LKX| = 20^\circ$, $|\sphericalangle MKY| = 20^\circ$. Pomocí vhodné věty o shodnosti trojúhelníků zdůvodněte, že $|LX| = |MY|$.
- N2. Najděte pravoúhlý trojúhelník, v němž je poměr velikostí dvou vnitřních úhlů i poměr délek dvou stran roven $1 : 2$.
- N3. Vzdálenost bodu T od středu S kružnice k se rovná průměru kružnice. Bodem T vedeme tečny TA , TB , které se kružnice dotýkají v bodech A , B . Určete vnitřní úhly trojúhelníků TSB a ASB .
- D1. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu AB v jejím středu S . Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCS je shodná s kružnicí k .
- D2. V rovině je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| = a < b = |BC|$. Na jeho straně BC existuje bod K a na straně CD bod L tak, že daný obdélník je úsečkami AK , KL a LA rozdělen na čtyři navzájem podobné trojúhelníky. Určete hodnotu poměru $a : b$.

4. Najděte všechna čtyřmístná čísla $n = \overline{abcd}$, pro která platí

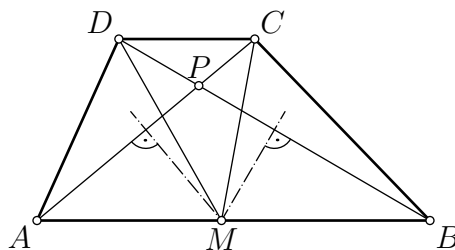
$$\overline{ab} + \overline{cd} = \sqrt{n}, \quad \overline{cd} - \overline{ab} = 5.$$

(Mária Dományová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Určete dvě čísla, jejichž součet je roven 20 a rozdíl je roven 25.
- N2. Zápis trojmístného čísla začíná číslicí 4. Když ji smažeme a napíšeme na konec, dostaneme trojmístné číslo rovné třem čtvrtinám původního čísla. Určete původní číslo.
- N3. Najděte všechny trojice (ne nutně různých) číslic a , b , c , pro něž pětímístná čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ jsou v poměru $63 : 36$.
- D1. Najděte všechna přirozená čísla s vlastností: Když toto číslo vynásobíme číslem o 1 větším a k výsledku přepíšeme zprava 25, dostaneme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla.
- D2. Existují dvoumístná čísla $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ taková, že $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$?
- D3. Ze tří různých nenulových číslic jsme sestavili všech šest možných trojiciferných čísel. Tato čísla jsme seřadili od největšího po nejmenší. Zjistili jsme, že čtvrté číslo v této řadě je aritmetickým průměrem prvního a pátého čísla. Ze kterých číslic byla čísla sestavena?
- D4. Najděte největší pětímístné přirozené číslo, které je dělitelné číslem 101 a které se čte zepředu stejně jako zezadu.

5. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě P a jejich osy se protínají v bodě M . Předpokládejme, že M leží na základně AB . Dokažte, že P je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDM .
(Jaroslav Švrček)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Pro každý bod na ose úsečky platí, že je od obou krajních bodů úsečky stejně vzdálen. Vyřešte pomocí tohoto poznatku úlohu: Mějme trojúhelník ABC s pravoúhlým úhlem při vrcholu C , přičemž $|\angle ABC| = 25^\circ$. Osa strany AB protíná odvěsnu BC v bodě K . Určete velikost úhlu KAC .
- N2. V trojúhelníku ABC narýsujeme osu vnitřního úhlu u vrcholu A a její průsečík se stranou BC označíme D . Na straně AB najdeme takový bod M , že $MD \parallel AC$. Dokažte, že pak úsečky AM a DM mají stejnou délku.
- N3. V rovnoramenném trojúhelníku ABC je $|AB| = |AC|$ a na rameni AB je bod D takový, že $|AD| = |DC| = |CB|$. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC .
- N4. V lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, se osy vnitřních úhlů při vrcholech C a D protínají na úsečce AB . Dokažte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$.
- D1. V rovnoběžníku $ABCD$ platí, že osa úhlu ABC prochází středem L strany CD . Dokažte, že $AL \perp BL$.
- D2. Uvažujme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se shodnými úhly při vrcholech A a B . Necht se osy jeho stran BC a AD protínají v bodě M , který leží na straně AB . Dokažte, že $|AC| = |BD|$.
- D3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB a D, E středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům APC, CPB . Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC je průsečíkem výšek trojúhelníku CDE .
6. Na pekáči je 21 buchty, 10 z nich je plněných povidly, zbylých 11 tvarohem. Můžeme položit 10 otázek. V každé otázce ukážeme na dvě buchty a kuchař nám řekne, jestli mají stejnou náplň, nebo každá jinou. Je možné ptát se tak, abychom o alespoň jedné buchtě s jistotou zjistili, čím je plněná?
(Josef Tkadlec, Felix Schröder)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Ze 4 buchty na talíři je 1 tvarohová, zbylé 3 jsou povidlové. Na kolik nejméně otázek zjistíme od našeho kuchaře, která je tvarohová?
- N2. Naš kuchař připravil tvarohové a povidlové buchty, 4 jednoho typu, 7 druhého typu. Položili jsme mu 5 otázek na 10 různých buchty a pokaždé zazněla táž odpověď. Jedenáctou buchtu jsme se rozhodli sníst a byla povidlová. Kterých buchty bylo více?
- D1. Mach hraje následující hru. Na začátku je na stole k hromádek, na nichž je postupně $1, 2, 3, \dots, k$ žetonů. V každém tahu vybere libovolné dvě hromádky

