Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

Z5–I–1

Zvláštní kalkulačka má pouze dvě funkční tlačítka. Po stisknutí prvního tlačítka se k číslu na displeji přičte jedna, po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji vynásobí dvěma. Na displeji po každém stisknutí tlačítka svítí správný výsledek.

Najděte dva způsoby, jak pomocí šesti stisknutí tlačítek dostat na displeji z čísla 1 číslo 15. *(I. Jančigová)*

Návodné a doplňující úlohy

V následujících třech návodných úlohách používáme stejnou kalkulačku jako v soutěžní úloze.

N1. Na displeji svítilo číslo 1. Pak jsme čtyřikrát stiskli stejné tlačítko. Jaké číslo mohlo být na displeji?

[Buď 5 (při užití prvního tlačítka), nebo 16 (při užití druhého tlačítka).]

N2. Kolika způsoby lze dostat na displeji z čísla 1 číslo 4?

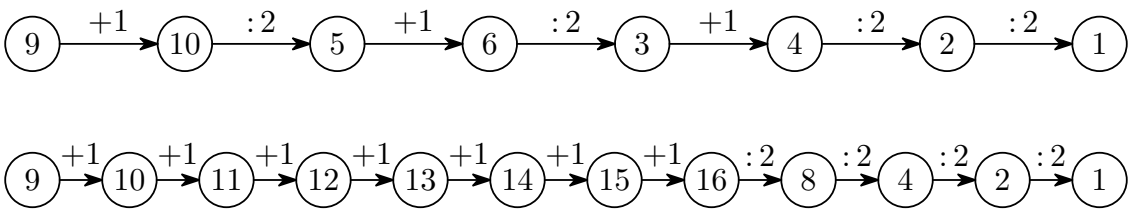
[Jde to čtyřmi způsoby: $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$, $1 \cdot 2 + 1 + 1 = 4$, $(1 + 1) \cdot 2 = 4$, $1 + 1 + 1 + 1 = 4$.]

N3. Na displeji svítilo neznámé číslo. Pak jsme čtyřikrát stiskli stejné tlačítko. Jaké mohlo být neznámé číslo, jestliže na displeji nyní svítí číslo a) 15; b) 16?

[a) Jedině 11 ($11 + 1 + 1 + 1 + 1 = 15$). b) Buď 1 ($1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$), nebo 12 ($12 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16$).]

D1. Zvláštní kalkulačka funguje jako ta v soutěžní úloze, akorát po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji místo násobení vydělí dvěma. Najděte dva způsoby, jak dostat na displeji z čísla 9 číslo 1.

[Možná řešení jsou znázorněna pomocí tzv. početního hada na obrázku níže. Úloha má nekonečně mnoho řešení, viz např. opakování nápadu $(1 + 1) : 2 = 1$.]

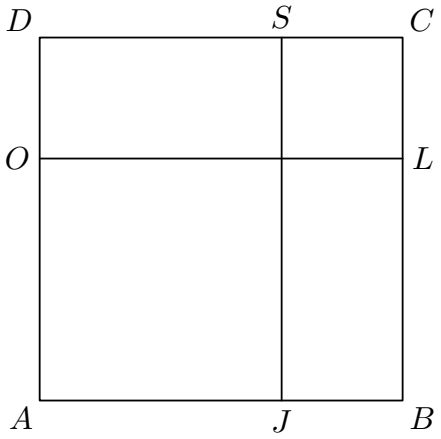


Z5–I–2

U zámku je čtvercový park se stranou délky 240 metrů. Po stranách čtverce vedou cesty, v jeho vrcholech stojí akát, buk, cedr a dub. Park křižují dvě další cesty rovnoběžné s cestami po jeho stranách — jedna vede od javoru ke studánce, druhá vede od lípy k ořechu. Princezna při svých procházkách parkem chodila jen po cestách, nikde se nevracela, ani zbytečně neodbočovala a zjistila, že:

- *procházka od buku ke studánce kolem javoru, akátu, ořechu a dubu je dvakrát delší než kolem lípy a cedru,*
- *procházka od buku ke studánce kolem lípy a cedru je stejně dlouhá jako procházka od dubu k lípě kolem studánky a cedru.*

