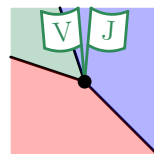


Návodné a doplňující úlohy pro kategorii A

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástinu řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Ostrov je rozdělený na několik království. Území každého království je konvexní mnohoúhelník, který má právě jeden nejsevernější, nejjižnější, nejvýchodnější a nejzápadnější bod. Každý král dostal 4 vlajky s písmeny S, J, V, Z, které umístil do těchto významných bodů svého království. (Například u trojmezí tří států na obrázku jsou takto zapíchnuté 2 vlajky.) Ve vnitrozemí je krtinec, kde se stýká 7 království. Určete všechny možné počty vlajek zapíchnutých do krtince.* (Josef Tkadlec)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Není-li uvedeno jinak, předpokládáme, že království má tvar konvexního mnohoúhelníku.

- N1. Načrtněte konvexní mnohoúhelník, který a) má, b) nemá právě jeden nejvýchodnější bod.
- N2. Uvažujme v rovině body B a C tak, že bod C se nachází severozápadně od bodu B . Najděte všechny polohy bodu A , pro které má trojúhelník s vrcholy A , B , C právě jeden nejvýchodnější bod, a to bod B .
- N3. Načrtněte království, které má v jednom ze svých vrcholů 0, 1, 2, 3 nebo 4 vlajky, nebo rozhodněte, že takové neexistuje.
- N4. Uvnitř ostrova (jako ze zadání soutěžní úlohy) je bod X , ve kterém se stýkají tři království a jsou v něm zapíchnuty právě dvě vlajky. Jaké všechny kombinace písmen se na nich mohou objevit?
- D1. Ukažte, že pokud bychom v soutěžní úloze uvažovali nekonvexní království, mohlo by se stát, že v krtinci nebude zapíchnuta žádná vlajka.
- D2. Uvnitř konvexního desetiúhelníku $A_1A_2 \dots A_{10}$ je dán bod P , který neleží na žádné úhlopříčce. Dokažte, že některé dvě z polopřímek $A_1P, A_2P, \dots, A_{10}P$ protínají stejnou stranu desetiúhelníku.

2. Necht p, q jsou reálná čísla taková, že rovnici

$$|x^2 - 1| = px + q$$

s neznámou x vyhovují právě 4 navzájem různá reálná čísla.

a) Určete všechny možné hodnoty součtu těchto 4 čísel.

b) Dokažte, že součin těchto 4 čísel leží v intervalu $(-3, 1)$. (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte všechna řešení rovnice $|x^2 - 1| = x + 1$.

N2. Určete počet řešení rovnice $|x - 2| = ax$ pro reálný parametr a .

N3. Připomeňte si Viètovy vztahy: Uvažujme kvadratickou rovnici $x^2 + px + q = 0$ s reálnými parametry p, q , která má dva různé reálné kořeny. Vyjádřete jejich součet a součin pomocí koeficientů.

D1. Uvažujme dvě rovnice $x^2 + 2px + 2q^2 = 4$, $x^2 - 2qx + 2p^2 = 4$ s reálnými parametry p a q . Předpokládejme, že první má 2 různé reálné kořeny x_1, x_2 , druhá dva různé reálné kořeny x_3, x_4 . Určete všechny možné hodnoty $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

D2. Určete počet reálných kořenů rovnice $x^2 + 4 = a|x|$ v závislosti na reálném parametru a .

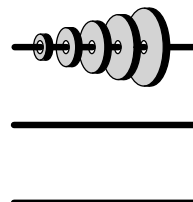
D3. Určete počet reálných kořenů rovnice $x \cdot |x + 6A| = 36$ v závislosti na reálném parametru A .

D4. Určete všechny hodnoty reálného parametru p tak, aby rovnice

$$2017 \cdot |1 - |1 - |1 - x|| = 2016x + p$$

měla právě tři řešení v oboru reálných čísel.

3. Jozef má hlavolam, který se skládá ze tří vodorovných tyčí a z $n \geq 2$ různě velkých kotoučů seřazených na první tyči podle velikosti, viz obrázek. V jednom tahu Jozef vysune z libovolné tyče krajní kotouč (zleva nebo zprava) a nasune jej na jinou tyč ze stejné strany.



Hlavolam je vyřešený, pokud se všechny kotouče nachází na druhé tyči seřazené stejně jako na začátku. V závislosti na n určete nejmenší možný počet tahů, který je potřeba na vyřešení hlavolamu.

(Jozef Rajník)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Uvažujme obdélníkový hrací plán 4×2 a na něm 4 žetony očíslované 1, 2, 3, 4 a rozmístěné jako na obrázku vlevo. V jednom tahu lze přesunout jeden žeton z jeho políčka na políčko sousedící stranou. Nejméně kolika tahy lze z původního rozestavení získat rozestavení na obrázku vpravo? Na jednom políčku se může nacházet i více než jeden žeton.