a odstraní z obou stejný počet žetonů. Jeho cílem je, aby na stole zůstal jediný žeton. Může se mu to podařit a) pro $k = 10$, b) pro $k = 11$?

D2. Na tabuli byla napsána čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. V každém kroku jsme dvě čísla smazali a nahradili druhou mocninou jejich rozdílu. Pokud po nejvýše 7 krocích zůstala na tabuli všechna čísla stejná, mohla to být čísla a) lichá, b) sudá?

D3. V jednom poli šachovnice 8×8 je napsáno „+“ a v ostatních polích „−“. V jednom kroku můžeme změnit na opačná zároveň všechna čtyři znaménka v kterémkoli čtverci 2×2 na šachovnici. Rozhodněte, zda po určitém počtu kroků může být na šachovnici obou znamének stejný počet.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Přirozené číslo zapsané navzájem různými číslicemi nazveme pitoreskní, když každá jeho vnitřní číslice dělí dvojmístné číslo tvořené zleva doprava jejími sousedy. Například 1324 je pitoreskní, protože 3 dělí 12 a 2 dělí 34. Rozhodněte, zda existuje pitoreskní číslo tvořené všemi číslicemi a) 1 až 8, b) 1 až 9.* (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Rozhodněte, co je pravda: a) Každý dělitel sudého čísla je sudý. b) Každý dělitel lichého čísla je lichý. c) Sudé číslo dělí pouze sudá čísla. d) Liché číslo dělí pouze lichá čísla. [a) Ne, 6 má dělitele 3. b) Ano. c) Ano. d) Ne, 3 dělí 6.]
- N2. Najděte všechna čtyřmístná pitoreskní čísla složená z číslic 5, 6, 7, 8. [Je to jen 5768.]
- N3. Zapište všechny číslice 1 až 9 do devítimístného čísla tak, aby každá dvojice po sobě jdoucích číslic (zleva doprava) tvořila násobek sedmi nebo třinácti. [Pokud si vypíšeme dvojmístné násobky sedmi a třinácti, zjistíme, že zápis žádného z nich kromě 77 nekončí sedmičkou. Proto musí hledané číslo sedmičkou začínat a jediné přípustné pokračování je 784. Další číslice lze přidávat více způsoby, jedno z řešení je např. 784913526.]
- D1. Rozestavte po obvodu kruhu co nejvíce různých číslic tak, aby každá sousední dvojice tvořila ve vhodném pořadí násobek sedmi. [Umíme rozestavit pět číslic např. v pořadí 1, 2, 4, 8, 9. Více než pět číslic rozestavit nelze. Vypsáním násobků sedmi se přesvědčíme, že každé dvě sousední číslice musí náležet do stejné množiny z těchto tří: $\{9, 1, 4, 2, 8\}$, $\{3, 5, 6\}$, $\{7, 0\}$.]
2. *Uvažujme přirozená čísla a, b, c taková, že čísla $a, b, c, a + b, b + c, c + a$ jsou navzájem různá a součet tří největších z nich je 75. Určete největší možnou hodnotu součtu $a + b + c$.* (Patrik Bak)