Jak dlouhá je přímá cesta od akátu k ořechu? *(M. Macko)*

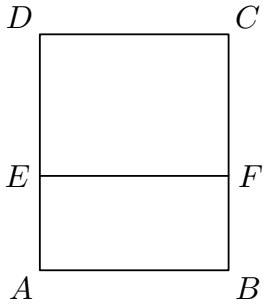


Návodné a doplňující úlohy

N1. Záhon má tvar obdélníku $ABCD$. Přímá cesta z A do B měří 6 metrů. Cesta z A do B přes D a C měří 16 metrů. Jak dlouhá je přímá cesta z B do C?

[Rozdíl délek cest A–D–C–B a A–B je $16 - 6 = 10$ metrů. To odpovídá součtu délek stran AD a BC, které jsou stejné. Přímá cesta z B do C je dlouhá $10 : 2 = 5$ metrů.]

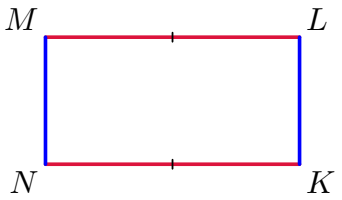
N2. Na obrázku jsou znázorněny cesty, které tvoří hranice dvou obdélníků se společnou stranou. Přímá cesta z A do B měří 8 metrů, nejkratší cesta z A do C měří 18 metrů. Viktor se prochází po cestách z A do C, a to tak, že žádnou část neprojde víc než jednou. Jak dlouhá může být Viktorova procházka?



[Nejkratší procházka je buď A–B–F–C, nebo A–E–F–C, nebo A–E–D–C a je dlouhá 18 metrů. Protože $|AB| = 8$ metrů, je $|BC| = |AD| = 10$ metrů. Jediná další možná procházka je A–B–F–E–D–C a je dlouhá $3 \cdot 8 + 10 = 34$ metrů.]

N3. Přímá cesta mezi vrcholy K a L obdélníku $KLMN$ je pětkrát kratší než cesta po obvodu z K přes N a M do L. Vyjádřete délku cesty z L přes M do N pomocí délky některé strany obdélníku.

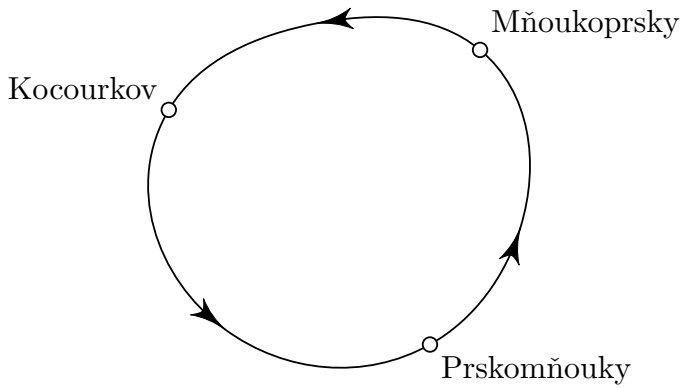
[Stejně dlouhé strany obdélníku zvýrazníme stejnými barvami, viz obrázek. Součet délek dvou červených a jedné modré úsečky je pětkrát větší než délka modré úsečky ($2č + m = 5m$). Tedy červená úsečka je dvakrát delší než modrá ($č = 2m$). Cesta L–M–N je stejně dlouhá jako tři modré nebo jedna a půl červené strany obdélníku ($č + m = 3m = \frac{3}{2}č$).]



D1. Jarmila překonala vzdálenost mezi dvěma keři čtyřmi kroky, Lenka stejnou vzdálenost překonala třemi kroky. Přitom krok Lenky byl o 15 cm delší než krok Jarmily. Jak daleko od sebe byly keře?

[Po třech krocích je Lenka o $3 \cdot 15 = 45$ cm dál než Jarmila. Tedy délka Jarmilina kroku je 45 cm a vzdálenost keřů je $4 \cdot 45 = 180$ cm.]