- N2. Vyřešte předchozí úlohu za předpokladu, že na jednom políčku se najednou nemůže nacházet více než jeden žeton.
- N3. Dokažte, že pro $n = 3$ nelze hlavolam ze soutěžního úlohy vyřešit na 3 tahy.
- D1. Vyřešte úlohu N2 obecně pro herní plán $2n \times 2$ a $2n$ žetonů ve spodním řádku, kde n je kladné celé číslo.
- D2. Uvažujme stejný hlavolam jako v soutěžní úloze s dodatečnými omezeními: kotouče lze vysouvat a nasouvat jen zleva a v každém okamžiku musí být kotouče na každé tyči uspořádány vzestupně podle velikosti zleva doprava. Jedná se vlastně o hlavolam známý pod názvem *Hanojské věže*. V závislosti na kladném celém čísle n určete nejmenší počet tahů nutných k vyřešení tohoto hlavolamu.
- D3. Uvažujme modifikaci Hanojských věží, kde je zakázáno přesouvat kotouče mezi první a třetí tyčí. Kolik nejméně tahů potřebujeme k přesunu všech kotoučů na *třetí* tyč?
- D4. V kruhu je 100 zelených mimozemšťanů, každý z nich má 100 tabletů. V rámci jednoho tahu libovolný mimozemšťan vezme několik svých tabletů a rozdělí je mezi ostatní mimozemšťany (ne nutně rovnoměrně a ne nutně mezi všechny). Po jakém nejmenším počtu tahů mohou mimozemšťané docílit, aby žádní dva z nich neměli stejný počet tabletů?
- D5. Uvažujme šachovnici rozměru 8×8 . Na každém z osmi políček v první řadě je bílá dáma a na každém z osmi políček v osmé řadě je černá dáma. V jednom tahu můžeme pohnout libovolnou dámou podle šachových pravidel (tedy vodorovně, svisle nebo diagonálně) na volné políčko. Tyto tahy opakujeme tak, aby se barvy pohybujících se dam střídaly. Určete nejmenší počet tahů, po kterém budou v první řadě všechny černé a v osmé řadě všechny bílé dámy.
4. Jsou dána nesoudělná přirozená čísla a a b taková, že i čísla $a^3 - 1$ a $b^3 - 1$ jsou nesoudělná. Dokažte, že čísla $a^2 - b$ a $b^2 - a$ jsou rovněž nesoudělná. (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Jsou dána přirozená čísla a, b . Dokažte, že pokud existuje prvočíslo p takové, že $p \mid a + 6$ a $p \mid b - 3$, tak $p \mid a + 2b$.
- N2. Které z následujících dvojic čísel jsou nesoudělné pro všechny dvojice nesoudělných celých čísel a, b ? a) $a, a + b$, b) $a + b, ab$, c) $a^2 + b^2, ab$, d) $a + b, a - b$, e) $a^3, (a + 1)^5$.
- D1. Dokažte, že pro každé celé číslo n je zlomek

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

v základním tvaru.

(IMO 1959, úloha 1)

- D2. Necht a, b, c, n jsou kladná celá čísla taková, že jsou splněny následující podmínky: a) čísla $a, b, c, a + b + c$ jsou po dvou nesoudělná; b) číslo $(a + b + c)(a + b)(b + c)(c + a)(ab + bc + ca)$ je n -tou mocninou celého čísla. Dokažte, že součin abc lze zapsat jako rozdíl dvou n -tých mocnin celých čísel.

5. Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC je dán bod R . Na stranách AB a BC leží po řadě body P a Q tak, že obvod trojúhelníku PQR je nejmenší možný. Podobně na stranách BC a AC leží po řadě body S a T tak, že obvod trojúhelníku RST je nejmenší možný. Přímky PQ a ST se protínají v bodě K . Dokažte, že pokud platí $|\angle BAK| = |\angle CAR|$, pak trojúhelníky PQR a RST mají stejný obvod. (Michal Pecho)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. V rovině je dána přímka ℓ a dva body A, B ležící ve stejné polorovině určené přímkou ℓ . Najděte bod X ležící na přímce ℓ , pro který je hodnota $|AX| + |XB|$ co nejmenší.
- N2. Uvažujme obdélník $ABCD$. Označme M střed strany BC . Uvnitř trojúhelníku ABD je dán bod G . a) Určete bod P strany AD , pro který je délka lomené čáry GPM minimální. b) Určete body P strany AD a Q strany CD , pro které je délka lomené čáry $GPQM$ minimální.
- N3. Uvnitř ostrého úhlu XOY je dán bod A . Najděte body M a N ležící po řadě na polopřímkách OY a OX , pro které je obvod trojúhelníku AMN minimální.
- D1. Je dán úhel XOY , jehož velikost je menší než 45° , a bod A na polopřímce OX . Najděte body M a N polopřímek po řadě OY, OX pro které je součet $|AM| + |MN|$ nejmenší.
- D2. Je dán konvexní úhel XOY a jeho vnitřní bod M . Najděte body A, B po řadě polopřímek OX, OY , přičemž $|OA| = |OB|$, pro které je součet $|MA| + |MB|$ nejmenší.
- D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Pro každý jeho vnitřní bod X označme X_a, X_b, X_c jeho obrazy v osovéch souměrnostech postupně podle přímk BC, CA, AB . Dokažte, že všechny trojúhelníky $X_aX_bX_c$ mají společný bod.
6. Na tabuli jsou napsána 4 přirozená čísla. Žirafa vykonává následující kroky: pokaždé si vybere jedno z čísel na tabuli, smaže ho a místo něj napíše jeho druhou mocninu. Může vždy žirafa po konečně mnoha krocích dosáhnout toho, aby rozdíl některých dvou čísel na tabuli byl násobkem 97? (Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

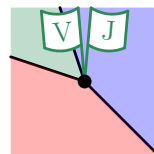
Před řešením této úlohy vám doporučujeme seznámit se s kongruencemi. Zápis $a \equiv b \pmod{d}$ vyjadřuje, že celá čísla a, b dávají stejný zbytek po dělení kladným celým číslem d . Čteme jej *a je kongruentní s b modulo d*. Pro hlubší seznámení s kongruencemi výborně poslouží brožurka [Aloise Apfelbecka Kongruence](#) z edice *Škola mladých matematiků*.

- N1. Vyzkoušejte si soutěžní úlohu pro menší čísla než 97, například pro 5 a 7.
- N2. Necht p je prvočíslo a a celé číslo, které není dělitelné číslem p . Ukažte, že vezmeme-li všechny nenulové zbytky $1, 2, \dots, p-1$ po dělení číslem p , vynásobíme je číslem a a následně opět vezmeme zbytky po dělení číslem p , dostaneme stejnou množinu zbytků jako na začátku.