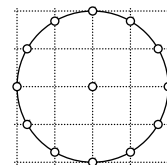
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Číslo x je jednomístné, číslo y dvojmístné a číslo z trojmístné. Uspořádejte podle velikosti čísla a) $y + z + z, z + x + x, x + z + z$, b) $2x + y, 2y + z, 2z + y, 2y + x$. [a) Pokud jsou dva sčítance u dvou součtů shodné, o pořadí rozhoduje třetí sčítanec. Protože $x < y < z$, platí i $z + x + x < x + z + z < y + z + z$. b) Výrazy si lze například opět zapsat jako součet tří sčítanců a dále postupovat jako v části a). Vyjde $2x + y < 2y + x < 2y + z < 2z + y$.]
- N2. Pro přirozená čísla x, y platí, že hodnota výrazu $3x + 5y$ je menší než 2025 a hodnota $5x + 3y$ je menší než 2026. Jaká je největší možná hodnota součtu $x + y$? [Všimneme si, že součet daných dvou výrazů je násobkem $x + y$, tj. $(3x + 5y) + (5x + 3y) = 8(x + y)$. Víme, že jde o celá čísla, takže $3x + 5y \leq 2024$ a $5x + 3y \leq 2025$, následně platí $8(x + y) \leq 2024 + 2025 = 4049$ a $x + y \leq 506\frac{1}{8}$, tedy $x + y \leq 506$. Je 506 největší možná hodnota součtu? Ano, např. pro $x = y = 253$ obě podmínky ze zadání platí.]
- D1. Kolik různých výsledků můžeme dostat, sečteme-li každá dvě z daných pěti různých přirozených čísel? Pro každý možný počet uveďte příklad takové pětice čísel. [B-52-S-3]

D2. Na tabuli je napsáno pět navzájem různých kladných čísel. Určete, kolika nejvýše způsoby se z nich dá sestavit dvojice, jejíž součet se rovná některému z pěti čísel napsaných na tabuli. [B-66-S-1]

3. V síti tvořené čtverci o straně 1 je dána kružnice se středem v mřížovém bodě a s poloměrem 2. Tato kružnice protíná přímky sítě dohromady ve 12 bodech. Dokažte, že těchto 12 průsečíků tvoří vrcholy pravidelného 12úhelníku.

(Josef Tkadlec)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Z vrcholu K rovnoramenného trojúhelníku se základnou LM vychází dvě polpřímky, které protnou základnu v bodech X a Y . Přitom $|\sphericalangle LKM| = 75^\circ$, $|\sphericalangle LKX| = 20^\circ$, $|\sphericalangle MKY| = 20^\circ$. Pomocí vhodné věty o shodnosti trojúhelníků zdůvodněte, že $|LX| = |MY|$. [Rovnoramenný trojúhelník má vnitřní úhly při základně shodné, a tak pro trojúhelníky KLX a KMY je $|\sphericalangle K LX| = |\sphericalangle K MY|$, dále $|KL| = |KM|$ a dle zadání $|\sphericalangle L K X| = |\sphericalangle M K Y|$. Jsou tedy shodné podle věty *usu*, a proto $|LX| = |MY|$.]
- N2. Najděte pravoúhlý trojúhelník, v němž je poměr velikostí dvou vnitřních úhlů i poměr délek dvou stran roven $1 : 2$. [Trojúhelník s úhly 90° , 45° , 45° nemá strany ve správném poměru. Případá v úvahu už jen trojúhelník s úhly 90° , 60° , 30° . Označme jeho přeponu AB a prodlužme jeho kratší odvěsnu BC do bodu D tak, že C je středem BD . Trojúhelníky ABC a ADC jsou shodné podle věty *sus*, trojúhelník ABD je rovnostranný, a tak je $2|BC| = |BD| = |AB|$. Hledaný trojúhelník je „polovinou rovnostranného trojúhelníku“.]
- N3. Vzdálenost bodu T od středu S kružnice k se rovná průměru kružnice. Bodem T vedeme tečny TA , TB , které se kružnice dotýkají v bodech A , B . Určete vnitřní úhly trojúhelníků TSB a ASB . [Pravoúhlý trojúhelník TSB má poměr stran $|BS| : |TS| = 1 : 2$. Podobně jako v řešení předešlé úlohy jej můžeme doplnit na rovnostranný trojúhelník TSC , kde B je středem SC . Pak $|\sphericalangle TSB| = 60^\circ$ a $|\sphericalangle BTS| = 30^\circ$ a rovnoramenný trojúhelník ASB má vnitřní úhly 120° , 30° , 30° .]
- D1. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu AB v jejím středu S . Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCS je shodná s kružnicí k . [C-51-S-2]
- D2. V rovině je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| = a < b = |BC|$. Na jeho straně BC existuje bod K a na straně CD bod L tak, že daný obdélník je úsečkami AK , KL a LA rozdělen na čtyři navzájem podobné trojúhelníky. Určete hodnotu poměru $a : b$. [C-53-II-1]

4. Najděte všechna čtyřmístná čísla $n = \overline{abcd}$, pro která platí

$$\overline{ab} + \overline{cd} = \sqrt{n}, \quad \overline{cd} - \overline{ab} = 5.$$

