Návodné a doplňující úlohy pro kategorii C

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Přirozené číslo zapsané navzájem různými číslicemi nazveme* pitoreskní, *když každá jeho vnitřní číslice dělí dvojmístné číslo tvořené zleva doprava jejími sousedy. Například* 1324 *je pitoreskní, protože* 3 *dělí* 12 *a* 2 *dělí* 34. *Rozhodněte, zda existuje pitoreskní číslo tvořené všemi číslicemi a)* 1 *až* 8, *b)* 1 *až* 9. (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozhodněte, co je pravda: a) Každý dělitel sudého čísla je sudý. b) Každý dělitel lichého čísla je lichý. c) Sudé číslo dělí pouze sudá čísla. d) Liché číslo dělí pouze lichá čísla.

N2. Najděte všechna čtyřmístná pitoreskní čísla složená z číslic 5, 6, 7, 8.

N3. Zapište všechny číslice 1 až 9 do devítimístného čísla tak, aby každá dvojice po sobě jdoucích číslic (zleva doprava) tvořila násobek sedmi nebo třinácti.

D1. Rozestavte po obvodu kruhu co nejvíce různých číslic tak, aby každá sousední dvojice tvořila ve vhodném pořadí násobek sedmi.

2. *Uvažujme přirozená čísla a, b, c taková, že čísla a, b, c, $a+b$, $b+c$, $c+a$ jsou navzájem různá a součet tří největších z nich je* 75. *Určete největší možnou hodnotu součtu $a+b+c$.* (Patrik Bak)

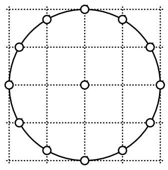
Návodné a doplňující úlohy:

N1. Číslo x je jednomístné, číslo y dvojmístné a číslo z trojmístné. Uspořádejte podle velikosti čísla a) $y+z+z$, $z+x+x$, $x+z+z$, b) $2x+y$, $2y+z$, $2z+y$, $2y+x$.

N2. Pro přirozená čísla x, y platí, že hodnota výrazu $3x+5y$ je menší než 2025 a hodnota $5x+3y$ je menší než 2026. Jaká je největší možná hodnota součtu $x+y$?

D1. Kolik různých výsledků můžeme dostat, sečteme-li každá dvě z daných pěti různých přirozených čísel? Pro každý možný počet uveďte příklad takové pětice čísel.

D2. Na tabuli je napsáno pět navzájem různých kladných čísel. Určete, kolika nejvýše způsoby se z nich dá sestavit dvojice, jejíž součet se rovná některému z pěti čísel napsaných na tabuli.



3. *V síti tvořené čtverci o straně* 1 *je dána kružnice se středem v mřížovém bodě a s poloměrem* 2*. Tato kružnice protíná přímky sítě dohromady ve* 12 *bodech. Dokažte, že těchto* 12 *průsečíků tvoří vrcholy pravidelného* 12*úhelníku.* (Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. V rovnoramenném trojúhelníku KLM je $|\sphericalangle LKM| = 75°$. Na jeho základně LM jsou zvoleny body X, Y tak, že $|\sphericalangle LKX| = 20°$ a $|\sphericalangle YKM| = 20°$. Pomocí vhodné věty o shodnosti trojúhelníků zdůvodněte, že $|LX| = |MY|$.

N2. Najděte pravoúhlý trojúhelník, v němž je poměr velikostí dvou vnitřních úhlů i poměr délek dvou stran roven $1 : 2$.

N3. Vzdálenost bodu T od středu S kružnice k se rovná průměru kružnice. Bodem T vedeme tečny TA, TB, které se kružnice dotýkají v bodech A, B. Určete vnitřní úhly trojúhelníků TSB a ASB.

D1. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu AB v jejím středu S. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCS je shodná s kružnicí k.

D2. V rovině je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| = a < b = |BC|$. Na jeho straně BC existuje bod K a na straně CD bod L tak, že daný obdélník je úsečkami AK, KL a LA rozdělen na čtyři navzájem podobné trojúhelníky. Určete hodnotu poměru $a : b$.

4. *Najděte všechna čtyřmístná čísla* $n = \overline{abcd}$, *pro která platí*

$$\overline{ab} + \overline{cd} = \sqrt{n}, \qquad \overline{cd} - \overline{ab} = 5.$$

(Mária Dományová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Určete dvě čísla, jejichž součet je roven 20 a rozdíl je roven 25.