- N3. Nechť p je prvočíslo a a celé číslo, které není dělitelné číslem p . Ukažte, že existuje právě jeden zbytek b , pro který platí $a \cdot b \equiv 1 \pmod{p}$. (Takový prvek b se nazývá *inverzní prvek k a modulo p* a označujeme jej a^{-1}).
- N4. Dokažte *malou Fermatovu větu*: Nechť p je prvočíslo a a celé číslo, které není dělitelné číslem p . Potom p dělí číslo $a^{p-1} - 1$.
- N5. Nechť p je prvočíslo a a, b, c jsou celá čísla, přičemž p nedělí a . Dokažte, že podmínka $p \mid ax^2 + bx + c$ je splněna nejvýše pro dvě různé hodnoty $x \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.
- N6. Dokažte, že číslo $2^{2025} - 8$ je dělitelné 56.
- D1. Nechť p je liché prvočíslo. Číslo $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ nazýváme *kvadratický zbytek modulo p* , pokud existuje celé číslo x , pro které platí $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Dokažte, že v množině $\{1, 2, \dots, p-1\}$ je stejně mnoho kvadratických zbytků modulo p jako čísel, která nejsou kvadratickým zbytkem modulo p .
- D2. Dokažte jednu část *Wilsonovy věty*: pokud p je prvočíslo, pak $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
- D3. Dokažte, že každá nekonečná posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ celých čísel taková, že platí $a_0 \geq 1$ a $a_{n+1} \in \{2022a_n - 1, 2022a_n + 1\}$ pro všechny indexy n , obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.
- D4. Uvažujme posloupnost $a_1, a_2, \dots$ definovanou vztahem $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ pro $n = 1, 2, \dots$. Určete všechna kladná celá čísla, která jsou nesoudělná s každým členem této posloupnosti.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástinem řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Ostrov je rozdělený na několik království. Území každého království je konvexní mnohoúhelník, který má právě jeden nejsevernější, nejjižnější, nejvýchodnější a nejzápadnější bod. Každý král dostal 4 vlajky s písmeny S, J, V, Z, které umístil do těchto významných bodů svého království. (Například u trojmezí tří států na obrázku jsou takto zapíchnuté 2 vlajky.)*



Ve vnitrozemí je krtinec, kde se stýká 7 království. Určete všechny možné počty vlajek zapíchnutých do krtince. (Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Není-li uvedeno jinak, předpokládáme, že království má tvar konvexního mnohoúhelníku.

- N1. Načrtněte konvexní mnohoúhelník, který a) má, b) nemá právě jeden nejvýchodnější bod. [Konvexní mnohoúhelník má více nejvýchodnějších bodů právě tehdy, pokud některá jeho strana je rovnoběžná s osou y a celý mnohoúhelník se nachází západně od ní.]
- N2. Uvažujme v rovině body B a C tak, že bod C se nachází severozápadně od bodu B . Najděte všechny polohy bodu A , pro které má trojúhelník s vrcholy A , B , C právě jeden nejvýchodnější bod, a to bod B . [Vyhovují právě všechny body, které se nacházejí západně od poledníku procházejícího bodem B a zároveň neleží na přímce BC . Pod poledníkem myslíme přímku ze severu na jih.]
- N3. Načrtněte království, které má v jednom ze svých vrcholů 0, 1, 2, 3 nebo 4 vlajky, nebo rozhodněte, že takové neexistuje. [Daný vrchol nemůže být současně nejjižnějším a nejsevernějším bodem království. Podobně nemůže být současně nejvýchodnějším a nejzápadnějším bodem království. Možné počty jsou tak jen 0, 1, 2 a snadno se ověří, že všechny vyhovují.]
- N4. Uvnitř ostrova (jako ze zadání soutěžní úlohy) je bod X , ve kterém se stýkají tři království a jsou v něm zapíchnuty právě dvě vlajky. Jaké všechny kombinace písmen se na nich mohou objevit? [SV, SZ, JV, JZ. Uvažujme poledník procházející bodem X . Ani jedna strana ani jednoho království neleží na poledníku, protože by neexistoval právě jeden nejzápadnější nebo nejvýchodnější bod. Také se nemůže stát, že všechny tři hranice budou na jedné straně od poledníku, neboť by vzniklo nekonvexní království. Proto na jedné straně od poledníku musí být jedna hranice a na druhé dvě hranice – na této straně bude i vlajka V nebo Z. V bodě X tak musí být zapíchnuta právě jedna z vlajek V, Z a analogicky i právě jedna z vlajek S, J. To nám dává 4 možnosti, jak jsme uvedli na začátku.]
- D1. Ukažte, že pokud bychom v soutěžní úloze uvažovali nekonvexní království, mohlo by se stát, že v krtinci nebude zapíchnuta žádná vlajka. [Každé ze 7 království může být nekonvexní mnohoúhelník tvaru spirály, který má jeden vrchol v krtinci a pak se obtáčí kolem něj. Takto lze zajistit, že každý mnohoúhelník bude mít alespoň jeden svůj bod severně, jižně, východně i západně od krtince. To znamená, že v krtinci nebude ani jedna vlajka.]
- D2. Uvnitř konvexního desetiúhelníku $A_1A_2 \dots A_{10}$ je dán bod P , který neleží na žádné úhlopříčce. Dokažte, že některé dvě z polopřímek $A_1P, A_2P, \dots, A_{10}P$ protínají stejnou stranu desetiúhelníku. [Uvažujme hlavní úhlopříčku A_1A_6 . Ta rozdělí desetiúhelník na dvě části a bod P leží uvnitř jedné z nich. Bez újmy

na obecnosti ať leží uvnitř šestiúhelníku $A_1A_6A_7A_8A_9A_{10}$. Potom 6 polopřímek $A_1P, A_2P, \dots, A_6P$ vstoupí do šestiúhelníku přes stranu A_1A_6 a opustí tento šestiúhelník přes zbývajících 5 stran, takže alespoň dvě polopřímky opustí šestiúhelník přes stejnou stranu. Tyto strany jsou zároveň strany původního desetiúhelníku, takže některé dvě polopřímky protnou stejnou stranu tohoto desetiúhelníku.]