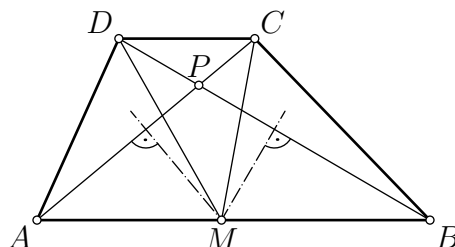
(Mária Dományová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Určete dvě čísla, jejichž součet je roven 20 a rozdíl je roven 25. [Hledáme čísla x a y . Podmínky ze zadání zapíšeme jako rovnice $x + y = 20$, $x - y = 25$. Stačí vyjádřit x pomocí y , např. $x = y + 25$ a dosadit do zbývajících rovnic $(y + 25) + y = 20$, což dá $2y = -5$, tj. $y = -2,5$. Dopočteme $x = 22,5$.]
- N2. Zápis trojmístného čísla začíná číslicí 4. Když ji smažeme a napíšeme na konec, dostaneme trojmístné číslo rovné třem čtvrtinám původního čísla. Určete původní číslo. [Hodnotu zbývajících dvojčíslí označíme x . Původní číslo lze vyjádřit jako $400 + x$, po přemístění čtyřky je to $10x + 4$. Rovnice $10x + 4 = \frac{3}{4}(400 + x)$ má řešení $x = 32$ a původní číslo bylo 432.]
- N3. Najděte všechny trojice (ne nutně různých) číslic a, b, c , pro něž pětímístná čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ jsou v poměru 63 : 36. [C-63-II-1]
- D1. Najděte všechna přirozená čísla s vlastností: Když toto číslo vynásobíme číslem o 1 větším a k výsledku přepíšeme zprava 25, dostaneme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla. [Popsaná operace číslu k přiřadí číslo $100k(k + 1) + 25$. To je druhou mocninou přirozeného čísla vždy, neboť $100k(k + 1) + 25 = 100k^2 + 100k + 25 = (10k + 5)^2$.]
- D2. Existují dvoumístná čísla $\overline{ab}, \overline{cd}$ taková, že $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$? [Neexistují. Kdyby čísla existovala, platilo by pro ně $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} > \overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{cd} > \overline{ab} \cdot \overline{cd}$, což je spor.]
- D3. Ze tří různých nenulových číslic jsme sestavili všech šest možných trojčiferných čísel. Tato čísla jsme seřadili od největšího po nejmenší. Zjistili jsme, že čtvrté číslo v této řadě je aritmetickým průměrem prvního a pátého čísla. Ze kterých číslic byla čísla sestavena? [C-47-II-1]
- D4. Najděte největší pětímístné přirozené číslo, které je dělitelné číslem 101 a které se čte zepředu stejně jako zezadu. [B-52-S-1]

5. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě P a jejich osy se protínají v bodě M . Předpokládejme, že M leží na základně AB . Dokažte, že P je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDM .

(Jaroslav Švrček)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Pro každý bod na ose úsečky platí, že je od obou krajních bodů úsečky stejně vzdálen. Vyřešte pomocí tohoto poznatku úlohu: Mějme trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C , přičemž $|\sphericalangle ABC| = 25^\circ$. Osa strany AB protíná odvěsnu BC v bodě K . Určete velikost úhlu KAC . [Bod K leží na ose úsečky AB a platí tedy $|AK| = |BK|$. Trojúhelník AKB je pak rovnoramenný a má

shodné vnitřní úhly $|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle KBA| = 25^\circ$. Hledaný úhel je $|\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle KAB| = (90^\circ - |\sphericalangle ABC|) - 25^\circ = 40^\circ$.]

