75. ročník Matematické olympiády (2025/2026)

# Návodné a doplňující úlohy pro kategorii B

**V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.**

**1.** *Každé hraně čtyřstěnu přiřadíme jedno reálné číslo tak, aby každá stěna měla stejný součet čísel svých tří hran. Kolik nejvýše z šesti čísel přiřazených hranám může být navzájem různých?* (Mária Dományová)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Uvažme čtyři čísla taková, že každá tři mají stejný součet. Ukažte, že pak musí být všechna stejná.

N2. Pět čísel je napsaných po obvodu kruhu tak, že každá tři sousední mají stejný součet. Ukažte, že pak musí být všechna stejná.

N3. Šest čísel je napsaných po obvodu kruhu tak, že každá tři sousední mají stejný součet. Kolik nejvýše z nich může být různých?

D1. Každé stěně krychle přiřadíme reálné číslo tak, aby všechny vrcholy krychle měly stejný součet čísel na třech přilehlých stěnách. Kolik ze šesti čísel přiřazených stěnám může být navzájem různých?

D2. Pro reálná čísla $a$, $b$, $c$, $d$ platí

$$a+b+c+d=0 \quad \text{a} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0.$$

Kolik z rovností $ab=cd$, $ac=bd$, $ad=bc$ může současně platit? Určete všechny takové počty.

**2.** *Zápis přirozeného čísla v desítkové soustavě končí dvojčíslím* 90*. Dokažte, že součin všech jeho kladných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla.* (Ján Mazák)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Která z čísel $2^{10}\cdot 7^4\cdot 9$, $3^3\cdot 11^6$, $25^3$, $64\cdot 75$ jsou druhými (nebo většími) mocninami celých čísel?

N2. Určete počet kladných dělitelů čísla 90.

N3. Ukažte, že pokud je $n$ čtvrtou mocninou přirozeného čísla, pak součin kladných dělitelů čísla $n$ je druhou mocninou přirozeného čísla.

D1. Zobecněte úlohu N2 – dokažte, že počet kladných dělitelů čísla s prvočíselným rozkladem $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_m^{\alpha_m}$ je roven $(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_m+1)$.

D2. Součin všech kladných dělitelů čísla 15 je $15^2$. Která další čísla mají tu vlastnost, že součin všech jejich kladných dělitelů je druhou mocninou uvažovaného čísla?

D3. Vyjádřete součet a součin všech kladných dělitelů čísla $n = p^\alpha q^\beta$ co nejjednodušeji pomocí prvočísel $p, q$ a nezáporných celých čísel $\alpha$, $\beta$.

D4. Počet všech sudých dělitelů některého přirozeného čísla je o 3 větší než počet všech jeho lichých dělitelů. Jaký je podíl součtu všech jeho sudých dělitelů a součtu všech jeho lichých dělitelů? Najděte všechny možné odpovědi.

D5. Součin všech kladných dělitelů přirozeného čísla $n$ je $20^{15}$. Určete $n$.

**3.** *Na tabuli je nakreslena kružnice (bez středu) a na ní tři různé body $A$, $B$, $C$. Máme k dispozici křídu a trojúhelník s ryskou bez měřítka. Ten nám umožňuje jen vést přímku libovolnými dvěma body a k dané přímce $p$ vést kolmici daným bodem (ne nutně ležícím na $p$). Popište a zdůvodněte konstrukci středu kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$.* (Ema Čudaiová)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Co je to kružnice trojúhelníku vepsaná? Připomeňte si, jak lze klasickými prostředky (pravítkem a kružítkem) sestrojit její střed a proč tato konstrukce funguje.

N2. Pomocí prostředků povolených v soutěžní úloze sestrojte rovnoběžku k přímce $p$ bodem $X$, který na $p$ neleží.

N3. Dokažte následující tvrzení: Osa vnitřního úhlu u vrcholu $A$ trojúhelníku $ABC$ protne kružnici jemu opsanou ve středu jejího oblouku $BC$ neobsahujícího bod $A$.

D1. Dokažte následující tvrzení: Osa vnějšího úhlu u vrcholu $A$ trojúhelníku $ABC$ protne kružnici jemu opsanou ve středu jejího oblouku $BC$ obsahujícího bod $A$.

D2. K dané kružnici sestrojte střed pouze pomocí prostředků povolených v soutěžní úloze.

D3. V rovině je dána kružnice $k$ se středem $S$ a poloměrem 1. Pouze pomocí prostředků povolených v soutěžní úloze sestrojte úsečku o délce $\sqrt{13}$.

D4. Máme pravítko bez měřítka, které nám umožňuje vést přímku dvěma danými body a sestrojit kolmici na danou přímku *jejím* daným bodem. Zjistěte, zda pomocí těchto operací dokážeme sestrojit kolmici na danou přímku z daného bodu ležícího mimo tuto přímku.