D2. Okružní cesta spojuje tři vesnice jako na obrázku. Ve vyznačeném směru to je z Prskomňouk do Kocourkova 10 km, z Mňoukoprsk do Prskomňouk 15 km a z Kocourkova do Mňoukoprsk 16 km. Jak dlouhá je celá okružní cesta?



[Součet popsaných vzdáleností mezi vesnicemi odpovídá dvěma délkám okružní cesty, tj. $10 + 15 + 16 = 41$ km. Délka okružní cesty je poloviční, tedy 20 km a 500 m.*]

* Převzato ze 74. ročníku MO, úloha **Z5–II–2**.

Z5–I–3

Danka a Janka každá pro sebe nasbíraly jahody. Kdyby měla Janka o polovinu víc jahod, než nasbírala, měla by jich stejně jako Danka. Kdyby měla Janka dvakrát víc jahod, než nasbírala, měla by jich o 48 víc než Danka.

Kolik jahod nasbírala Janka a kolik Danka? *(M. Dillingerová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Radka a Šárka měly dohromady 60 malin. Radka jich měla dvakrát tolik co Šárka. Kolik malin měla každá z děvčat?

[Dohromady měly trojnásobek toho, co měla Šárka. Šárka měla 20 malin, Radka 40.]

N2. Bolek a Lolek měli dohromady 60 borůvek. Bolek jich měl a) o polovinu; b) o třetinu méně než Lolek. Kolik borůvek měl každý z chlapců?

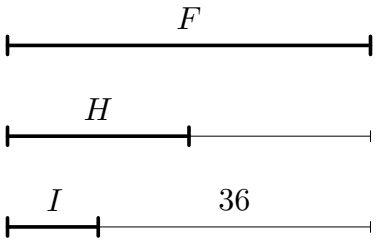
[a) Dohromady měli 3/2 toho, co měl Lolek. Lolek měl 40 borůvek, Bolek 20. b) Dohromady měli 5/3 toho, co měl Lolek. Lolek měl 36 borůvek, Bolek 24.]

N3. Terezka měla o 30 švestek víc než Žaneta, a ta měla a) dvakrát; b) třikrát; c) čtyřikrát méně švestek než Terezka. Kolik švestek měla Žaneta?

[30 švestek odpovídá a) počtu; b) dvojnásobku; c) trojnásobku Žanetiných švestek. Žaneta měla a) 30; b) 15; c) 10 švestek.]

D1. Filip měl dvakrát tolik třešní co Honza. Honza měl dvakrát tolik třešní co Ivan. Ivan měl o 36 třešní méně než Filip. Kolik třešní měl Honza?

[Filip měl čtyřikrát tolik třešní co Ivan. Tedy 36 třešní odpovídá trojnásobku Ivanových třešní. Ivan měl 12 třešní, Honza jich měl 24. Pro přehlednost si lze pomoct úsečkami jako na obrázku níže.]



Z5–I–4

Anežka správně vynásobila určité číslo sedmi a výsledné pětimístné číslo napsala na papír. Papoušek Fráňa kus papíru vykloval a první číslice výsledku se tak stala nečitelnou. Na zbytku papíru zůstalo napsáno 2887.

Jaká mohla být první číslice Anežčina výsledku? Najděte všechny možnosti.

(M. Petrová)

Návodné a doplňující úlohy

V následujících úlohách používáme v zápisech čísel písmena velké abecedy pro neznámé číslice.

N1. Míša si zvolila jednomístné číslo. Zjistila, že když jím vynásobí jakákoliv dvě různá jednomístná čísla, výsledné součiny budou končit jinými číslicemi. Jaké mohlo být Míšino číslo?

[Stačí projít výsledky malé násobilky. Míšino číslo mohlo být 1, 3, 7, nebo 9.]

N2. Určete hodnotu číslice A tak, aby číslo tvaru a) $A4$; b) $AA5$ bylo násobkem devíti.

[a) Dvojmístným násobkem devíti končícím 4 je pouze číslo 54, tedy $A = 5$. b) Trojmístných násobků devíti končících 5 je deset, ale jen u čísla 225 se opakuje číslice na prvních dvou místech. Tedy $A = 2$.]

