

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

Z5–I–1

Zvláštní kalkulačka má pouze dvě funkční tlačítka. Po stisknutí prvního tlačítka se k číslu na displeji přičte jedna, po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji vynásobí dvěma. Na displeji po každém stisknutí tlačítka svítí správný výsledek.

Najděte dva způsoby, jak pomocí šesti stisknutí tlačítek dostat na displeji z čísla 1 číslo 15. (I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících třech návodných úlohách používáme stejnou kalkulačku jako v soutěžní úloze.

- N1. Na displeji svítilo číslo 1. Pak jsme čtyřikrát stiskli stejné tlačítko. Jaké číslo mohlo být na displeji?
- N2. Kolika způsoby lze dostat na displeji z čísla 1 číslo 4?
- N3. Na displeji svítilo neznámé číslo. Pak jsme čtyřikrát stiskli stejné tlačítko. Jaké mohlo být neznámé číslo, jestliže na displeji nyní svítí číslo a) 15; b) 16?
- D1. Zvláštní kalkulačka funguje jako ta v soutěžní úloze, akorát po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji místo násobení vydělí dvěma. Najděte dva způsoby, jak dostat na displeji z čísla 9 číslo 1.

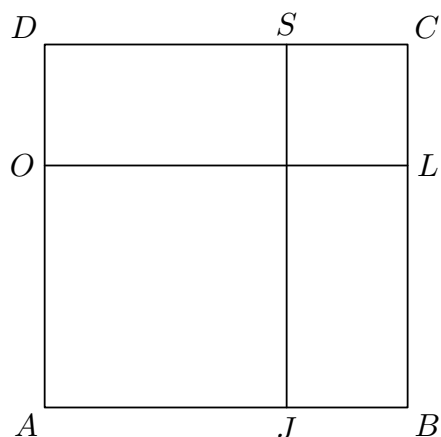
Z5–I–2

U zámku je čtvercový park se stranou délky 240 metrů. Po stranách čtverce vedou cesty, v jeho vrcholech stojí akát, buk, cedr a dub. Park křižují dvě další cesty rovnoběžné s cestami po jeho stranách — jedna vede od javoru ke studánce, druhá vede od lípy k ořechu. Princezna při svých procházkách parkem chodila jen po cestách, nikde se nevracela, ani zbytečně neodbočovala a zjistila, že:

- *procházka od buku ke studánce kolem javoru, akátu, ořechu a dubu je dvakrát delší než kolem lípy a cedru,*
- *procházka od buku ke studánce kolem lípy a cedru je stejně dlouhá jako procházka od dubu k lípě kolem studánky a cedru.*

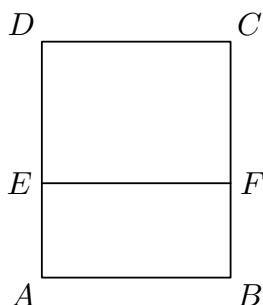
Jak dlouhá je přímá cesta od akátu k ořechu?

(M. Macko)

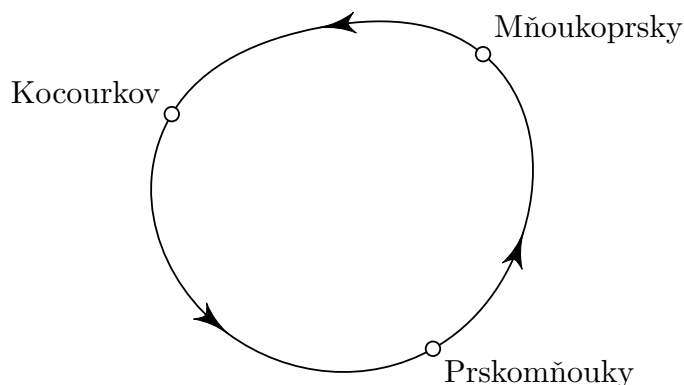


NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Záhon má tvar obdélníku $ABCD$. Přímá cesta z A do B měří 6 metrů. Cesta z A do B přes D a C měří 16 metrů. Jak dlouhá je přímá cesta z B do C ?
- N2. Na obrázku jsou znázorněny cesty, které tvoří hranice dvou obdélníků se společnou stranou. Přímá cesta z A do B měří 8 metrů, nejkratší cesta z A do C měří 18 metrů. Viktor se prochází po cestách z A do C , a to tak, že žádnou část neprojde víc než jednou. Jak dlouhá může být Viktorova procházka?