**4.** *Reálná čísla $x$, $y$ splňují nerovnosti $xy \geqq x + y > 0$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat součet $x + y$?* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (tzv. AG-nerovnost) nezáporných reálných čísel $a$, $b$

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

a určete, kdy v ní nastává rovnost.

N2. Nechť $a$, $b$ jsou kladná reálná čísla se součinem 10. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu $a + b$ a zjistěte, pro jaká $a$, $b$ se nabývá.

N3. Nechť reálná čísla $a$, $b$ a konstanta $K$ splňují $a+b = K$. V závislosti na $K$ určete největší možnou hodnotu součinu $ab$ a zjistěte, pro jaká $a, b$ se nabývá.

D1. Pro libovolná čísla $a$, $b$ z intervalu $\langle 1, +\infty)$ platí nerovnost

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - (a - 1)^2(b - 1)^2 \geqq 4.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

D2. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1 + 2x^2},$$

kde $x$ je libovolné reálné číslo. Pro která $x$ výraz $V$ této hodnoty nabývá?

D3. Určete všechny dvojice $(x, y)$ reálných čísel, které vyhovují nerovnici

$$(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geqq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2.$$

D4. Najděte nejmenší reálné číslo $k$ takové, aby nerovnost $k(a^2 + b^2) \geqq (a + b)^2 + ab$ platila pro všechny dvojice kladných reálných čísel $a$, $b$.

**5.** *V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC|$ a $|\sphericalangle BCD| = 3|\sphericalangle BAD|$. Body $P$ a $Q$ leží po řadě na úsečkách $AB$ a $AD$ tak, že $APCQ$ je rovnoběžník. Nechť $O$ je střed kružnice opsané trojúhelníku $CPQ$. Dokažte, že $AO \perp BD$.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Uvnitř trojúhelníku $ABC$ je dán bod $P$ tak, že platí $|\sphericalangle ABP| = 30°$, $|\sphericalangle PBC| = 40°$, $|\sphericalangle BCP| = 20°$ a $|\sphericalangle PCA| = 30°$. Ukažte, že přímka $AP$ je kolmá k přímce $BC$.

N2. V trojúhelníku $ABC$ označme $M$, $N$ a $P$ po řadě středy stran $BC$, $CA$ a $AB$. Dokažte, že průsečík výšek trojúhelníku $MNP$ je současně středem kružnice opsané trojúhelníku $ABC$.

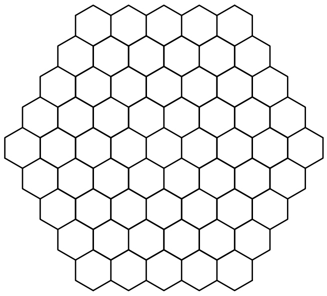
D1. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě $P$ a jejich osy se protínají v bodě $M$. Předpokládejme, že $M$ leží na základně $AB$. Dokažte, že přímka $MP$ je osou úhlu $CMD$.

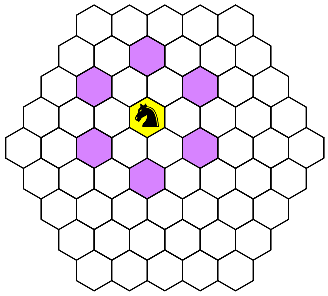
D2. V rovnoběžníku $ABCD$ platí, že osa úhlu $ABC$ prochází středem $L$ strany $CD$. Dokažte, že $AL \perp BL$.

D3. V trojúhelníku $ABC$ narýsujeme osu vnitřního úhlu u vrcholu $A$ a její průsečík se stranou $BC$ označíme $D$. Na straně $AB$ najdeme takový bod $M$, že $MD \parallel AC$. Dokažte, že pak úsečky $AM$ a $DM$ mají stejnou délku.

D4. Nechť $ABC$ je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou $BC$. Uvnitř stran $AB$ a $AC$ leží po řadě body $D$ a $E$ tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme $F$ takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$.

**6.** *Hrací plán na obrázku vlevo se skládá z* 61 *pravidelných šestiúhelníků se stranou délky* 1.* *Na každém jeho políčku může stát nejvýše jeden jezdec. Dva jezdci se ohrožují právě tehdy, když stojí na políčkách se středy vzdálenými přesně* 3 *(políčka ohrožená jezdcem jsou na obrázku vpravo vybarvená). Kolik nejvýše jezdců můžeme umístit na tento plán tak, aby se žádní dva neohrožovali?*





(Jozef Rajník)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Vyjádřete obecně vzdálenost středů dvou políček na stejném řádku hracího plánu a vyvoďte z výsledku, že jsou to necelá (dokonce iracionální) čísla.

N2. Jezdec stojí na středovém políčku hracího plánu. Na která políčka dokáže doskákat konečným počtem skoků? Jak tomu bude v případě, že jezdec stojí v pravém horním rohu?

N3. Dokažte, že na šachovnici $8 \times 8$ lze umístit nejvýše 16 králů tak, aby se navzájem neohrožovali.