- N2. V trojúhelníku ABC narýsujeme osu vnitřního úhlu u vrcholu A a její průsečík se stranou BC označíme D . Na straně AB najdeme takový bod M , že $MD \parallel AC$. Dokažte, že pak úsečky AM a DM mají stejnou délku. [Přímka AD je osou úhlu u vrcholu A , takže $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle MAD|$. Kromě toho úhly CAD a MDA jsou střídavé, protože $MD \parallel AC$. Trojúhelník AMD je tudíž rovnoramenný a $|AM| = |DM|$.]
- N3. V rovnoramenném trojúhelníku ABC je $|AB| = |AC|$ a na rameni AB je bod D takový, že $|AD| = |DC| = |CB|$. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC . [Rovnoramennost budeme překládat do rovnosti úhlů. Označme $|\sphericalangle BAC| = x$. Nejdříve využijeme rovnoramenný trojúhelník ADC , abychom zjistili, že $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DCA| = x$ a vnější úhel BDC je jejich součtem, tj. $|\sphericalangle BDC| = 2x$. Poté využijeme rovnoramenný trojúhelník BDC a zjistíme, že $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle DBC| = 2x$. Nakonec využijeme rovnoramenný trojúhelník ABC a zjistíme, že $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABC| = 2x$. Z téhož trojúhelníku sestavíme rovnici $x + 2x + 2x = 180^\circ$ a vypočteme úhly 36° , 72° , 72° .]
- N4. V lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, se osy vnitřních úhlů při vrcholech C a D protínají na úsečce AB . Dokažte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$. [C-73-II-2]
- D1. V rovnoběžníku $ABCD$ platí, že osa úhlu ABC prochází středem L strany CD . Dokažte, že $AL \perp BL$. [C-71-S-2]
- D2. Uvažujme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se shodnými úhly při vrcholech A a B . Necht se osy jeho stran BC a AD protínají v bodě M , který leží na straně AB . Dokažte, že $|AC| = |BD|$. [Trojúhelníky MBC a MDA jsou rovnoramenné a díky shodnosti úhlů při vrcholech A a B dokonce podobné. Trojúhelníky MBD a MCA se tak shodují nejen ve dvou stranách ($|MB| = |MC|$ a $|MD| = |MA|$), ale i v úhlech u vrcholu M , protože jde o vnější úhly u hlavních vrcholů podobných rovnoramenných trojúhelníků. Shodují se tedy i třetí strany trojúhelníků MBD a MCA , což jsou úhlopříčky BD a CA .]
- D3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB a D , E středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům APC , CPB . Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC je průsečíkem výšek trojúhelníku CDE . [C-58-II-2]

6. Na pekáči je 21 buchet, 10 z nich je plněných povidly, zbylých 11 tvarohem. Můžeme položit 10 otázek. V každé otázce ukážeme na dvě buchty a kuchař nám řekne, jestli mají stejnou náplň, nebo každá jinou. Je možné ptát se tak, abychom o alespoň jedné buchtě s jistotou zjistili, čím je plněná? (Josef Tkadlec, Felix Schröder)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Ze 4 buchet na talíři je 1 tvarohová, zbylé 3 jsou povidlové. Na kolik nejméně otázek zjistíme od našeho kuchaře, která je tvarohová? [Jsou potřeba dvě otázky. Pokud je první odpověď „stejně“, ukázali jsme na povidlové buchty a zbylé dvě jsou různé. Zeptáme se na jednu povidlovou buchtu znovu a jednu z různých

buchet. Pokud je první odpověď „různé“, jsme ve stejné situaci jako v předchozím případě – zbylé dvě buchty jsou povidlové.]

- N2. Náš kuchař připravil tvarohové a povidlové buchty, 4 jednoho typu, 7 druhého typu. Položili jsme mu 5 otázek na 10 různých buchet a pokaždé zazněla táž odpověď. Jedenáctou buchtu jsme se rozhodli sníst a byla povidlová. Kterých buchet bylo více? [Povidlových. Nemohlo zaznít 5 odpovědí „různá“, protože to bychom museli mít každého typu alespoň 5 buchet. Zazněly tedy jenom odpovědi „stejná“. Za každou odpověď „stejná“ odložíme buď dvě povidlové buchty, nebo dvě tvarohové buchty. Celkem odložíme 10 z 11 buchet, takže buchty jednoho typu jsme odložili všechny – musel to být sudý počet 4 buchet, protože je odkládáme po dvou. Jedenáctá (sněžená) buchta tak musela být jedna ze 7 buchet.]
- D1. Mach hraje následující hru. Na začátku je na stole k hromádek, na nichž je postupně $1, 2, 3, \dots, k$ žetonů. V každém tahu vybere libovolné dvě hromádky a odstraní z obou stejný počet žetonů. Jeho cílem je, aby na stole zůstal jediný žeton. Může se mu to podařit a) pro $k = 10$, b) pro $k = 11$? [C-72-I-4]
- D2. Na tabuli byla napsána čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. V každém kroku jsme dvě čísla smazali a nahradili druhou mocninou jejich rozdílu. Pokud po nejvýše 7 krocích zůstala na tabuli všechna čísla stejná, mohla to být čísla a) lichá, b) sudá? [C-72-S-3]
- D3. V jednom poli šachovnice 8×8 je napsáno „+“ a v ostatních polích „-“. V jednom kroku můžeme změnit na opačná zároveň všechna čtyři znaménka v kterémkoli čtverci 2×2 na šachovnici. Rozhodněte, zda po určitém počtu kroků může být na šachovnici obou znamének stejný počet. [C-64-II-2]