N3. Když se číslo $A82$ vydělí sedmi, dělení vyjde beze zbytku. Jaká může být číslice A? Najděte všechna řešení.

[Poslední číslice podílu musí být 6, protože pouze součin $6 \cdot 7 = 42$ končí číslicí 2. Pak také dělení $(A82 - 42) : 7 = A40 : 7$ musí vyjít beze zbytku. Tedy číslice A je buď 1, nebo 8.]

D1. Součin dvojmístných čísel AB a BA je roven 7663. Určete číslice A a B.

[Součin končí číslicí 3, tedy číslice A a B jsou buď 1 a 3, nebo 7 a 9. V prvním případě vychází $13 \cdot 31 = 403$, ve druhém vychází $79 \cdot 97 = 7663$. Číslice A a B jsou 7 a 9.]

D2. V následujícím algebrogramu zastupují stejná písmena stejné číslice, různá různé. O číslicích označených hvězdičkou nevíme nic bližšího. Nahraďte písmena a hvězdičky číslicemi tak, aby byl výpočet správný.

$$\begin{array}{r}
A\,B\,C \\
\times \quad A\,C \\
\hline
A\,*\,1\,1 \\
1\,1\,A\,B \\
\hline
\,\,B\,8\,*
\end{array}$$

[Výsledek na posledním řádku: Hvězdička na místě jednotek je 1 a z počítání na místě desítek plyne $B = 7$. Mezivýsledek na třetím řádku: Z hodnoty na místě jednotek plyne buď $C = 1$, nebo $C = 9$. Pro $C = 1$ na místě desítek vychází 7, což nevyhovuje. Pro $C = 9$ na místě desítek vychází 1, což vyhovuje. Mezivýsledek na čtvrtém řádku končí 7, a to je poslední číslice součinu $9 \cdot A$. Tedy $A = 3$ a algebrogram je dořešen níže.]

$$\begin{array}{r}
3\,7\,9 \\
\times \quad 3\,9 \\
\hline
3\,4\,1\,1 \\
1\,1\,3\,7 \\
\hline
1\,4\,7\,8\,1
\end{array}$$

D3. V následujícím algebrogramu zastupují stejná písmena stejné číslice, různá různé. Nahraďte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný.

$$\begin{array}{r} A\,H\,A \\ \times \quad T\,U \\ \hline P\,T\,P\,T \\ U\,P\,U\,P \\ \hline U\,T\,E\,T\,T \end{array}$$

[Z tvaru mezivýsledků na třetím a čtvrtém řádku plyne $H = 0$. Z prvních dvou číslic ve výsledku na posledním řádku plyne, že P je menší než 5 a T je sudé. Mezivýsledek na čtvrtém řádku končí P, a to je poslední číslice součinu $A \cdot T$, tedy také P je sudé. Proto je buď $P = 2$ a $T = 4$, nebo $P = 4$ a $T = 8$. První možnost vede k řešení níže, druhá nevyhovuje.]

$$\begin{array}{r} 8\,0\,8 \\ \times \quad 4\,3 \\ \hline 2\,4\,2\,4 \\ 3\,2\,3\,2 \\ \hline 3\,4\,7\,4\,4 \end{array}$$

Z5–I–5

Věky sedmi kamarádů jsou 8, 9, 10, 11, 11, 13 a 14 roků. Tři kamarádi jsou zrovna v kině, dva jsou na fotbale a dva doma. Součet věků těch v kině je 30 roků, součet věků těch na fotbale je 24 roků. Každý z kamarádů na fotbale má víc roků než Ondřej, který zůstal doma.

Kolik roků může mít Ondřej? Najděte všechny možnosti. *(M. Macko)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Z čísel 3, 4, 5, 6, 7 vyberte dvojici, jejíž součet je a) roven devíti; b) menší než devět. Najděte všechny možnosti.

[a) Buď dvojice 3 a 6, nebo 4 a 5. b) Buď dvojice 3 a 4, nebo 3 a 5.]

N2. Z čísel 11, 15, 19, 31, 35 a 39 vytvořte tři dvojice se stejnými součty.