2. Necht p, q jsou reálná čísla taková, že rovnici

$$|x^2 - 1| = px + q$$

s neznámou x vyhovují právě 4 navzájem různá reálná čísla.

a) Určete všechny možné hodnoty součtu těchto 4 čísel.

b) Dokažte, že součin těchto 4 čísel leží v intervalu $(-3, 1)$. (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte všechna řešení rovnice $|x^2 - 1| = x + 1$. [2, 0 a -1. Rozebereme dva případy. Pokud $x^2 \geq 1$, pak $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ a řešíme rovnici $x^2 - x - 2 = 0$, kterou lze upravit do tvaru $(x + 1)(x - 2) = 0$. Získáme tak dva kořeny -1 a 2, pro oba platí $x^2 \geq 1$. Pokud $x^2 < 1$, pak $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$ a řešíme rovnici $x^2 + x = 0$. Získáme další kořen 0, přičemž pro tento kořen skutečně platí $x^2 < 1$, a kořen -1, který nevyhovuje, protože v tomto případě neplatí $x^2 < 1$. Takže původní rovnice má řešení 2, 0 a -1. Díky ekvivalentním úpravám zkouška není nutná.]

N2. Určete počet řešení rovnice $|x - 2| = ax$ pro reálný parametr a . [Pokud $x \geq 2$, pak $|x - 2| = x - 2$, takže řešíme rovnici $x - 2 = ax$, které pro $a \neq 1$ vyhovuje $x = \frac{2}{1-a}$. Má platit $x \geq 2$, což je splněno právě pro $0 \leq a < 1$. Pokud $a = 1$, rovnice $x - 2 = ax$ nemá řešení. Nyní vyřešíme případ $x < 2$, kdy $|x - 2| = 2 - x$, takže řešíme rovnici $2 - x = ax$, které pro $a \neq -1$ vyhovuje $x = \frac{2}{a+1}$. Má platit $x < 2$, což je splněno právě pro $a < -1$ nebo $a > 0$. Pokud $a = -1$, pak rovnice $2 - x = ax$ nemá řešení. Rovnice ze zadání má 2 řešení pro $a \in (0, 1)$, 0 řešení pro $a \in [-1, 0)$ a 1 řešení pro zbývajících hodnoty a .]

N3. Připomeňte si Viètovy vztahy: Uvažujme kvadratickou rovnici $x^2 + px + q = 0$ s reálnými parametry p, q , která má dva různé reálné kořeny. Vyjádřete jejich součet a součin pomocí koeficientů. [Pokud má rovnice dva kořeny x_1 a x_2 , pak platí $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$. Takže součet kořenů splňuje $x_1 + x_2 = -p$ a součin kořenů splňuje $x_1x_2 = q$.]

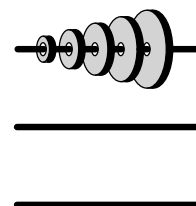
D1. Uvažujme dvě rovnice $x^2 + 2px + 2q^2 = 4$, $x^2 - 2qx + 2p^2 = 4$ s reálnými parametry p a q . Předpokládejme, že první má 2 různé reálné kořeny x_1, x_2 , druhá dva různé reálné kořeny x_3, x_4 . Určete všechny možné hodnoty $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. [Platí $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Z Viètových vztahů $x_1 + x_2 = -2p$ a $x_1x_2 = 2q^2 - 4$. Potom $x_1^2 + x_2^2 = 4p^2 - 4q^2 + 8$. Podobně dostaneme $x_3^2 + x_4^2 = 4q^2 - 4p^2 + 8$. Takže jediná možná hodnota součtu je $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 16$. Její dosažitelnost snadno ověříme pro $p = q = 1$.]

- D2. Určete počet reálných kořenů rovnice $x^2 + 4 = a|x|$ v závislosti na reálném parametru a . [B-71-II-2]
- D3. Určete počet reálných kořenů rovnice $x \cdot |x + 6A| = 36$ v závislosti na reálném parametru A . [B-71-I-4]
- D4. Určete všechny hodnoty reálného parametru p tak, aby rovnice

$$2017 \cdot \left| 1 - |1 - |1 - x|| \right| = 2016x + p$$

měla právě tři řešení v oboru reálných čísel. [B-66-II-4]

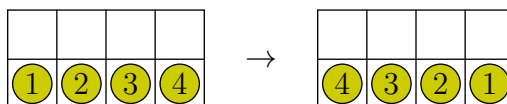
3. Jozef má hlavolam, který se skládá ze tří vodorovných tyčí a z $n \geq 2$ různě velkých kotoučů seřazených na první tyči podle velikosti, viz obrázek. V jednom tahu Jozef vysune z libovolné tyče krajní kotouč (zleva nebo zprava) a nasune jej na jinou tyč ze stejné strany. Hlavolam je vyřešený, pokud se všechny kotouče nachází na druhé tyči seřazené stejně jako na začátku. V závislosti na n určete nejmenší možný počet tahů, který je potřeba na vyřešení hlavolamu.



(Jozef Rajník)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Uvažujme obdélníkový hrací plán 4×2 a na něm 4 žetony očíslované 1, 2, 3, 4 a rozmístěné jako na obrázku vlevo. V jednom tahu lze přesunout jeden žeton z jeho políčka na políčko sousedící stranou. Nejméně kolika tahy lze z původního rozestavení získat rozestavení na obrázku vpravo? Na jednom políčku se může nacházet i více než jeden žeton.



[Žeton 1 potřebujeme posunout o 3 políčka doprava, k čemuž jsou potřeba 3 tahy. Rovněž na žeton 4 potřebujeme alespoň 3 tahy. Žetony 2 a 3 potřebujeme posunout o políčko vedle, tedy na každý z nich potřebujeme alespoň jeden tah. Dohromady tedy potřebujeme alespoň $3 + 1 + 1 + 3 = 8$ tahů. Tohoto počtu tahů lze zjevně dosáhnout.]