N2. Zápis trojmístného čísla začíná číslicí 4. Když ji smažeme a napíšeme na konec, dostaneme trojmístné číslo rovné třem čtvrtinám původního čísla. Určete původní číslo.

N3. Najděte všechny trojice (ne nutně různých) číslic a, b, c, pro něž pětimístná čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ jsou v poměru $63 : 36$.

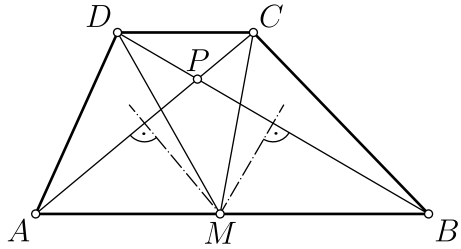
D1. Najděte všechna přirozená čísla s vlastností: Když toto číslo vynásobíme číslem o 1 větším a k výsledku připíšeme zprava 25, dostaneme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla.

D2. Existují dvoumístná čísla $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ taková, že $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$?

D3. Ze tří různých nenulových číslic jsme sestavili všech šest možných trojciferných čísel. Tato čísla jsme seřadili od největšího po nejmenší. Zjistili jsme, že čtvrté číslo v této řadě je aritmetickým průměrem prvního a pátého čísla. Ze kterých číslic byla čísla sestavena?

D4. Najděte největší pětimístné přirozené číslo, které je dělitelné číslem 101 a které se čte zepředu stejně jako zezadu.

5. *Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě P a jejich osy se protínají v bodě M. Předpokládejme, že M leží na základně AB. Dokažte, že P je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDM.* (Jaroslav Švrček)



Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro každý bod na ose úsečky platí, že je od obou krajních bodů úsečky stejně vzdálen. Vyřešte pomocí tohoto poznatku úlohu: Mějme trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, přičemž $|\sphericalangle ABC| = 25°$. Osa strany AB protíná odvěsnu BC v bodě K. Určete velikost úhlu KAC.

N2. V trojúhelníku ABC narýsujeme osu vnitřního úhlu u vrcholu A a její průsečík se stranou BC označíme D. Na straně AB najdeme takový bod M, že $MD \parallel AC$. Dokažte, že pak úsečky AM a DM mají stejnou délku.

N3. V rovnoramenném trojúhelníku ABC je $|AB| = |AC|$ a na rameni AB je bod D takový, že $|AD| = |DC| = |CB|$. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

N4. V lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \| CD$, se osy vnitřních uhlů při vrcholech C a D protínají na úsečce AB. Dokažte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$.

D1. V rovnoběžníku $ABCD$ platí, že osa úhlu ABC prochází středem L strany CD. Dokažte, že $AL \perp BL$.

D2. Uvažujme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se shodnými úhly při vrcholech A a B. Nechť se osy jeho stran BC a AD protínají v bodě M, který leží na straně AB. Dokažte, že $|AC| = |BD|$.

D3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB a D, E středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům APC, CPB. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC je průsečíkem výšek trojúhelníku CDE.

6. *Na pekáči je* 21 *buchet,* 10 *z nich je plněných povidly, zbylých* 11 *tvarohem. Můžeme položit* 10 *otázek. V každé otázce ukážeme na dvě buchty a kuchař nám řekne, jestli mají stejnou náplň, nebo každá jinou. Je možné ptát se tak, abychom o alespoň jedné buchtě s jistotou zjistili, čím je plněná?* (Josef Tkadlec, Felix Schröder)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ze 4 buchet na talíři je 1 tvarohová, zbylé 3 jsou povidlové. Na kolik nejméně otázek zjistíme od našeho kuchaře, která je tvarohová?

N2. Náš kuchař připravil tvarohové a povidlové buchty, 4 jednoho typu, 7 druhého typu. Položili jsme mu 5 otázek na 10 různých buchet a pokaždé zazněla táž odpověď. Jedenáctou buchtu jsme se rozhodli sníst a byla povidlová. Kterých buchet bylo více?

D1. Mach hraje následující hru. Na začátku je na stole k hromádek, na nichž je postupně $1, 2, 3, ..., k$ žetonů. V každém tahu vybere libovolné dvě hromádky a odstraní z obou stejný počet žetonů. Jeho cílem je, aby na stole zůstal jediný žeton. Může se mu to podařit a) pro $k = 10$, b) pro $k = 11$?