[Součet všech čísel je 150, tedy součet čísel v jedné dvojici má být 50. Řešení odpovídá dvojicím sčítanců $11 + 39 = 19 + 31 = 15 + 35$.]

N3. Z čísel 2, 3, 4, 5 a 6 vyberte dvě dvojice se stejnými součty. Najděte všechny možnosti.

[Čísel je pět, tedy jedno se při tvorbě dvojic vynechá. Tři čísla jsou sudá a dvě lichá, tedy nelze vynechat liché číslo. Řešení odpovídá dvojicím sčítanců $3+6 = 4+5$, nebo $3+5 = 2+6$, nebo $2 + 5 = 3 + 4$.]

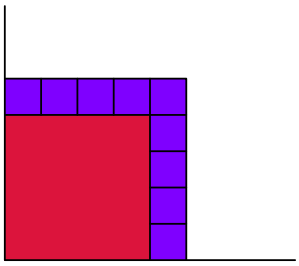
D1. Z čísel 5, 6, 8, 9, 11 a 13 sestavte dvě trojice se stejnými součty.

[Součet všech čísel je 52, tedy součet čísel v jedné trojici má být 26. Řešení odpovídá trojicím sčítanců $5 + 8 + 13 = 6 + 9 + 11$.]

Z5–I–6

Čtyři děvčata dláždila čtvercovými dlaždicemi terasu v rohu dvoru. Viola používala dlaždice se stranou 1 dm, Růžena se stranou 2 dm, Blanka se stranou 3 dm a Karmen se stranou 4 dm. První z děvčat položila jednu ze svých dlaždic do rohu. Druhá položila své dlaždice podél volných stran předchozí dlaždice a přidala jednu navíc, aby vznikl čtverec (viz obrázek). Obdobným způsobem položilo své dlaždice třetí a nakonec i čtvrté děvče. Takto vznikla čtvercová terasa bez mezer a překryvů.

V jakém pořadí mohla děvčata pokládat dlaždice a kolik dlaždic celkem použila? Najděte všechny možnosti. *(M. Macko)*



Návodné a doplňující úlohy

V následujících úlohách lemem obdélníku nebo čtverce rozumíme souvislý stejně široký pás, který jej obklopuje. Lem vztažený jen k některým stranám obdélníku nebo čtverce je zbylými stranami omezen obdobně jako fialový lem kolem dvou stran karmínového čtverce na obrázku v soutěžní úloze.

N1. Kolem čtvercové dlaždice se stranou 5 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 1 dm. Kolik dlaždic je na lem potřeba?

[Podél každé strany velké dlaždice je třeba 5 malých dlaždic, u vrcholů další 4. Celkem je třeba $4 \cdot 5 + 4 = 24$ dlaždic.]

N2. Kolem dvou sousedních stran čtvercové dlaždice se stranou 6 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 2 dm. Kolem tohoto lemu vytvořte ještě jeden lem ze čtvercových dlaždic se stranou 4 dm. Je to možné? Pokud ano, kolik dlaždic je na oba lemy potřeba?

