66. Mezinárodní matematická olympiáda

Již 66. ročník Mezinárodní matematické olympiády (IMO) se konal ve dnech 10. – 20. července v Austrálii v letovisku Sunshine Coast nedaleko Brisbane. Soutěže se zúčastnilo rekordních 630 soutěžících ze 110 států. Český tým, jehož účast byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy, přivezl jednu stříbrnou medaili a tři bronzové.

Jako první do Austrálie přiletěli vedoucí národních delegací. Jejich hlavním úkolem bylo vybrat šest soutěžních úloh z takzvaného shortlistu, který na základě 235 úloh navržených jednotlivými státy připravila Problem Selection Committee. Mezi 31 úlohami v tomto shortlistu, které byly tradičně rozděleny do čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie, teorie čísel), byly i dva české návrhy od *Patrika Baka* a *Michala Janíka*, ale ani jeden z nich se nakonec pro soutěž nepoužil. Zadání šesti soutěžních úloh najdete na konci této zprávy. Kromě výběru úloh a schvalování bodovacích schémat letos vedoucí strávili notnou dobu i debatováním o dlouhodobém směřování IMO. Mimo jiné bylo odhlasováno, že od příštího ročníku se mohou v shortlistu objevovat i úlohy o komplexních číslech – nepředpokládá se ovšem, že by vedoucí takové úlohy hned příští rok vybrali pro ostrou soutěž.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí dorazili do Austrálie o tři dny později. Po krátké prohlídce Brisbane se přesunuli na ubytování, které bylo zajištěno v příjemném resortu Novotel. Resort kromě kajakování na laguně a kopání tunelu do Evropy na přilehlé pláži nabízel i interakci s volně se pohybujícími klokany. Vlastní soutěž proběhla 15. a 16. července. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tři obtížných úloh. Za každou z nich mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že zhruba polovina soutěžících si z olympiády přiveze medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Soutěžící, kteří zcela správně vyřeší alespoň jednu úlohu, obdrží čestná uznání (HM).

Českou republiku reprezentoval šestičlenný tým ve složení: *Erik Ježek* (Smíchovská SPŠ a G, Praha), *Jakub Trčka* (G J. Keplera, Praha), *David Hromádka* (G Nad Alejí, Praha), *Pavel Hyánek* (G Brno, třída Kapitána Jaroše), *Mikuláš Jandík* (G Christiana Dopplera, Praha) a *Veronika Menšíková* (Arcibiskupské G, Praha). Vedoucím týmu byl *Josef Tkadlec* z Informatického ústavu MFF UK a pedagogickým vedoucím *Pavel Calábek* z Palackého Univerzity v Olomouci. Přehled výsledků českého týmu uvádíme v tabulce:

České reprezentační družstvo ve složení (zleva): Josef Tkadlec (vedoucí), Pavel Hyánek (bronz), Mikuláš Jandík (čestné uznání), Erik Ježek (stříbro), David Hromádka (bronz), Pavel Calábek (pedagogický vedoucí), Veronika Menšíková (čestné uznání), Jakub Trčka (bronz).

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
81.–87.	Erik Ježek	7	7	5	7	7	0	33	S
187.–202.	Jakub Trčka	6	7	0	7	6	0	26	B
272.–290.	David Hromádka	7	7	0	7	0	0	21	B
272.–290.	Pavel Hyánek	7	1	0	6	7	0	21	B
334.–345.	Mikuláš Jandík	7	0	1	5	4	0	17	HM
346.–365.	Veronika Menšíková	7	1	0	7	1	0	16	HM
	Celkem	41	23	6	39	25	0	134	

Zlato se letos udělovalo za zisk alespoň 35 bodů, stříbro za 28 a bronz za 19. Tyto hranice byly nezvykle vysoké – v 9 z předchozích 10 ročníků by Erik za 33 bodů bral zlato a Kuba by za 26 bodů bral stříbro. Pro zajímavost uvádíme i výsledky slovenského týmu.

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
12.–26.	Matej Bachniček	7	7	1	7	7	7	36	G
243.–271.	Richard Dudek	7	1	0	7	7	0	22	B
272.–290.	Lucia Chladná	7	7	0	6	1	0	21	B
272.–290.	Rudolf Kusý	7	1	0	6	7	0	21	B
291.–302.	Jakub Krivošík	7	1	4	6	2	0	20	B
346.–365.	Richard Vodička	7	1	0	7	1	0	16	HM
	Celkem	42	18	5	39	25	7	136	

V neoficiálním pořadí týmů obsadila Česká republika se ziskem 134 bodů 41. příčku hned za Slovenskem, které se s spolu s Jihoafrickou republikou a Novým Zélandem podělilo o pozice 38.–40. Zvítězila jako obvykle Čína, jejíž reprezentanti všichni bezchybně vyřešili každou z prvních pěti úloh (totéž se mimo jiné podařilo i některým jazykovým modelům). Šestá úloha se ukázala výrazně obtížnější. Celkem ji vyřešilo jen 6 soutěžících, z toho 5 jich vyřešilo všechny úlohy a dosáhlo tak maximálního možného počtu 42 bodů. Jediným dalším úspěšným řešitelem šesté úlohy byl Slovák Matej Bachníček. Kompletní výsledky jsou dostupné na adrese `imo-official.org`.