D1. Figurka střelce ohrožuje na šachovnici libovolné pole diagonály, na níž střelec stojí. Pokud ovšem na některém poli diagonály stojí věž, střelec už pole za ní neohrožuje. Určete největší možný počet střelců, které můžeme spolu se čtyřmi věžemi umístit na šachovnici $8 \times 8$ tak, aby se střelci navzájem neohrožovali.

D2. Jaký největší počet střelců lze umístit na bílá pole šachovnice $8 \times 8$ tak, aby se navzájem neohrožovali?

D3. Na desce $7 \times 7$ hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď $2 \times 3$. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli.

D4. Na desce $5 \times 5$ hrajeme hru lodě. Ze čtyř polí desky je vytvořena jedna loď tvaru L-tetromina. Můžeme se zeptat na libovolné pole desky a pokud loď zasáhneme, hra končí. a) Navrhněte osm polí, na něž se stačí dotázat, abychom měli jistotu zásahu lodě. b) Zdůvodněte, že sedm otázek obecně takovou jistotu nedává.

**Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.**

* Hrací plány najdete na https://www.matematickaolympiada.cz/media/3855053/hrplany_b6.pdf

**1.** *Každé hraně čtyřstěnu přiřadíme jedno reálné číslo tak, aby každá stěna měla stejný součet čísel svých tří hran. Kolik nejvýše z šesti čísel přiřazených hranám může být navzájem různých?* (Mária Dományová)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Uvažme čtyři čísla taková, že každá tři mají stejný součet. Ukažte, že pak musí být všechna stejná. [Označme čísla $x_1, x_2, x_3, x_4$ a jejich součet $S$. Pak platí $S - x_1 = x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = S - x_4$, porovnáním krajních výrazů dostaneme $x_1 = x_4$, podobně pro ostatní dvojice. Součet $S$ není třeba zavádět, jelikož z $x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4$ dostáváme ihned $x_1 = x_4$ a analogicky pro zbylé dvojice. Zde se jedná jen o kosmetický rozdíl, ale v některých obtížnějších úlohách může označení vhodného symetrického výrazu vnést do řešení systém a ukázat správnou cestu k cíli.]

N2. Pět čísel je napsaných po obvodu kruhu tak, že každá tři sousední mají stejný součet. Ukažte, že pak musí být všechna stejná. [Označme čísla $x_1$ až $x_5$, společnou hodnotu součtů sousedních trojic $T$ a součet všech pěti čísel $S$. Pak platí

$$2T = (x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_1) = S + x_1,$$
$$2T = (x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_1 + x_2) = S + x_2$$

a podobně (posunem začátku sčítání kolem kruhu) pro ostatní tři čísla. Porovnáním snadno dostaneme požadovanou rovnost.]

N3. Šest čísel je napsaných po obvodu kruhu tak, že každá tři sousední mají stejný součet. Kolik nejvýše z nich může být různých? [Tři. Opět označíme čísla $x_1$ až $x_6$ v pořadí okolo kruhu. Pak $x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4$, z čehož plyne $x_1 = x_4$ a analogicky dostaneme rovnosti $x_2 = x_5$ a $x_3 = x_6$. Dalšími kombinacemi zadaných podmínek/rovnic už více informací nedostaneme, např. šestice $(1, 2, 3, 1, 2, 3)$ splňuje zadané podmínky, tedy tři různá čísla mohou být. (Dokonce vyhovuje každá šestice tvaru $(a, b, c, a, b, c)$).]

D1. Každé stěně krychle přiřadíme reálné číslo tak, aby všechny vrcholy krychle měly stejný součet čísel na třech přilehlých stěnách. Kolik ze šesti čísel přiřazených stěnám může být navzájem různých? [Jedno, dvě nebo tři. Pohledem na dva sousední vrcholy krychle dostaneme, že na protějších stěnách krychle musí být stejná čísla. Naopak, pokud na horní a dolní stěně bude číslo $a$, na levé a pravé $b$ a na přední a zadní $c$, pak u každého vrcholu bude součet $a + b + c$. Z čísel $a$, $b$, $c$ tedy mohou být právě jedno až tři navzájem různá.]

D2. Pro reálná čísla $a$, $b$, $c$, $d$ platí

$$a + b + c + d = 0 \quad \text{a} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Kolik z rovností $ab = cd$, $ac = bd$, $ad = bc$ může současně platit? Určete všechny takové počty. [A–74–IV–1]

**2.** *Zápis přirozeného čísla v desítkové soustavě končí dvojčíslím* 90. *Dokažte, že součin všech jeho kladných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla.* (Ján Mazák)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Která z čísel $2^{10} \cdot 7^4 \cdot 9$, $3^3 \cdot 11^6, 25^3$, $64 \cdot 75$ jsou druhými (nebo většími) mocninami celých čísel? [Přirozené číslo je $k$-tou mocninou, právě když všechny exponenty prvočísel v jeho prvočíselném rozkladu jsou násobky $k$. Konkrétně: $2^{10} \cdot 7^4 \cdot 9 = 2^{10} \cdot 7^4 \cdot 3^2 = (2^5 \cdot 7^2 \cdot 3)^2$ je druhá, ale žádná větší mocnina, $3^3 \cdot 11^6$ je (pouze) třetí mocninou, $25^3 = 5^6$ je šestou (a tedy i druhou a třetí) mocninou a $32 \cdot 125 = 2^5 \cdot 5^3$ není druhou nebo větší celočíselnou mocninou.]