- N3. Přímá cesta mezi vrcholy K a L obdélníku $KLMN$ je pětkrát kratší než cesta po obvodu z K přes N a M do L . Vyjádřete délku cesty z L přes M do N pomocí délky některé strany obdélníku.
- D1. Jarmila překonala vzdálenost mezi dvěma keři čtyřmi kroky, Lenka stejnou vzdálenost překonala třemi kroky. Přitom krok Lenky byl o 15 cm delší než krok Jarmily. Jak daleko od sebe byly keře?
- D2. Okružní cesta spojuje tři vesnice jako na obrázku. Ve vyznačeném směru to je z Prskomňouk do Kocourkova 10 km, z Mňoukoprska do Prskomňouk 15 km a z Kocourkova do Mňoukoprska 16 km. Jak dlouhá je celá okružní cesta?



Z5–I–3

Danka a Janka každá pro sebe nasbíraly jahody. Kdyby měla Janka o polovinu víc jahod, než nasbírala, měla by jich stejně jako Danka. Kdyby měla Janka dvakrát víc jahod, než nasbírala, měla by jich o 48 víc než Danka.

Kolik jahod nasbírala Janka a kolik Danka?

(M. Dillingerová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Radka a Šárka měly dohromady 60 malin. Radka jich měla dvakrát tolik co Šárka. Kolik malin měla každá z děvčat?

- N2. Bolek a Lolek měli dohromady 60 borůvek. Bolek jich měl a) o polovinu; b) o třetinu méně než Lolek. Kolik borůvek měl každý z chlapců?
- N3. Tereška měla o 30 švestek víc než Žaneta, a ta měla a) dvakrát; b) třikrát; c) čtyřikrát méně švestek než Tereška. Kolik švestek měla Žaneta?
- D1. Filip měl dvakrát tolik třešní co Honza. Honza měl dvakrát tolik třešní co Ivan. Ivan měl o 36 třešní méně než Filip. Kolik třešní měl Honza?

Z5–I–4

Anežka správně vynásobila určité číslo sedmi a výsledné pětimístné číslo napsala na papír. Papoušek Fráňa kus papíru vykloval a první číslice výsledku se tak stala nečitelnou. Na zbytku papíru zůstalo napsáno 2887.

Jaká mohla být první číslice Anežčina výsledku? Najděte všechny možnosti.

(M. Petrová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících úlohách používáme v zápisech čísel písmena velké abecedy pro neznámé číslice.

- N1. Míša si zvolila jednomístné číslo. Zjistila, že když jím vynásobí jakákoliv dvě různá jednomístná čísla, výsledné součiny budou končit jinými číslicemi. Jaké mohlo být Míšino číslo?
- N2. Určete hodnotu číslice A tak, aby číslo tvaru a) $A4$; b) $AA5$ bylo násobkem devíti.
- N3. Když se číslo $A82$ vydělí sedmi, dělení vyjde beze zbytku. Jaká může být číslice A ? Najděte všechna řešení.
- D1. Součin dvojmístných čísel AB a BA je roven 7663. Určete číslice A a B .
- D2. V následujícím algebrogramu zastupují stejná písmena stejné číslice, různá různě. O číslicích označených hvězdičkou nevíme nic bližšího. Nahraďte písmena a hvězdičky číslicemi tak, aby byl výpočet správný.

$$\begin{array}{r}
 ABC \\
 \times \quad AC \\
 \hline
 A * 1 1 \\
 1 1 AB \\
 \hline
 * * B 8 *
 \end{array}$$

- D3. V následujícím algebrogramu zastupují stejná písmena stejné číslice, různá různě. Nahraďte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný.

$$\begin{array}{r}
 AHA \\
 \times \quad TU \\
 \hline
 PTPT \\
 UPU P \\
 \hline
 UTETT
 \end{array}$$

Z5–I–5

Věky sedmi kamarádů jsou 8, 9, 10, 11, 11, 13 a 14 roků. Tři kamarádi jsou zrovna v kině, dva jsou na fotbale a dva doma. Součet věků těch v kině je 30 roků, součet věků těch na fotbale je 24 roků. Každý z kamarádů na fotbale má víc roků než Ondřej, který zůstal doma.