D2. Na tabuli byla napsána čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. V každém kroku jsme dvě čísla smazali a nahradili druhou mocninou jejich rozdílu. Pokud po nejvýše 7 krocích zůstala na tabuli všechna čísla stejná, mohla to být čísla a) lichá, b) sudá?

D3. V jednom poli šachovnice 8×8 je napsáno „+" a v ostatních polích „−". V jednom kroku můžeme změnit na opačná zároveň všechna čtyři znaménka v kterémkoli čtverci 2×2 na šachovnici. Rozhodněte, zda po určitém počtu kroků může být na šachovnici obou znamének stejný počet.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Přirozené číslo zapsané navzájem různými číslicemi nazveme* pitoreskní, *když každá jeho vnitřní číslice dělí dvojmístné číslo tvořené zleva doprava jejími sousedy. Například* 1324 *je pitoreskní, protože* 3 *dělí* 12 *a* 2 *dělí* 34. *Rozhodněte, zda existuje pitoreskní číslo tvořené všemi číslicemi a)* 1 *až* 8, *b)* 1 *až* 9. (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozhodněte, co je pravda: a) Každý dělitel sudého čísla je sudý. b) Každý dělitel lichého čísla je lichý. c) Sudé číslo dělí pouze sudá čísla. d) Liché číslo dělí pouze lichá čísla. [a) Ne, 6 má dělitele 3. b) Ano. c) Ano. d) Ne, 3 dělí 6.]

N2. Najděte všechna čtyřmístná pitoreskní čísla složená z číslic 5, 6, 7, 8. [Je to jen 5768.]

N3. Zapište všechny číslice 1 až 9 do devítimístného čísla tak, aby každá dvojice po sobě jdoucích číslic (zleva doprava) tvořila násobek sedmi nebo třinácti. [Pokud si vypíšeme dvojmístné násobky sedmi a třinácti, zjistíme, že zápis žádného z nich kromě 77 nekončí sedmičkou. Proto musí hledané číslo sedmičkou začínat a jediné přípustné pokračování je 784. Pokud zvolíme jako další číslici 9, následuje jedině 135 a poslední dvě číslice lze doplnit pouze v pořadí 26, což dává řešení 784913526. Lze ukázat, že kdybychom za trojčíslím 784 pokračovali číslicí 2, žádné další řešení nedostaneme.]

D1. Rozestavte po obvodu kruhu co nejvíce různých číslic tak, aby každá sousední dvojice tvořila ve vhodném pořadí násobek sedmi. [Umíme rozestavit pět číslic např. v pořadí $1, 2, 4, 8, 9$. Více než pět číslic rozestavit nelze. Vypsáním násobků sedmi se přesvědčíme, že každé dvě sousední číslice musí náležet do stejné množiny z těchto tří: $\{9, 1, 4, 2, 8\}$, $\{3, 5, 6\}$, $\{7, 0\}$.]

2. *Uvažujme přirozená čísla a, b, c taková, že čísla a, b, c, $a+b$, $b+c$, $c+a$ jsou navzájem různá a součet tří největších z nich je* 75. *Určete největší možnou hodnotu součtu $a+b+c$.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

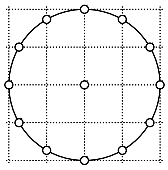
N1. Číslo x je jednomístné, číslo y dvojmístné a číslo z trojmístné. Uspořádejte podle velikosti čísla a) $y+z+z$, $z+x+x$, $x+z+z$, b) $2x+y$, $2y+z$, $2z+y$, $2y+x$. [a) Pokud jsou dva sčítance u dvou součtů shodné, o pořadí rozhoduje třetí sčítanec. Protože $x < y < z$, platí i $z+x+x < x+z+z < y+z+z$. b) Výrazy si lze například opět zapsat jako součet tří sčítanců a dále postupovat jako v části a). Vyjde $2x+y < 2y+x < 2y+z < 2z+y$.]

N2. Pro přirozená čísla x, y platí, že hodnota výrazu $3x+5y$ je menší než 2025 a hodnota $5x+3y$ je menší než 2026. Jaká je největší možná hodnota součtu $x+y$? [Všimneme si, že součet daných dvou výrazů je násobkem $x+y$, tj. $(3x+5y)+(5x+3y) = 8(x+y)$. Víme, že jde o celá čísla, takže $3x+5y \leqq 2024$ a $5x+3y \leqq 2025$, následně platí $8(x+y) \leqq 2024+2025 = 4049$ a $x+y \leqq 506\frac{1}{8}$, tedy $x+y \leqq 506$. Je 506 největší *možná* hodnota součtu? Ano, např. pro $x = y = 253$ obě podmínky ze zadání platí.]