N2. Určete počet kladných dělitelů čísla 90. [Číslo 90 rozložíme na prvočinitele $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Výběrem těchto prvočísel se stejnými nebo nižšími (i nulovými) exponenty poskládáme všechny kladné dělitele $1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90$. Je jich tedy 12.]

N3. Ukažte, že pokud je $n$ čtvrtou mocninou přirozeného čísla, pak součin kladných dělitelů čísla $n$ je druhou mocninou přirozeného čísla. [Řešení této úlohy najdete v komentářích, které budou zveřejněny na stránkách MO po termínu odevzdání úloh domácího kola.]

D1. Zobecněte úlohu N2 – dokažte, že počet kladných dělitelů čísla s prvočíselným rozkladem $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ je roven $(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$. [Prvočíselný rozklad libovolného dělitele $n$ obsahuje stejná prvočísla jako $n$ se stejnými nebo nižšími (případně nulovými, připomeňme konvenci $l^0 = 1$ pro každé $l \neq 0$) exponenty než mají příslušná prvočísla v rozkladu $n$. Určení těchto mocnin jednoznačně určuje dělitele a různé volby mocnin dávají různé dělitele. Jelikož u prvočísla $p_i$ máme na výběr exponenty $0, 1, \ldots, \alpha_i$ (tedy $\alpha_i + 1$ možností) a exponenty u různých prvočísel můžeme volit nezávisle (tzn. máme k dispozici všechny kombinace), je počet dělitelů skutečně roven uvedenému součinu.]

D2. Součin všech kladných dělitelů čísla 15 je $15^2$. Která další čísla mají tu vlastnost, že součin všech jejich kladných dělitelů je druhou mocninou uvažovaného čísla? [Vyhovují čísla 1, $pq$ a $p^3$ pro $p$, $q$ libovolná různá prvočísla. Uvažme libovolné přirozené číslo $n$, které má v prvočíselném rozkladu alespoň tři prvočísla $p_1$, $p_2$ a $p_3$ v (kladných) mocninách $\alpha_1$, $\alpha_2$ a $\alpha_3$, tedy $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} m$, pro nějaké přirozené číslo $m$. Pak $p_1$ dělí $n^2$ v mocnině $2\alpha_1$. V součinu všech kladných dělitelů $n$ se vyskytuje s exponentem alespoň

$$(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)\alpha_1 \geqq 4\alpha_1 > 2\alpha_1,$$

protože všechna čísla tvaru $p_1^{\alpha_1} d$, kde $d$ je kladný dělitel $p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$, jsou kladnými děliteli $n$ a z úlohy D1 víme, že takových dělitelů $d$ je $(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)$. Taková $n$ tedy podmínce nevyhovují. Analogicky rozebereme případy, kdy $n$ je dělitelné právě dvěma prvočísly (vyjde, že obě musí být v rozkladu $n$ v prvních mocninách, stejně jako u čísla 15). Pokud $n = p^\alpha$ je mocninou prvočísla, jeho kladní dělitelé jsou čísla $1, p, p^2, \ldots, p^\alpha$. Jejich součin je roven $p^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}$ a jeho druhá mocnina je rovna $p^{2\alpha}$. Porovnáním exponentů dostáváme $\alpha = 0$ (pak $n = 1$) nebo $\alpha = 3$ (pak $n = p^3$).]

D3. Vyjádřete součet a součin všech kladných dělitelů čísla $n = p^\alpha q^\beta$ co nejjednodušeji pomocí prvočísel $p, q$ a nezáporných celých čísel $\alpha$, $\beta$. [Uvažme součin

$$(p^0 + p^1 + \ldots + p^\alpha)(q^0 + q^1 + \ldots + q^\beta).$$

Všimněme si, že pokud bychom jej roznásobili, dostali bychom právě součet všech dělitelů $n$. S pomocí známého vzorce pro rozklad výrazu pro $A^n - B^n$ můžeme ještě výsledek zapsat v uzavřeném tvaru jako

$$\frac{(p^{\alpha+1} - 1)(q^{\beta+1} - 1)}{(p-1)(q-1)}.$$

Hledejme nyní výraz pro součin všech dělitelů $n$. S jakou mocninou se v něm vyskytuje $p$? Libovolný dělitel $q^\beta$ můžeme vynásobit mocninou $p$ (s exponentem mezi nulou a $\alpha$) a získáme tak každý dělitel $n$. Mocnina $p$ v součinu všech kladných dělitelů $n$ je tedy rovna $(1 + \ldots + \alpha)$krát počet dělitelů čísla $q^\beta$, tedy $\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2}$. Analogicky vyjádříme exponent u $q$ a celý hledaný součin jako

$$p^{\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} q^{\frac{\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} = n^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2}}.$$

K témuž výsledku dochází jinou cestou i řešení soutěžní úlohy, i když jen pro $n$, která nejsou druhou mocninou. Stojí za povšimnutí, že vzorec zůstává v platnosti i v tomto případě.]