Na závěr ještě zmiňme, že organizátoři si dali záležet na tom, aby byl tento ročník soutěže opravdu australský. V anglických zadáních se tak hra s nerovnostmi v páté soutěžní úloze jmenovala „ine*koala*ty game“ a funkcím ze třetí úlohy se říkalo „bonza“ (australský slang pro „prvotřídní“). Ve volnočasovém programu po soutěži se pak vyskytovaly položky jako exkurze do zábavního parku „Aussie World“, návštěva ZOO s klokany, koalami a krokodýly, nebo vyslechnutí přednášek od Terence Taa (rodák z Adelaide a držitel Fieldsovy medaile) a Burckharda Polstera (profesor na univerzitě v Melbourne a YouTuber z populárního kanálu Mathologer).

Následující ročníky Mezinárodní matematické olympiády se uskuteční v Číně (2026), v Maďarsku (2027) a v Saudské Arábii (2028).

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Řekneme, že přímka v rovině je *slunečná*, pokud není rovnoběžná ani s osou x, ani s osou y, ani s přímkou $x + y = 0$. Je dáno celé číslo $n \geq 3$. Určete všechna nezáporná celá čísla k, pro něž existuje n navzájem různých přímek v rovině takových, že:

- pro každá dvě kladná celá čísla a a b splňující $a + b \leqslant n + 1$ platí, že bod (a, b) leží na aspoň jedné z těchto n přímek; a
- přesně k z těchto n přímek je slunečných. *(USA)*

2. Jsou dány kružnice Ω a Γ se středy po řadě M a N takové, že poloměr kružnice Ω je menší než poloměr kružnice Γ. Předpokládejme, že kružnice Ω a Γ se protínají ve dvou bodech A a B. Přímka MN protíná kružnici Ω v bodě C a kružnici Γ v bodě D tak, že body C, M, N, D leží na přímce v tomto pořadí. Označme P střed kružnice opsané trojúhelníku ACD. Přímka AP protíná kružnici Ω podruhé v bodě $E \neq A$ a kružnici Γ podruhé v bodě $F \neq A$. Označme H průsečík výšek trojúhelníku PMN. Dokažte, že rovnoběžka s AP vedená bodem H se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BEF. *(Vietnam)*

3. Označme $\mathbb{N}$ množinu kladných celých čísel. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je *senza*, jestliže pro všechna kladná celá čísla a a b platí, že

$$f(a) \text{ je dělitelem } b^a - f(b)^{f(a)}.$$

Určete nejmenší reálnou konstantu c takovou, že pro každou senza funkci f a každé kladné celé číslo n platí $f(n) \leqslant cn$. *(Kolumbie)*

4. Řekneme, že kladný dělitel kladného celého čísla m je *ostrý*, pokud je různý od m. Uvažujme nekonečnou posloupnost $(a_1, a_2, \ldots)$ kladných celých čísel, z nichž každé má alespoň tři ostré dělitele. Pro každé $n \geqslant 1$ platí, že číslo a_{n+1} je součtem tří největších ostrých dělitelů čísla a_n. Určete všechny možné hodnoty a_1. *(Litva)*

5. Alice a Bob hrají hru, jejíž pravidla závisí na kladném reálném čísle λ, které je známé oběma hráčům. V n-tém ko~~a~~le hry (počínaje $n = 1$) se stane následující:

- Je-li n liché, Alice vybere nezáporné reálné číslo x_n takové, že

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Je-li n sudé, Bob vybere nezáporné reálné číslo x_n takové, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Pokud hráč nemůže vybrat takové číslo x_n, hra končí a vyhrává jeho soupeř. Pokud hra pokračuje donekonečna, nevyhrává žádný z hráčů. Všechna vybraná čísla jsou známa oběma hráčům. Určete všechny hodnoty λ, pro které má Alice vítěznou strategii, a také všechny hodnoty λ, pro které má vítěznou strategii Bob. *(Itálie)*

6. Matylda chce do čtvercové tabulky 2025×2025 rozmístit několik dlaždic tak, že každá dlaždice je obdélník nebo čtverec, každá dlaždice přesně zakrývá několik políček tabulky a dlaždice se navzájem nepřekrývají. Určete nejmenší počet dlaždic, které Matylda musí rozmístit, aby v každém řádku a každém sloupci zůstalo přesně jedno políčko nezakryté. *(Singapur)*

Josef Tkadlec