D1. Kolik různých výsledků můžeme dostat, sečteme-li každá dvě z daných pěti různých přirozených čísel? Pro každý možný počet uveďte příklad takové pětice čísel. [B–52–S–3]

D2. Na tabuli je napsáno pět navzájem různých kladných čísel. Určete, kolika nejvýše způsoby se z nich dá sestavit dvojice, jejíž součet se rovná některému z pěti čísel napsaných na tabuli. [B–66–S–1]

3. *V síti tvořené čtverci o straně* 1 *je dána kružnice se středem v mřížovém bodě a s poloměrem* 2. *Tato kružnice protíná přímky sítě dohromady ve* 12 *bodech. Dokažte, že těchto* 12 *průsečíků tvoří vrcholy pravidelného* 12*úhelníku.* (Josef Tkadlec)



Návodné a doplňující úlohy:

N1. V rovnoramenném trojúhelníku KLM je $|\sphericalangle LKM| = 75°$. Na jeho základně LM jsou zvoleny body X, Y tak, že $|\sphericalangle LKX| = 20°$ a $|\sphericalangle YKM| = 20°$. Pomocí vhodné věty o shodnosti trojúhelníků zdůvodněte, že $|LX| = |MY|$. [Rovnoramenný trojúhelník má vnitřní úhly při základně shodné, a tak pro trojúhelníky KLX a KMY je $|\sphericalangle KLX| = |\sphericalangle KMY|$, dále $|KL| = |KM|$ a dle zadání $|\sphericalangle LKX| = |\sphericalangle MKY|$. Jsou tedy shodné podle věty *usu*, a proto $|LX| = |MY|$.]

N2. Najděte pravoúhlý trojúhelník, v němž je poměr velikostí dvou vnitřních úhlů i poměr délek dvou stran roven $1 : 2$. [Trojúhelník s úhly 90°, 45°, 45° nemá strany ve správném poměru. Připadá v úvahu už jen trojúhelník s úhly 90°, 60°, 30°. Označme jeho přeponu AB a prodlužme jeho kratší odvěsnu BC do bodu D tak, že C je středem BD. Trojúhelníky ABC a ADC jsou shodné podle věty *sus*, trojúhelník ABD je rovnostranný, a tak je $2|BC| = |BD| = |AB|$. Hledaný trojúhelník je „polovinou rovnostranného trojúhelníku“.]

N3. Vzdálenost bodu T od středu S kružnice k se rovná průměru kružnice. Bodem T vedeme tečny TA, TB, které se kružnice dotýkají v bodech A, B. Určete vnitřní úhly trojúhelníků TSB a ASB. [Pravoúhlý trojúhelník TSB má poměr stran $|BS| : |TS| = 1 : 2$. Podobně jako v řešení předešlé úlohy jej můžeme doplnit na rovnostranný trojúhelník TSC, kde B je středem SC. Pak $|\sphericalangle TSB| = 60°$ a $|\sphericalangle BTS| = 30°$ a rovnoramenný trojúhelník ASB má vnitřní úhly 120°, 30°, 30°.]

D1. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu AB v jejím středu S. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCS je shodná s kružnicí k. [C–51–S–2]

D2. V rovině je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| = a < b = |BC|$. Na jeho straně BC existuje bod K a na straně CD bod L tak, že daný obdélník je úsečkami AK, KL a LA rozdělen na čtyři navzájem podobné trojúhelníky. Určete hodnotu poměru $a : b$. [C–53–II–1]

4. *Najděte všechna čtyřmístná čísla $n = \overline{abcd}$, pro která platí*

$$\overline{ab} + \overline{cd} = \sqrt{n}, \qquad \overline{cd} - \overline{ab} = 5.$$

(Mária Dományová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Určete dvě čísla, jejichž součet je roven 20 a rozdíl je roven 25. [Hledáme čísla x a y. Podmínky ze zadání zapíšeme jako rovnice $x + y = 20$, $x - y = 25$. Stačí vyjádřit x pomocí y, např. $x = y + 25$ a dosadit do zbývající rovnice $(y + 25) + y = 20$, což dá $2y = -5$, tj. $y = -2{,}5$. Dopočteme $x = 22{,}5$.]