D4. Počet všech sudých dělitelů některého přirozeného čísla je o 3 větší než počet všech jeho lichých dělitelů. Jaký je podíl součtu všech jeho sudých dělitelů a součtu všech jeho lichých dělitelů? Najděte všechny možné odpovědi. [B–65–I–4]

D5. Součin všech kladných dělitelů přirozeného čísla $n$ je $20^{15}$. Určete $n$. [B–64–II–1]

**3.** *Na tabuli je nakreslena kružnice (bez středu) a na ní tři různé body $A$, $B$, $C$. Máme k dispozici křídu a trojúhelník s ryskou bez měřítka. Ten nám umožňuje jen vést přímku libovolnými dvěma body a k dané přímce $p$ vést kolmici daným bodem (ne nutně ležícím na $p$). Popište a zdůvodněte konstrukci středu kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$.* (Ema Čudaiová)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Co je to kružnice trojúhelníku vepsaná? Připomeňte si, jak lze klasickými prostředky (pravítkem a kružítkem) sestrojit její střed a proč tato konstrukce funguje. [Je to kružnice dotýkající se všech tří stran trojúhelníka, její střed má proto od všech stejnou vzdálenost. Množinou bodů se stejnou vzdáleností od přímek $AB$ a $AC$ (připomeňme, že vzdáleností bodu $X$ od přímky $p$ myslíme vzdálenost bodu $X$ od paty kolmice z $X$ k $p$) je sjednocení os vnitřního a vnějšího úhlu $BAC$. Průsečík os *vnitřních* úhlů $BAC$ a $ABC$ má zřejmě stejnou vzdálenost od všech tří stran (jakožto přímek). Navíc leží uvnitř trojúhelníku, takže musí ležet i na ose *vnitřního* úhlu $ACB$. Všechny tři osy vnitřních úhlů trojúhelníku (jejichž konstrukce je standardní) se tedy protínají v jediném bodě, který je středem kružnice vepsané.*]

N2. Pomocí prostředků povolených v soutěžní úloze sestrojte rovnoběžku k přímce $p$ bodem $X$, který na $p$ neleží. [Nejprve sestrojíme kolmici $q$ k přímce $p$ procházející bodem $X$. Poté sestrojíme kolmici k přímce $q$ procházející bodem $X$, která je hledanou rovnoběžkou.]

N3. Dokažte následující tvrzení: Osa vnitřního úhlu u vrcholu $A$ trojúhelníku $ABC$ protne kružnici jemu opsanou ve středu jejího oblouku $BC$ neobsahujícího bod $A$. [Tvrzení plyne přímo z věty o obvodových úhlech. K tomuto tématu doporučujeme např. studijní text https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/tkadlec.pdf.]

D1. Dokažte následující tvrzení: Osa vnějšího úhlu u vrcholu $A$ trojúhelníku $ABC$ protne kružnici jemu opsanou ve středu jejího oblouku $BC$ obsahujícího bod $A$. [Označme zkoumaný průsečík $X$. Z úlohy N3 víme, že osa příslušného vnitřního úhlu protne kružnici opsanou ve středu $M$ jejího oblouku $BC$ neobsahujícího bod $A$. Osa vnějšího úhlu je na ni kolmá, z Thaletovy věty tedy plyne, že bod $X$ tvoří s bodem $M$ průměr kružnice, zkoumaný průsečík $X$ je proto středem druhého oblouku $BC$.]

D2. K dané kružnici sestrojte střed pouze pomocí prostředků povolených v soutěžní úloze. [Zvolme na kružnici $k$ libovolné dva různé body $A$ a $B$. Bodem $B$ veďme kolmici $p$ na přímku $AB$. Průsečík přímky $p$ a kružnice $k$ různý od bodu $B$ označíme $C$. (Pokud takový náhodou neexistuje, položíme $C = B$.) Konstrukci zopakujeme pro jiné dva body $A'$, $B'$ (z nich sestrojíme $C'$). Průsečík přímek $AC$ a $A'C'$ označíme $S$. Jelikož úhly $ABC$ a $A'B'C'$ jsou pravé, podle Thaletovy věty jsou $AC$ a $A'C'$ průměry kružnice $k$ a proto je bod $S$ hledaným středem. Další možností je sestrojit střed jako průsečík os dvou různých tětiv dané kružnice (konstrukce osy úsečky je popsána v řešení soutěžní úlohy). Je ovšem třeba zajistit, aby osy tětiv nesplynuly, např. volbou dvou různých tětiv se společným krajním bodem.]