Kolik roků může mít Ondřej? Najděte všechny možnosti.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

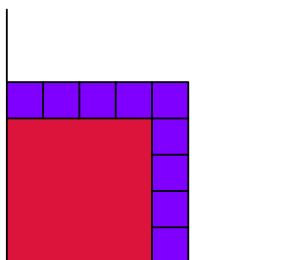
- N1. Z čísel 3, 4, 5, 6, 7 vyberte dvojici, jejíž součet je a) roven devíti; b) menší než devět. Najděte všechny možnosti.
- N2. Z čísel 11, 15, 19, 31, 35 a 39 vytvořte tři dvojice se stejnými součty.
- N3. Z čísel 2, 3, 4, 5 a 6 vyberte dvě dvojice se stejnými součty. Najděte všechny možnosti.
- D1. Z čísel 5, 6, 8, 9, 11 a 13 sestavte dvě trojice se stejnými součty.

Z5–I–6

Čtyři děvčata dláždila čtvercovými dlaždicemi terasu v rohu dvoru. Viola používala dlaždice se stranou 1 dm, Růžena se stranou 2 dm, Blanka se stranou 3 dm a Karmen se stranou 4 dm. První z děvčat položila jednu ze svých dlaždic do rohu. Druhá položila své dlaždice podél volných stran předchozí dlaždice a přidala jednu navíc, aby vznikl čtverec (viz obrázek). Obdobným způsobem položilo své dlaždice třetí a nakonec i čtvrté děvče. Takto vznikla čtvercová terasa bez mezer a překryvů.

V jakém pořadí mohla děvčata pokládat dlaždice a kolik dlaždic celkem použila? Najděte všechny možnosti.

(M. Macko)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících úlohách lemem obdélníku nebo čtverce rozumíme souvislý stejně široký pás, který jej obklopuje. Lem vztažený jen k některým stranám obdélníku nebo čtverce je zbylými stranami omezen obdobně jako fialový lem kolem dvou stran karmínového čtverce na obrázku v soutěžní úloze.

- N1. Kolem čtvercové dlaždice se stranou 5 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 1 dm. Kolik dlaždic je na lem potřeba?
- N2. Kolem dvou sousedních stran čtvercové dlaždice se stranou 6 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 2 dm. Kolem tohoto lemu vytvořte ještě jeden lem ze čtvercových dlaždic se stranou 4 dm. Je to možné? Pokud ano, kolik dlaždic je na oba lemy potřeba?
- N3. Kolem tří stran čtvercové dlaždice se stranou 6 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 3 dm. Kolem tohoto lemu vytvořte ještě jeden lem ze čtvercových dlaždic se stranou 5 dm. Je to možné? Pokud ano, kolik celkem dlaždic je na oba lemy potřeba?

- D1. Kolem tří stran obdélníkové dlaždice se stranami 12 dm a 15 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic s velikostí strany vyjádřenou v dm celým číslem. Kolik dlaždic je na lem potřeba? Najděte všechny možnosti.

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Do rohových políček tabulky 3×3 jsou vepsána čísla jako na obrázku:

3		6
12		15

Do prázdných políček doplňte kladná celá čísla tak, aby součin čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný. Najděte všechny možnosti. (J. Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. V následující tabulce jsou a , b , c kladná celá čísla taková, že hodnoty v sousedních políčkách se rovnají. Najděte tři nejmenší řešení.

$5a$	$7b$	$8c$
------	------	------

N2. V následující tabulce jsou a , b , c kladná celá čísla taková, že hodnoty v sousedních políčkách se rovnají. Najděte tři nejmenší řešení.