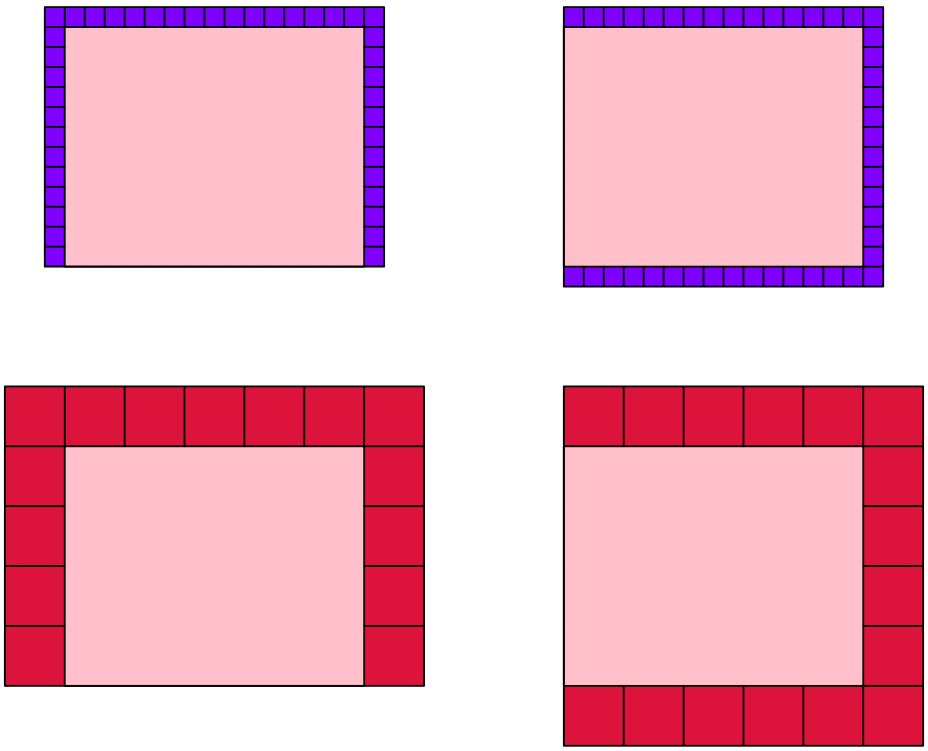
[Je to možné: Na první lem bude třeba $2 \cdot 3 + 1 = 7$ dlaždic, na druhý $2 \cdot 2 + 1 = 5$ dlaždic. Celkem je třeba 12 dlaždic.]

N3. Kolem tří stran čtvercové dlaždice se stranou 6 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 3 dm. Kolem tohoto lemu vytvořte ještě jeden lem ze čtvercových dlaždic se stranou 5 dm. Je to možné? Pokud ano, kolik celkem dlaždic je na oba lemy potřeba?

[Není to možné: První lem vytvořit lze, vzniklý obdélník bude mít rozměry 9 dm a 12 dm. Druhý lem vytvořit nelze, protože žádný z předchozích rozměrů v dm není násobkem 5.]

D1. Kolem tří stran obdélníkové dlaždice se stranami 12 dm a 15 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic s velikostí strany vyjádřenou v dm celým číslem. Kolik dlaždic je na lem potřeba? Najděte všechny možnosti.

[Čtvercové dlaždice mohou mít stranu buď 1 dm, nebo 3 dm. Počet použitých dlaždic závisí na jejich velikosti a na tom, která strana obdélníku není lemována. Dlaždic prvního typu je třeba buď $2 \cdot 12 + 15 + 2 = 41$, nebo $2 \cdot 15 + 12 + 2 = 44$. Dlaždic druhého typu je třeba buď $2 \cdot 4 + 5 + 2 = 15$, nebo $2 \cdot 5 + 4 + 2 = 16$.]



75. ročník Matematické olympiády (2025/26)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Do rohových políček tabulky 3×3 jsou vepsána čísla jako na obrázku:

3		*6*
12		*15*

Do prázdných políček doplňte kladná celá čísla tak, aby součin čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný. Najděte všechny možnosti. *(J. Zhouf)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. V následující tabulce jsou a, b, c kladná celá čísla taková, že hodnoty v sousedních políčkách se rovnají. Najděte tři nejmenší řešení.

$5a$	$7b$	$8c$

[Čísla ve všech políčkách se rovnají. Protože čísla 5, 7 a 8 jsou nesoudělná, je obecné řešení tvaru $a = 7 \cdot 8 \cdot k$, $b = 5 \cdot 8 \cdot k$, $c = 5 \cdot 7 \cdot k$, kde k je kladné celé číslo. Tři nejmenší řešení (a, b, c) jsou $(56, 40, 35)$, $(112, 80, 70)$, $(168, 120, 105)$.]

N2. V následující tabulce jsou a, b, c kladná celá čísla taková, že hodnoty v sousedních políčkách se rovnají. Najděte tři nejmenší řešení.