D3. V rovině je dána kružnice $k$ se středem $S$ a poloměrem 1. Pouze pomocí prostředků povolených v soutěžní úloze sestrojte úsečku o délce $\sqrt{13}$. [Protože $13 = 2^2 + 3^2$, podle Pythagorovy věty je $\sqrt{13}$ délka přepony pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o délkách 2 a 3. Pro jeho konstrukci vedeme bodem $S$ polopřímku $a$ a polopřímku $b$ kolmou na $a$. Průsečíky polopřímek $a$, $b$ s kružnicí $k$ označíme postupně $A_1$, $B_1$. Bod $S$ zobrazíme středově souměrně (návod je uveden v závěru řešení) podle bodu $A_1$ na bod $A_2$ a následně bod $A_1$ zobrazíme podle bodu $A_2$ na bod $A_3$. Podobně zobrazíme bod $S$ přes střed $B_1$ na bod $B_2$. Trojúhelník $B_2SA_3$ je pravoúhlý s délkami odvěsen 2 a 3, tedy $|A_2A_3| = \sqrt{13}$. Obraz bodu $X$ podle bodu $Y$ (jakožto středu souměrnosti) sestrojíme následovně: Pomocí kolmic zkonstruujeme obdélník $XYZW$. Průsečík přímky $XY$ a rovnoběžky s jeho úhlopříčkou $WY$ vedené bodem $Z$ je hledaným středovým obrazem.]

* Podobně se ukáže, že průsečík os dvou *vnějších* úhlů leží na ose *vnitřního* úhlu u zbylého vrcholu. Takto sestrojené tři body jsou středy kružnic *připsaných*, které se také dotýkají všech tří stran trojúhelníku (jakožto přímek), leží však mimo trojúhelník.

D4. Máme pravítko bez měřítka, které nám umožňuje vést přímku dvěma danými body a sestrojit kolmici na danou přímku *jejím* daným bodem. Zjistěte, zda pomocí těchto operací dokážeme sestrojit kolmici na danou přímku z daného bodu ležícího mimo tuto přímku. [KMS 2010/11, 2. zimná séria, úloha 7]

**4.** *Reálná čísla $x$, $y$ splňují nerovnosti $xy \geqq x + y > 0$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat součet $x + y$?* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (tzv. AG-nerovnost) nezáporných reálných čísel $a$, $b$

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

a určete, kdy v ní nastává rovnost. [Díky nezápornosti existují čísla $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ a s jejich pomocí můžeme nerovnost ekvivalentně přepsat jako $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$. Tato nerovnost zřejmě platí pro všechny dvojice $a, b \geqq 0$ a rovnost v ní nastává právě když $a = b$.]

N2. Nechť $a$, $b$ jsou kladná reálná čísla se součinem 10. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu $a + b$ a zjistěte, pro jaká $a$, $b$ se nabývá. [Z AG-nerovnosti máme $a + b \geqq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{10}$ a rovnost se nabývá právě pro $a = b = \sqrt{10}$. Alternativně můžeme dosadit $b = \frac{10}{a}$ a hledat minimum $m$ výrazu

$$a + b = a + \frac{10}{a} \geqq m.$$

Vynásobíme obě strany poslední nerovnosti $a$ a získanou ekvivalentní (zde využíváme, že $a$ je kladné) nerovnost $a^2 - am + 10 \geqq 0$, buď upravíme na čtverec a postupujeme jako v 2. řešení soutěžní úlohy nebo, podobně jako ve 3. řešení soutěžní úlohy, využijeme toho, že diskriminant trojčlenu na levé straně (v proměnné $a$) musí být nekladný. Oběma způsoby dostaneme $m^2 \leqq 4 \cdot 10$ (a hledali jsme největší takové $m$, takže $m = 2\sqrt{10}$) i podmínku pro nabývání minima $a = \frac{m}{2} = \sqrt{10}$.]

N3. Nechť reálná čísla $a$, $b$ a konstanta $K$ splňují $a + b = K$. V závislosti na $K$ určete největší možnou hodnotu součinu $ab$ a zjistěte, pro jaká $a, b$ se nabývá. [Ukážeme dvě řešení, první založené na intuitivním pozorování, že čím jsou čísla $a$, $b$ dále od sebe, tím menší je jejich součin. Označme $d = a - \frac{K}{2} = \frac{K}{2} - b$. Pak

$$ab = \left(\frac{K}{2} + d\right)\left(\frac{K}{2} - d\right) = \frac{K^2}{4} - d^2 \leqq \frac{K^2}{4}$$

a rovnost nastává pro $d = 0$, neboli pro $a = b = \frac{K}{2}$. Podobným způsobem lze dokázat i AG-nerovnost. Alternativně můžeme dosadit $b = K - a$ a hledat maximum výrazu $ab = a(K - a)$ úpravou na čtverec (jako v 2. řešení soutěžní úlohy) nebo pomocí kvadratické funkce, a to buď označením neznámého maxima a využitím diskriminantu (jako v 3. řešení soutěžní úlohy), nebo si všimneme, že