$20a$	$21b$	$12c$
-------	-------	-------

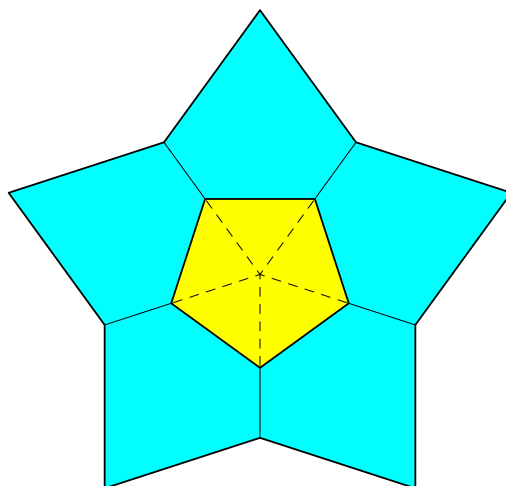
N3. Pro kladná sudá čísla a , b , c platí, že součiny $a \cdot b$ a $b \cdot c$ se rovnají a součin $a \cdot b \cdot c$ je dvojmístný a větší než 75. Jaký může být součet těchto tří čísel? Najděte všechny možnosti.

D1. Obdélník je třemi úsečkami rozdělen na tři čtverce a tři menší obdélníky. Všechny dílčí pravoúhelníky mají délky všech stran v cm vyjádřeny celými čísly. Obsah jednoho z malých obdélníků je 14 cm^2 . Jaký může být obsah daného obdélníku? Najděte všechny možnosti.

Z9–I–2

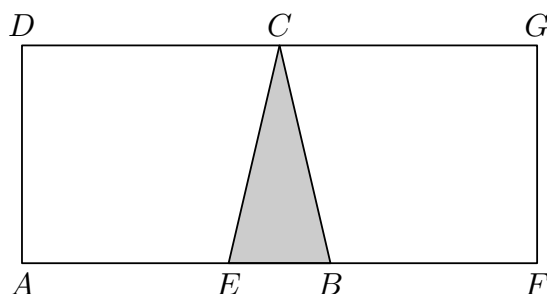
Útvar na obrázku je vytvořen z pěti shodných azurových kosočtverců a jednoho žlutého pravidelného pětiúhelníku, který kosočtverce částečně překrývá. Kosočtverce sousedí celými stranami a na nich leží vrcholy pětiúhelníku. Poměr velikostí poloměru kružnice opsané pětiúhelníku a strany kosočtverce je $4 : 7$.

Rozhodněte, zda nepřekrytá část každého kosočtverce má větší, stejný, nebo menší obsah než pětiúhelník. (M. Dományová)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu délky 24 cm. Na straně BC jsou body K a L tak, že $|BK| = |KL| = |LC|$. Na straně AC jsou body M a N tak, že $|AM| = |MN| = |NC|$. Určete postupný poměr obsahů lichoběžníků $ABKM$, $MKLN$ a trojúhelníku NLC . Zkuste úlohu řešit i bez znalosti délky strany trojúhelníku ABC .
- N2. Dva shodné pravoúhlé lichoběžníky $ABCD$ a $FECG$ se překrývají v trojúhelníku EBC . Obsah trojúhelníku EBC tvoří 18 % obsahu lichoběžníku $ABCD$. Určete poměr délek úseček AB a CD .



- N3. Na stranách AB , BC , CD a DA kosočtverce $ABCD$ jsou postupně dány body E , F , G a H tak, že platí $|AE| : |EB| = |CG| : |GD| = 1 : 4$ a $|BF| : |FC| = |DH| : |HA| = 3 : 2$. Bod P je průsečíkem přímek EG a HF . Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $AEPH$ a $EBFP$.
- D1. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami $|AB| = 12$ cm, $|CD| = 4$ cm a výškou 6 cm. Na ramenech AD , BC leží body E , F tak, že lichoběžníky $ABFE$ a $EFCD$ mají stejný obsah. Vypočítejte délku úsečky EF .

Z9–I–3

Na tabuli je napsáno několik po sobě jdoucích přirozených čísel počínaje jedničkou. Každé z těchto čísel má buď azurovou, nebo žlutou barvu. Součet každých dvou různobarevných čísel je prvočíslem, součet každých dvou stejnobarevných čísel je složeným číslem. Kolik nejvíce čísel může být napsáno na tabuli? (P. Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Seznamte se s metodou Eratosthenova síta a najděte pomocí něj všechna prvočísla menší než 100.