- N2. Vyřešte předchozí úlohu za předpokladu, že na jednom políčku se najednou nemůže nacházet více než jeden žeton. [Tahy rozdělíme na *vodorovné* (žeton přesouváme v rámci řádku) a *svislé* (v rámci sloupce). Vodorovných tahů potřebujeme alespoň 8 na základě úvah z předchozího úkolu. Pokud dva žetony neprovedou žádný svislý tah, tak jsou po celou dobu ve spodním řádku, a tedy je neumíme vyměnit. Proto nejvýše jeden žeton provede 0 svislých tahů. Každý ze zbývajících žetonů musí provést svislý tah, dokonce alespoň dva, jelikož se musí vrátit do spodního řádku. Tedy dohromady musí žetony provést alespoň $3 \cdot 2 = 6$ svislých tahů, což celkově dává alespoň $8 + 6 = 14$ tahů. Za 14 tahů umíme hlavolam vyřešit následovně: Nejdříve žetony 2, 3, 4 přesuneme do horního řádku (3 tahy).

Potom přesuneme žeton 1 zcela doprava (3 tahy). Přesuneme žeton 2 dolů a doprava (2 tahy). Žeton 3 přesuneme vlevo, dolů (2 tahy) a žeton 4 vlevo, vlevo, vlevo, dolů (4 tahy).]

- N3. Dokažte, že pro $n = 3$ nelze hlavolam ze soutěžního úlohy vyřešit na 3 tahy. [Každý kotouč musíme přesunout alespoň jednou, čili při třech tazích musí být každý kotouč přesunut právě jednou. Proto alespoň dva kotouče musí být vysunuty z první tyče ze stejné strany. Jelikož je už potom nepřesouváme, tak je musíme nasunout na druhou tyč. Potom ale nebudou na druhé tyči ve správném pořadí.]
- D1. Vyřešte úlohu N2 obecně pro herní plán $2n \times 2$ a $2n$ žetonů ve spodním řádku, kde n je kladné celé číslo. [A-72-I-3]
- D2. Uvažujme stejný hlavolam jako v soutěžní úloze s dodatečnými omezeními: kotouče lze vysouvat a nasouvat jen zleva a v každém okamžiku musí být kotouče na každé tyči uspořádány vzestupně podle velikosti zleva doprava. Jedná se vlastně o hlavolam známý pod názvem *Hanojské věže*. V závislosti na kladném celém čísle n určete nejmenší počet tahů nutných k vyřešení tohoto hlavolamu. [$2^n - 1$. Důkaz matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je třeba $1 = 2^1 - 1$ přesun. Předpokládejme, že pro n kotoučů je nejmenší počet tahů $2^n - 1$. Abychom mohli přesunout největší kotouč na druhou tyč, musí být jako jediný na první tyči a zbývajících n kotoučů musí být na třetí tyči. K jejich přesunu potřebujeme podle indukčního předpokladu $2^n - 1$ tahů. Po přesunutí největšího kotouče na druhou tyč musíme na druhou tyč přesunout ještě zbývajících n kotoučů, na což opět potřebujeme alespoň $2^n - 1$ tahů. Celkově tak třeba alespoň $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ tahů. Konkrétní posloupnost tahů přímo vyplývá ze způsobu získání tohoto odhadu.]
- D3. Uvažujme modifikaci Hanojských věží, kde je zakázáno přesouvat kotouče mezi první a třetí tyčí. Kolik nejméně tahů potřebujeme k přesunu všech kotoučů na třetí tyč? [$3^n - 1$. Naznačíme jen hlavní myšlenku důkazu indukci. Pro přesun $n+1$ kotoučů potřebujeme dvakrát přesunout největší kotouč. Největší kotouč musíme nejprve přesunout na druhou tyč. Proto musíme zbylých n kotoučů přesunout na třetí tyč ($3^n - 1$ tahů). Po přesunu největšího kotouče musíme zbytek přesunout zpět na první tyč (opět $3^n - 1$ tahů), abychom mohli největší kotouč přesunout na třetí tyč. Potom znovu přesuneme zbývajících kotouče na třetí tyč ($3^n - 1$ tahů). Celkově dostáváme alespoň $3 \cdot (3^n - 1) + 2 = 3^{n+1} - 1$ tahů. Konstrukce opět vyplývá z popsání postupu.]
- D4. V kruhu je 100 zelených mimozemšťanů, každý z nich má 100 tabletů. V rámci jednoho tahu libovolný mimozemšťan vezme několik svých tabletů a rozdělí je mezi ostatní mimozemšťany (ne nutně rovnoměrně a ne nutně mezi všechny). Po jakém nejmenším počtu tahů mohou mimozemšťané docílit, aby žádní dva z nich neměli stejný počet tabletů? [KMS 2018/19, 2. letní kolo, úloha 3]
- D5. Uvažujme šachovnici rozměrů 8×8 . Na každém z osmi políček v první řadě je bílá dáma a na každém z osmi políček v osmé řadě je černá dáma. V jednom tahu můžeme pohnout libovolnou dámou podle šachových pravidel (tedy vodorovně, svisle nebo diagonálně) na volné políčko. Tyto tahy opakujeme tak, aby se barvy pohybujících se dam střídaly. Určete nejmenší počet tahů, po kterém budou

v první řadě všechny černé a v osmé řadě všechny bílé dámy. [KMS 2018/19, 2. letní kolo, úloha 7]