$f(a) = a(K-a) = -a^2 + Ka$ je kvadratický trojčlen se záporným vedoucím koeficientem, takže ze symetrie paraboly nabývá maxima mezi kořeny, tedy v hodnotě $\frac{K+0}{2}$.*]

D1. Pro libovolná čísla $a$, $b$ z intervalu $\langle 1, +\infty)$ platí nerovnost

$$(a^2+1)(b^2+1) - (a-1)^2(b-1)^2 \geqq 4.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. [59–C–II–2]

D2. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1+2x^2},$$

kde $x$ je libovolné reálné číslo. Pro která $x$ výraz $V$ této hodnoty nabývá? [64–B–II–2]

D3. Určete všechny dvojice $(x, y)$ reálných čísel, které vyhovují nerovnici

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2.$$

[63–B–I–2]

D4. Najděte nejmenší reálné číslo $k$ takové, aby nerovnost $k(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2 + ab$ platila pro všechny dvojice kladných reálných čísel $a$, $b$. [70–B–II–1]

**5.** *V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC|$ a $|\sphericalangle BCD| = 3|\sphericalangle BAD|$. Body $P$ a $Q$ leží po řadě na úsečkách $AB$ a $AD$ tak, že $APCQ$ je rovnoběžník. Nechť $O$ je střed kružnice opsané trojúhelníku $CPQ$. Dokažte, že $AO \perp BD$.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Uvnitř trojúhelníku $ABC$ je dán bod $P$ tak, že platí $|\sphericalangle ABP| = 30°$, $|\sphericalangle PBC| = 40°$, $|\sphericalangle BCP| = 20°$ a $|\sphericalangle PCA| = 30°$. Ukažte, že přímka $AP$ je kolmá k přímce $BC$. [Dopočítáním úhlů zjistíme, že přímky $BP$ a $CP$ jsou výšky, přímka $AP$ tedy musí být třetí výškou. Skutečně, pro průsečík $Q$ přímky $BP$ a strany $AC$ platí $|\sphericalangle BQC| = 180° - (40° + 20° + 30°) = 90°$, analogicky dopočítáme, že přímka $PC$ je kolmá k přímce $AB$.]

N2. V trojúhelníku $ABC$ označme $M$, $N$ a $P$ po řadě středy stran $BC$, $CA$ a $AB$. Dokažte, že průsečík výšek trojúhelníku $MNP$ je současně středem kružnice opsané trojúhelníku $ABC$. [Osy stran trojúhelníku $ABC$ splývají s výškami v trojúhelníku $MNP$.]

D1. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě $P$ a jejich osy se protínají v bodě $M$. Předpokládejme, že $M$ leží na základně $AB$. Dokažte, že přímka $MP$ je osou úhlu $CMD$. [Trojúhelník $BMD$ je rovnoramenný se základnou $BD$, takže platí $|\sphericalangle MDB| = |\sphericalangle MBD| = |\sphericalangle CDB|$, přičemž poslední rovnost plyne z rovnoběžnosti základen lichoběžníku $AB \parallel CD$. Tedy $DP$ je osou vnitřního

* Povšimněte si, že tvrzení úloh N1 a N2 jsou si velmi blízká, ovšem s tím podstatným rozdílem, že v N1 musíme předpokládat $a, b, K > 0$.

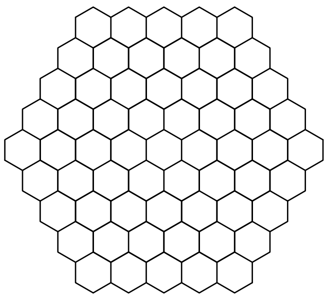
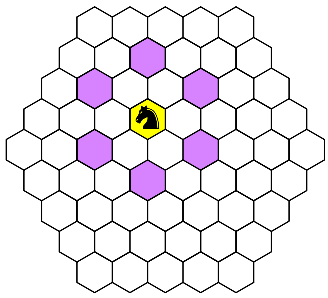
úhlu u vrcholu $C$ v trojúhelníku $CDM$. Podobně ukážeme, že přímka $CP$ je osou vnitřního úhlu u vrcholu $C$. Bod $P$ jakožto jejich průsečík je středem kružnice vepsané trojúhelníku $CDM$, a tedy přímka $MP$ je opravdu osou úhlu $CMD$.*]

D2. V rovnoběžníku $ABCD$ platí, že osa úhlu $ABC$ prochází středem $L$ strany $CD$. Dokažte, že $AL \perp BL$. [C–71–S–2]

D3. V trojúhelníku $ABC$ narýsujeme osu vnitřního úhlu u vrcholu $A$ a její průsečík se stranou $BC$ označíme $D$. Na straně $AB$ najdeme takový bod $M$, že $MD \parallel AC$. Dokažte, že pak úsečky $AM$ a $DM$ mají stejnou délku. [Přímka $AD$ je osou úhlu u vrcholu $A$, takže $|CAD| = |MAD|$. Kromě toho úhly $CAD$ a $MDA$ jsou střídavé, protože $MD \parallel AC$. Trojúhelník $AMD$ je tudíž rovnoramenný a $|AM| = |DM|$.]