N2. Zápis trojmístného čísla začíná číslicí 4. Když ji smažeme a napíšeme na konec, dostaneme trojmístné číslo rovné třem čtvrtinám původního čísla. Určete původní číslo. [Hodnotu zbývajícího dvojčíslí označíme x. Původní číslo lze vyjádřit jako $400 + x$, po přemístění čtyřky je to $10x + 4$. Rovnice $10x + 4 = \frac{3}{4}(400 + x)$ má řešení $x = 32$ a původní číslo bylo 432.]

N3. Najděte všechny trojice (ne nutně různých) číslic a, b, c, pro něž pětimístná čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ jsou v poměru 63 : 36. [C–63–II–1]

D1. Najděte všechna přirozená čísla s vlastností: Když toto číslo vynásobíme číslem o 1 větším a k výsledku připíšeme zprava 25, dostaneme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla. [Popsaná operace číslu k přiřadí číslo $100k(k + 1) + 25$. To je druhou mocninou přirozeného čísla vždy, neboť $100k(k+1)+25 = 100k^2+100k+ + 25 = (10k + 5)^2$.]

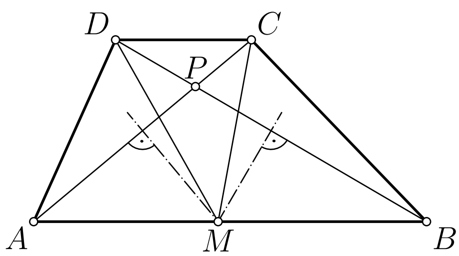
D2. Existují dvoumístná čísla $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ taková, že $\overline{ab}\cdot\overline{cd} = \overline{abcd}$? [Neexistují. Kdyby čísla existovala, platilo by pro ně $\overline{ab}\cdot\overline{cd} = \overline{abcd} = \overline{ab}\cdot 100 + \overline{cd} > \overline{ab}\cdot\overline{cd} + \overline{cd} > \overline{ab}\cdot\overline{cd}$, což je spor.]

D3. Ze tří různých nenulových číslic jsme sestavili všech šest možných trojciferných čísel. Tato čísla jsme seřadili od největšího po nejmenší. Zjistili jsme, že čtvrté číslo v této řadě je aritmetickým průměrem prvního a pátého čísla. Ze kterých číslic byla čísla sestavena? [C–47–II–1]

D4. Najděte největší pětimístné přirozené číslo, které je dělitelné číslem 101 a které se čte zepředu stejně jako zezadu. [B–52–S–1]

5. *Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě P a jejich osy se protínají v bodě M. Předpokládejme, že M leží na základně AB. Dokažte, že P je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDM.*

(Jaroslav Švrček)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Pro každý bod na ose úsečky platí, že je od obou krajních bodů úsečky stejně vzdálen. Vyřešte pomocí tohoto poznatku úlohu: Mějme trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, přičemž $|\sphericalangle ABC| = 25°$. Osa strany AB protíná odvěsnu BC v bodě K. Určete velikost úhlu KAC. [Bod K leží na ose úsečky AB a platí tedy $|AK| = |BK|$. Trojúhelník AKB je pak rovnoramenný a má shodné vnitřní úhly $|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle KBA| = 25°$. Hledaný úhel je $|\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle KAB| = (90° - |\sphericalangle ABC|) - 25° = 40°$.]

N2. V trojúhelníku ABC narýsujeme osu vnitřního úhlu u vrcholu A a její průsečík se stranou BC označíme D. Na straně AB najdeme takový bod M, že $MD \parallel AC$. Dokažte, že pak úsečky AM a DM mají stejnou délku. [Přímka AD je osou úhlu u vrcholu A, takže $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle MAD|$. Kromě toho úhly CAD a MDA jsou střídavé, protože $MD \parallel AC$. Trojúhelník AMD je tudíž rovnoramenný a $|AM| = |DM|$.]

N3. V rovnoramenném trojúhelníku ABC je $|AB| = |AC|$ a na rameni AB je bod D takový, že $|AD| = |DC| = |CB|$. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. [Rovnoramennost budeme překládat do rovnosti úhlů. Označme $|\sphericalangle BAC| = x$. Nejdříve využijeme rovnoramenný trojúhelník ADC, abychom zjistili, že $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DCA| = x$ a vnější úhel BDC je jejich součtem, tj. $|\sphericalangle BDC| = 2x$. Poté využijeme rovnoramenný trojúhelník BDC a zjistíme, že $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle DBC| = 2x$. Nakonec využijeme rovnoramenný trojúhelník ABC a zjistíme, že $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABC| = 2x$. Z téhož trojúhelníku sestavíme rovnici $x + 2x + 2x = 180°$ a vypočteme úhly 36°, 72°, 72°.]