4. Jsou dána nesoudělná přirozená čísla a a b taková, že i čísla $a^3 - 1$ a $b^3 - 1$ jsou nesoudělná. Dokažte, že čísla $a^2 - b$ a $b^2 - a$ jsou rovněž nesoudělná. (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Jsou dána přirozená čísla a , b . Dokažte, že pokud existuje prvočíslo p takové, že $p \mid a + 6$ a $p \mid b - 3$, tak $p \mid a + 2b$. [Pokud $p \mid a + 6$ a $p \mid b - 3$, tak $p \mid (a + 6) + 2 \cdot (b - 3) = a + 2b$.]
- N2. Které z následujících dvojic čísel jsou nesoudělné pro všechny dvojice nesoudělných celých čísel a , b ? a) a , $a + b$, b) $a + b$, ab , c) $a^2 + b^2$, ab , d) $a + b$, $a - b$, e) a^3 , $(a + 1)^5$. [Nesoudělné jsou dvojice a), b), c), e). a) Ukážeme to sporem. Necht existuje společný dělitel $d > 1$ takový, že $d \mid a$ a $d \mid a + b$. Potom platí, že d dělí i rozdíl těchto čísel, tj. $d \mid b$, což je spor s nesoudělností a a b . b) Opět postupujeme sporem. Necht existuje prvočíslo p , které dělí $a + b$ i ab . Protože p je prvočíslo, musí platit $p \mid a$ nebo $p \mid b$. Bez újmy na obecnosti necht $p \mid a$. Potom z $p \mid a + b$ nutně plyne, že $p \mid b$, což je spor s nesoudělností čísel a a b . c) Postupujeme podobně jako v části b) s využitím toho, že pokud p je prvočíslo, tak z $p \mid b^2$ vyplývá, že $p \mid b$. d) Čísla $a + b$ a $a - b$ jsou soudělná například pro $a = 3$, $b = 1$, která jsou sama nesoudělná. e) Pro důkaz sporem necht existuje prvočíslo p , které dělí a^3 i $(a + 1)^5$. Jelikož p je prvočíslo a $p \mid a^3$, tak i $p \mid a$. Podobně z $p \mid (a + 1)^5$ plyne $p \mid a + 1$. Ale pak i $p \mid a + 1 - a = 1$, což je spor.]
- D1. Dokažte, že pro každé celé číslo n je zlomek

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

v základním tvaru.

(IMO 1959, úloha 1)

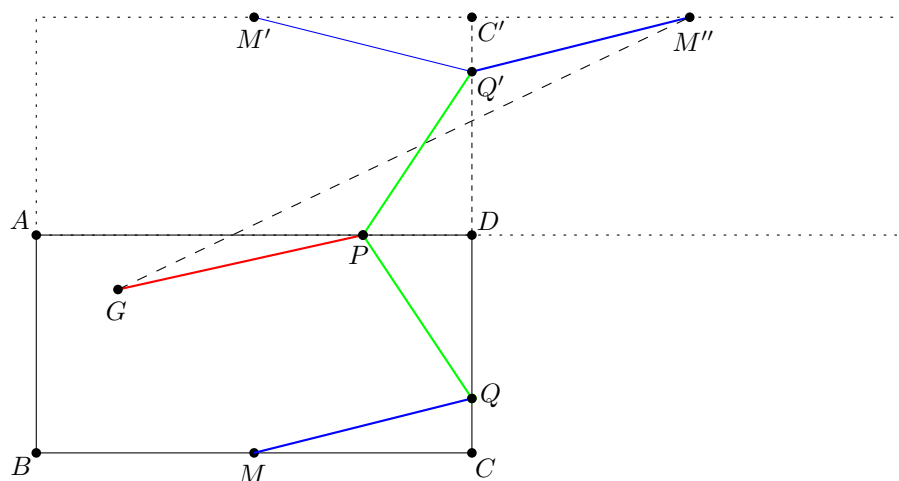
[Pro spor předpokládejme, že existuje prvočíslo p takové, že $p \mid 21n + 4$ a současně $p \mid 14n + 3$. Potom $p \mid 3 \cdot (14n + 3) - 2 \cdot (21n + 4) = 1$, což je ve sporu s tím, že p je prvočíslo.]

- D2. Necht a , b , c , n jsou kladná celá čísla taková, že jsou splněny následující podmínky: a) čísla a , b , c , $a + b + c$ jsou po dvou nesoudělná; b) číslo $(a + b + c)(a + b)(b + c)(c + a)(ab + bc + ca)$ je n -tou mocninou celého čísla. Dokažte, že součin abc lze zapsat jako rozdíl dvou n -tých mocnin celých čísel. [A-68-III-3]

5. Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC je dán bod R . Na stranách AB a BC leží po řadě body P a Q tak, že obvod trojúhelníku PQR je nejmenší možný. Podobně na stranách BC a AC leží po řadě body S a T tak, že obvod trojúhelníku RST je nejmenší možný. Přímky PQ a ST se protínají v bodě K . Dokažte, že pokud platí $|\angle BAK| = |\angle CAR|$, pak trojúhelníky PQR a RST mají stejný obvod. (Michal Pecho)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. V rovině je dána přímka ℓ a dva body A, B ležící ve stejné polorovině určené přímkou ℓ . Najděte bod X ležící na přímce ℓ , pro který je hodnota $|AX| + |XB|$ co nejmenší. [Hledaný bod je průsečíkem přímek AB' a ℓ , kde B' je bod osově souměrný s bodem B podle přímky ℓ . Necht B' je bod osově souměrný s bodem B podle přímky ℓ . Potom pro libovolný bod X přímky ℓ platí ze symetrie $|XB| = |XB'|$. Z trojúhelníkové nerovnosti $|AX| + |XB| = |AX| + |XB'| \geq |AB'|$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když X leží na AB' . Takže hledaný bod X je průsečíkem přímek AB' a ℓ .]
- N2. Uvažujme obdélník $ABCD$. Označme M střed strany BC . Uvnitř trojúhelníku ABD je dán bod G . a) Určete bod P strany AD , pro který je délka lomené čáry GPM minimální. b) Určete body P strany AD a Q strany CD , pro které je délka lomené čáry $GPQM$ minimální. [a) Bod P je průsečíkem GM' s AD , kde M' je bod osově souměrný s M podle přímky AD . Úloha se řeší podobně jako úloha N1. b) Necht $P \in AD$ a $Q \in CD$ jsou libovolné. Označme M', C' a Q' body souměrně sdružené po řadě s M, C a Q podle přímky AD . Ze symetrie platí $|PQ'| = |PQ|$ a $|Q'M'| = |QM|$. Dále necht M'' je bod souměrně sdružený s M' podle CD . Ze symetrie platí $|Q'M'| = |Q'M''|$, protože Q' leží na CD .