D4. Nechť $ABC$ je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou $BC$. Uvnitř stran $AB$ a $AC$ leží po řadě body $D$ a $E$ tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme $F$ takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$. [B–71–I–2]

**6.** *Hrací plán na obrázku vlevo se skládá z* 61 *pravidelných šestiúhelníků se stranou délky* 1. *Na každém jeho políčku může stát nejvýše jeden jezdec. Dva jezdci se ohrožují právě tehdy, když stojí na políčkách se středy vzdálenými přesně* 3 *(políčka ohrožená jezdcem jsou na obrázku vpravo vybarvená). Kolik nejvýše jezdců můžeme umístit na tento plán tak, aby se žádní dva neohrožovali?*

(Jozef Rajník)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Vyjádřete obecně vzdálenost středů dvou políček na stejném řádku hracího plánu a vyvoďte z výsledku, že jsou to necelá (dokonce iracionální) čísla. [Jsou to sudé násobky délky výšky v rovnostranném trojúhelníku o straně jedna, neboli čísla tvaru $2k\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}k$ pro $k$ celé nezáporné. Připomeneme důkaz známého faktu (v řešeních MO je tedy možné jej používat bez důkazu), že $\sqrt{3}$ je iracionální číslo: pokud by $\frac{p}{q} = \sqrt{3}$ pro nějaká přirozená čísla $p$, $q$, tak umocněním dostaneme $3q^2 = p^2$. Číslo $p^2$ obsahuje jakožto druhá mocnina ve svém prvočíselném rozkladu trojku v sudé (i nulové) mocnině, zatímco rozklad $3q^2$ obsahuje ze stejného důvodu lichý počet trojek. Rovnost těchto čísel tedy není možná.]

N2. Jezdec stojí na středovém políčku hracího plánu. Na která políčka dokáže doskákat konečným počtem skoků? Jak tomu bude v případě, že jezdec stojí v pravém

* Jedná se o mírně přeformulovanou úlohu z letošního domácího kola C–75–I–5.

horním rohu? [Plán je možné obarvit několika málo barvami tak, že jezdec umístěný na políčka jedné barvy se může opakovanými skoky na políčka, která aktuálně ohrožuje, dostat pouze na políčka stejné barvy. Řešení této úlohy najdete v komentářích, které budou zveřejněny na stránkách MO po termínu odevzdání úloh domácího kola.]

N3. Dokažte, že na šachovnici $8 \times 8$ lze umístit nejvýše 16 králů tak, aby se navzájem neohrožovali. [Šachovnici rozdělíme na 16 čtverců $2 \times 2$, na každý z nich můžeme umístit nejvýše jednoho krále, proto je králů nejvýše 16. Šestnáct králů už na šachovnici umístit umíme, například na ta pole, jejichž obě souřadnice jsou liché.]

D1. Figurka střelce ohrožuje na šachovnici libovolné pole diagonály, na níž střelec stojí. Pokud ovšem na některém poli diagonály stojí věž, střelec už pole za ní neohrožuje. Určete největší možný počet střelců, které můžeme spolu se čtyřmi věžemi umístit na šachovnici $8 \times 8$ tak, aby se střelci navzájem neohrožovali. [B–69–I–6]

D2. Jaký největší počet střelců lze umístit na bílá pole šachovnice $8 \times 8$ tak, aby se navzájem neohrožovali? [Sedm. Na šachovnici uvažujme diagonály rovnoběžné s bílou hlavní diagonálou. Včetně jí je jich právě 7. Na každou můžeme umístit nejvýše jednoho střelce. Protože každé bílé pole leží na některé z těchto diagonál, můžeme tak na šachovnici umístit nejvýše 7 střelců. Vyhovující umístění 7 střelců můžeme vybrat například tak, že budou v počtech 4 a 3 v krajních sloupcích šachovnice.]

D3. Na desce $7 \times 7$ hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď $2 \times 3$. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli. [58–B–I–4]

D4. Na desce $5 \times 5$ hrajeme hru lodě. Ze čtyř polí desky je vytvořena jedna loď tvaru L-tetromina. Můžeme se zeptat na libovolné pole desky a pokud loď zasáhneme, hra končí. a) Navrhněte osm polí, na něž se stačí dotázat, abychom měli jistotu zásahu lodě. b) Zdůvodněte, že sedm otázek obecně takovou jistotu nedává. [58–B–II–2]