N4. V lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \| CD$, se osy vnitřních uhlů při vrcholech C a D protínají na úsečce AB. Dokažte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$. [C–73–II–2]

D1. V rovnoběžníku $ABCD$ platí, že osa úhlu ABC prochází středem L strany CD. Dokažte, že $AL \perp BL$. [C–71–S–2]

D2. Uvažujme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se shodnými úhly při vrcholech A a B. Nechť se osy jeho stran BC a AD protínají v bodě M, který leží na straně AB. Dokažte, že $|AC| = |BD|$. [Trojúhelníky MBC a MDA jsou rovnoramenné a díky shodnosti úhlů při vrcholech A a B dokonce podobné. Trojúhelníky MBD a MCA se tak shodují nejen ve dvou stranách ($|MB| = |MC|$ a $|MD| = |MA|$), ale i v úhlech u vrcholu M, protože jde o vnější úhly u hlavních vrcholů *podobných* rovnoramenných trojúhelníků. Shodují se tedy i třetí strany trojúhelníků MBD a MCA, což jsou úhlopříčky BD a CA.]

D3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB a D, E středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům APC, CPB. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC je průsečíkem výšek trojúhelníku CDE. [C–58–II–2]

6. *Na pekáči je 21 buchet, 10 z nich je plněných povidly, zbylých 11 tvarohem. Můžeme položit 10 otázek. V každé otázce ukážeme na dvě buchty a kuchař nám řekne, jestli mají stejnou náplň, nebo každá jinou. Je možné ptát se tak, abychom o alespoň jedné buchtě s jistotou zjistili, čím je plněná?* (Josef Tkadlec, Felix Schröder)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ze 4 buchet na talíři je 1 tvarohová, zbylé 3 jsou povidlové. Na kolik nejméně otázek zjistíme od našeho kuchaře, která je tvarohová? [Jsou potřeba dvě otázky. Pokud je první odpověď „stejné“, ukázali jsme na povidlové buchty a zbylé dvě jsou různé. Zeptáme se na jednu povidlovou buchtu znovu a jednu z různých buchet. Pokud je první odpověď „různé“, jsme ve stejné situaci jako v předchozím případě – zbylé dvě buchty jsou povidlové.]

N2. Náš kuchař připravil tvarohové a povidlové buchty, 4 jednoho typu, 7 druhého typu. Položili jsme mu 5 otázek na 10 různých buchet a pokaždé zazněla táž odpověď. Jedenáctou buchtu jsme se rozhodli sníst a byla povidlová. Kterých buchet bylo více? [Povidlových. Nemohlo zaznít 5 odpovědí „různá“, protože to bychom museli mít každého typu alespoň 5 buchet. Zazněly tedy jenom odpovědi „stejná“. Za každou odpověď „stejná“ odložíme buď dvě povidlové buchty, nebo dvě tvarohové buchty. Celkem odložíme 10 z 11 buchet, takže buchty jednoho typu jsme odložili všechny – musel to být sudý počet 4 buchet, protože je odkládáme po dvou. Jedenáctá (snězená) buchta tak musela být jedna ze 7 buchet.]

D1. Mach hraje následující hru. Na začátku je na stole k hromádek, na nichž je postupně $1, 2, 3, \ldots, k$ žetonů. V každém tahu vybere libovolné dvě hromádky a odstraní z obou stejný počet žetonů. Jeho cílem je, aby na stole zůstal jediný žeton. Může se mu to podařit a) pro $k = 10$, b) pro $k = 11$? [C–72–I–4]

D2. Na tabuli byla napsána čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. V každém kroku jsme dvě čísla smazali a nahradili druhou mocninou jejich rozdílu. Pokud po nejvýše 7 krocích zůstala na tabuli všechna čísla stejná, mohla to být čísla a) lichá, b) sudá? [C–72–S–3]

D3. V jednom poli šachovnice 8×8 je napsáno „+“ a v ostatních polích „−“. V jednom kroku můžeme změnit na opačná zároveň všechna čtyři znaménka v kterémkoli čtverci 2×2 na šachovnici. Rozhodněte, zda po určitém počtu kroků může být na šachovnici obou znamének stejný počet. [C–64–II–2]