Délka lomené čáry $GPQM$ je tak rovna délce lomené čáry $GPQ'M''$, která bude minimální právě tehdy, když P a Q' budou průsečíky přímky GM'' po řadě se stranami AD a CD . Tím jsme sestrojili hledaný bod P a bod Q' . Hledaný bod Q je obrazem bodu Q' v osově souměrnosti podle přímky AD . Z polohy bodu G je patrné, že Q' bude ležet na úsečce $C'D$ a proto bod Q bude ležet na úsečce CD .]

- N3. Uvnitř ostrého úhlu XOY je dán bod A . Najděte body M a N ležící po řadě na polopřímkách OY a OX , pro které je obvod trojúhelníku AMN minimální. [Řešení bude zveřejněno až po termínu odevzdání.]
- D1. Je dán úhel XOY , jehož velikost je menší než 45° , a bod A na polopřímce OX . Najděte body M a N polopřímek po řadě OY, OX pro které je součet $|AM| + |MN|$ nejmenší. [Ať N leží na polopřímce OX libovolně. Dále ať OX' je polopřímka souměrně sdružená s polopřímkou OX podle přímky OY a označme N' bod osově souměrný s N podle přímky OY . Označme d vzdálenost bodu A od přímky OX' . Pak platí $|AM| + |MN| = |AM| + |MN'| \geq d$, přičemž

rovnost nastane právě tehdy, když N' bude kolmým průmětem bodu A do polopřímky OX' a bod M bude ležet na úsečce AN' . Jelikož $|\sphericalangle XOY| < 45^\circ$, platí $|\sphericalangle XOX'| = 2 \cdot |\sphericalangle XOY| < 90^\circ$, takže kolmý průmět bodu A do přímky OX' leží na polopřímce OX' . Hledaný bod M je proto průsečíkem úsečky AN' s polopřímkou OY , kde N' je kolmý průmět bodu A do polopřímky OX' a hledaný bod N je bod osově souměrný s bodem N' podle přímky OY .]

- D2. Je dán konvexní úhel XOY a jeho vnitřní bod M . Najděte body A, B po řadě polopřímek OX, OY , přičemž $|OA| = |OB|$, pro které je součet $|MA| + |MB|$ nejmenší. [Ať α je velikost úhlu XOY . Necht M' je obrazem bodu M v otočení se středem v bodě O o úhel α v kladném směru. Necht A a B jsou body na polopřímkách OX a OY takové, že platí $|OA| = |OB|$. Platí $|\sphericalangle AOM| = \alpha - |\sphericalangle MOB| = |\sphericalangle BOM'|$. Zároveň platí $|OM| = |OM'|$. Trojúhelníky AOM a BOM' jsou tak shodné podle věty *sus*, takže $|AM| = |BM'|$. Tedy $|MA| + |MB| = |M'B| + |BM| \geq |M'M|$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když bod B leží na MM' . Jelikož úhel MOM' je konvexní, úsečka MM' protíná polopřímku OY , přičemž tento průsečík je hledaným bodem B . Hledaný bod A už snadno najdeme jako bod na polopřímce OX takový, že $|OA| = |OB|$.]
- D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Pro každý jeho vnitřní bod X označme X_a, X_b, X_c jeho obrazy v osových souměrnostech postupně podle přímk BC, CA, AB . Dokažte, že všechny trojúhelníky $X_aX_bX_c$ mají společný bod. [A-70-III-6]

6. Na tabuli jsou napsána 4 přirozená čísla. Žirafa vykonává následující kroky: pokaždé si vybere jedno z čísel na tabuli, smaže ho a místo něj napíše jeho druhou mocninu. Může vždy žirafa po konečně mnoha krocích dosáhnout toho, aby rozdíl některých dvou čísel na tabuli byl násobkem 97? (Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Před řešením této úlohy vám doporučujeme seznámit se s kongruencemi. Zápis $a \equiv b \pmod{d}$ vyjadřuje, že celá čísla a, b dávají stejný zbytek po dělení kladným celým číslem d . Čteme jej *a je kongruentní s b modulo d*. Pro hlubší seznámení s kongruencemi výborně poslouží brožurka [Aloise Apfelbecka Kongruence](#) z edice *Škola mladých matematiků*.

- N1. Vyzkoušejte si soutěžní úlohu pro menší čísla než 97, například pro 5 a 7. [Lze ukázat, že pro číslo 7 tvrzení úlohy platí. Pro číslo 5 tvrzení také platí, a dokonce by platilo i kdyby na tabuli byla napsána pouze 3 přirozená čísla.]
- N2. Necht p je prvočíslo a a celé číslo, které není dělitelné číslem p . Ukažte, že vezmeme-li všechny nenulové zbytky $1, 2, \dots, p-1$ po dělení číslem p , vynásobíme je číslem a a následně opět vezmeme zbytky po dělení číslem p , dostaneme stejnou množinu zbytků jako na začátku. [Ukážeme, že zobrazení, které přiřadí zbytku $x \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ zbytek $a \cdot x$ po dělení p , je prosté. Pokud platí $a \cdot x \equiv a \cdot y \pmod{p}$, pak $a(x - y) \equiv 0 \pmod{p}$. Protože a není dělitelné číslem p , musí platit $x - y \equiv 0 \pmod{p}$, tedy $x \equiv y \pmod{p}$. To znamená, že zobrazení, které přiřadí $x \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ zbytek $a \cdot x$ po dělení p , je prosté. A protože x

i zbytek $a \cdot x$ po dělení p jsou prvky množiny $\{1, 2, \dots, p-1\}$, násobení číslem a modulo p jen přeuspořádá tuto množinu.]