- N2. Obarvěte čísla 1, 2 a 3 podle pravidel ze soutěžní úlohy.
- N3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel menších než 6, jejichž součty jsou složená čísla.
- D1. Leonardo si vypisoval členy Fibonacciho posloupnosti: Začal dvěma jedničkami, k nim připsal jejich součet a v každém dalším kroku doplnil součet předchozích dvou čísel. Několik prvních členů vypadalo takto: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Ukažte, že číslo na 9999. místě je složené.

Z9–I–4

Přirozené číslo se nazývá čtverečkové, pokud jeho zápis obsahuje číslici nebo skupinu po sobě jdoucích číslic, jež jsou zápisem druhé mocniny kladného celého čísla. (Např. čísla 257 a 725 jsou čtverečková, čísla 275 a 572 nikoli.)

Určete počet všech dvojmístných čtverečkových čísel.

(M. Dillingerová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Najděte:

- nejmenší trojmístné čtverečkové číslo;
- stoprvní trojmístné čtverečkové číslo;
- stotřicáté trojmístné čtverečkové číslo.

N2. Kolik trojmístných čtverečkových čísel začíná číslicí 7 a obsahuje číslici 5?

N3. Přirozené číslo nazveme *patrojkové*, jestliže obsahuje číslici 3, ale není dělitelné třemi. Najděte deset nejmenších patrojkových čísel.

D1. Přirozené číslo nazveme *supersloženým*, pokud jeho zápis obsahuje právě dvě číslice, z nichž každá představuje jednomístné složené číslo. (Např. číslo 144 je supersložené, číslo 124 nikoli.) Kolik je trojmístných supersložených čísel?

Z9–I–5

V lyžařském oddíle se počet všech dětí snížil o 10 %, přitom poměr děvčat vůči všem dětem vzrostl z 50 % na 55 %.

O kolik procent se změnil počet děvčat?

(I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Janečkovi natrhali 30 kg třešní. Z 30 % třešní vyrobili šťávu, polovinu zbylých třešní zpracovali na marmeládu. Nový zbytek rozdělili na tři stejné díly, dva díly usušili a jeden díl snědli. Kolik procent všech třešní Janečkovi usušili?

N2. Ve firmě pije 45 % zaměstnanců čaj, ostatní pijí kávu. Kávu sladí o polovinu víc zaměstnanců než je těch, kteří ji nesladí. Kolik procent všech zaměstnanců pije hořkou kávu?

N3. V učitelském sboru je p vyučujících, z toho $(100 - p) %$ tvoří ženy a mužů je 36. Kolik vyučujících je ve sboru?

D1. V pytlíku byly rohlíky, z nichž 80 % bylo s kmínem, ostatní s mákem. Po snědení dvou rohlíků s kmínem tvořil tento druh rohlíků 75 % všech. Kolik rohlíků bylo s mákem?

Z9–I–6

Kružnice k a l se zvnějšku dotýkají a poloměr kružnice k je stejný jako průměr kružnice l . Bod S je středem kružnice k , bod T je bodem dotyku kružnic, bod A leží na kružnici l mimo spojnicí středů kružnic a bod M je středem úsečky AS .

Dokažte, že úhel ATM je pravý.

(L. Komín)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Připomeňte si a zformulujte Thaletovu větu.
- N2. V obecném trojúhelníku ABC značí D a E paty výšek na strany BC a AC . Dokažte, že body A , B , D a E leží na jedné kružnici.
- N3. Na kružnici k se středem S jsou dány navzájem různé body A , B , C , D tak, že platí $S \in AC$ a $BS \parallel AD$. Dokažte, že tečna ke kružnici k s bodem dotyku B je rovnoběžná s přímkou CD .
- D1. Kružnice k a l se protínají v různých bodech A a B . Body C a D jsou krajními body průměrů kružnic k a l procházejících společným bodem A . Dokažte, že body B , C a D leží na jedné přímce.