- N3. Necht p je prvočíslo a a celé číslo, které není dělitelné číslem p . Ukažte, že existuje právě jeden zbytek b , pro který platí $a \cdot b \equiv 1 \pmod{p}$. (Takový prvek b se nazývá *inverzní prvek k a modulo p* a označujeme jej a^{-1}). [Využijeme úlohu N2 pro a . Jelikož násobením všech nenulových zbytků číslem a dostaneme stejnou množinu zbytků, musí existovat b takové, že $a \cdot b \equiv 1 \pmod{p}$. Jak jsme ukázali v úloze N2, toto zobrazení je prosté, proto je b jednoznačně určeno.]
- N4. Dokažte *malou Fermatovu větu*: Necht p je prvočíslo a a celé číslo, které není dělitelné číslem p . Potom p dělí číslo $a^{p-1} - 1$. [Chceme ukázat, že platí $1 \equiv a^{p-1} \pmod{p}$. S využitím úlohy N2 dostáváme, že platí $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \equiv a \cdot 2a \cdot \dots \cdot (p-1)a \pmod{p}$, takže $(p-1)! \equiv a^{p-1}(p-1)!$. Jelikož $(p-1)!$ není dělitelné p , tak $1 \equiv a^{p-1} \pmod{p}$.]
- N5. Necht p je prvočíslo a a, b, c jsou celá čísla, přičemž p nedělí a . Dokažte, že podmínka $p \mid ax^2 + bx + c$ je splněna nejvýše pro dvě různé hodnoty $x \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. [Pro spor předpokládejme, že podmínka $p \mid ax^2 + bx + c$ je splněna pro tři různé hodnoty $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$, označme je y, z, w . Potom $p \mid ay^2 + by + c$ a $p \mid az^2 + bz + c$, takže $p \mid ay^2 + by + c - (az^2 + bz + c) = a(y-z)(y+z) + b(y-z) = (y-z)(ay + az + b)$. Protože p nedělí $y-z$, musí platit $p \mid ay + az + b$. Analogicky pro y a w dostáváme, že $p \mid ay + aw + b$. Takže $p \mid ay + az + b - (ay + aw + b) = a(z-w)$. Ale p nedělí ani a a ani $z-w$, což je hledaný spor.]
- N6. Dokažte, že číslo $2^{2025} - 8$ je dělitelné 56. [Mocniny dvojky dávají při dělení 56 po řadě zbytky 2, 4, 8, 16, 32, 8, 16, 32, 8, 16, 32, ... Jelikož zbytek následující mocniny je jednoznačně určen zbytkem předešlé mocniny, tak po zbytku 8 se bude opakovat už jen trojice zbytků 8, 16, 32. Jelikož 2025 je dělitelné třemi a každá mocnina s exponentem dělitelným třemi dává zbytek 8, tak $2^{2025} - 8 \equiv 8 - 8 \equiv 0 \pmod{56}$.]
- D1. Necht p je liché prvočíslo. Číslo $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ nazýváme *kvadratický zbytek modulo p* , pokud existuje celé číslo x , pro které platí $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Dokažte, že v množině $\{1, 2, \dots, p-1\}$ je stejně mnoho kvadratických zbytků modulo p jako čísel, která nejsou kvadratickým zbytkem modulo p . [Všimněme si, že $x^2 \equiv y^2$ platí právě tehdy, když $(x-y)(x+y) \equiv x^2 - y^2 \equiv 0$, tedy právě tehdy, když platí $x \equiv y$ nebo $x \equiv -y$. Z toho vyplývá, že mezi $1^2, 2^2, \dots, (p-1)^2$ se nám vyskytne každý kvadratický zbytek právě dvakrát, jednou jako x^2 a jednou jako $(p-x)^2$, pro vhodné x , kde $x < p-x$. Proto se stačí dívat jen na první polovinu, tedy na $1^2, 2^2, \dots, (\frac{p-1}{2})^2$, tyto zbytky jsou modulo p navzájem různé, takže kvadratických zbytků je $\frac{p-1}{2}$, což je právě polovina ze všech nenulových zbytků.]
- D2. Dokažte jednu část *Wilsonovy věty*: pokud p je prvočíslo, pak $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. [Podle úlohy N2 existuje ke každému zbytku a inverzní prvek a^{-1} , tedy zbytek takový, že $a \cdot a^{-1} \equiv 1$. Určíme, kdy platí $a \equiv a^{-1}$. Vynásobením a dostáváme $a^2 \equiv 1$, z toho $(a-1)(a+1) \equiv 0$, takže $a \equiv 1$ nebo $a \equiv -1 \equiv p-1$, protože p je prvočíslo. To znamená, že v množině zbytků $\{1, 2, \dots, p-1\}$ umíme

všechna čísla až na 1 a $p - 1$ uspořádat do dvojic, jejichž součin dává zbytek 1. Proto platí $(p - 1)! \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p - 1) \equiv 1 \cdot (p - 1) \equiv -1$.]

- D3. Dokažte, že každá nekonečná posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ celých čísel taková, že platí $a_0 \geq 1$ a $a_{n+1} \in \{2022a_n - 1, 2022a_n + 1\}$ pro všechny indexy n , obsahuje nekonečně mnoho složených čísel. [A-71-II-4]
- D4. Uvažujme posloupnost $a_1, a_2, \dots$ definovanou vztahem $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ pro $n = 1, 2, \dots$. Určete všechna kladná celá čísla, která jsou nesoudělná s každým členem této posloupnosti. [IMO-2005-P4]