$20a$	$21b$	$12c$

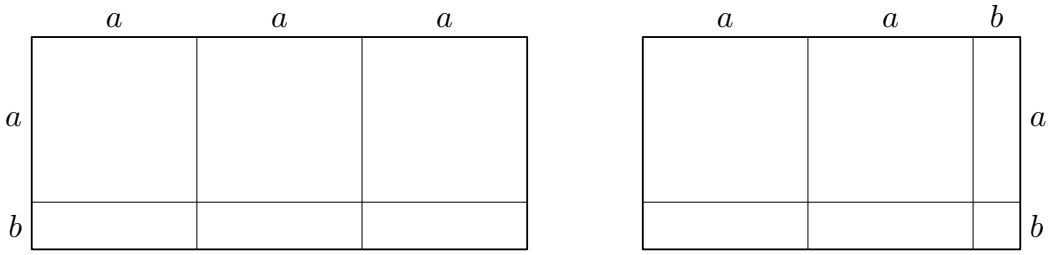
[Čísla ve všech políčkách se rovnají. Čísla 20, 21 a 12 jsou soudělná, jejich rozklady na součiny nesoudělných dělitelů jsou $20 = 4 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$ a $12 = 4 \cdot 3$. Obecné řešení je tvaru $a = 3 \cdot 7 \cdot k$, $b = 4 \cdot 5 \cdot k$, $c = 5 \cdot 7 \cdot k$, kde k je kladné celé číslo. Tři nejmenší řešení (a, b, c) jsou $(21, 20, 35)$, $(42, 40, 70)$ a $(63, 60, 105)$.]

N3. Pro kladná sudá čísla a, b, c platí, že součiny $a \cdot b$ a $b \cdot c$ se rovnají a součin $a \cdot b \cdot c$ je dvojmístný a větší než 75. Jaký může být součet těchto tří čísel? Najděte všechny možnosti.

[Čísla a, b, c jsou sudá, tedy součin $a \cdot b \cdot c$ je násobkem osmi a jeho možné hodnoty jsou 80, 88 nebo 96. Protože $a \cdot b = b \cdot c$, je $a = c$. Hledané trojice (a, b, c) jsou $(2, 20, 2)$, $(2, 22, 2)$, $(2, 24, 2)$ a $(4, 6, 4)$, jejich součty jsou 24, 26, 28 a 14.]

D1. Obdélník je třemi úsečkami rozdělen na tři čtverce a tři menší obdélníky. Všechny dílčí pravoúhelníky mají délky všech stran v cm vyjádřeny celými čísly. Obsah jednoho z malých obdélníků je $14\,\mathrm{cm}^2$. Jaký může být obsah daného obdélníku? Najděte všechny možnosti.

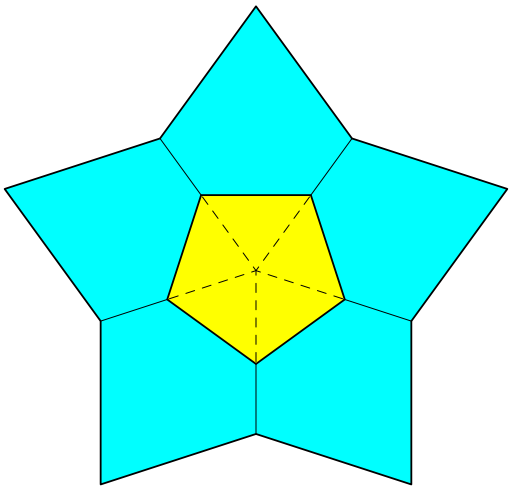
[Typově různá dělení jsou naznačena na obrázcích níže. V obou případech jsou malé obdélníky navzájem shodné. Obsah těchto obdélníků v cm^2 je $a \cdot b = 14 = 1 \cdot 14 = 2 \cdot 7$, tedy máme čtyři možné dvojice a a b. Pro první typ dělení je obsah daného obdélníku $3a(a+b)$, což po dosazení dává $45\,\mathrm{cm}^2$, $630\,\mathrm{cm}^2$, $54\,\mathrm{cm}^2$, nebo $189\,\mathrm{cm}^2$ Pro druhý typ dělení je obsah daného obdélníku $(2a+b)(a+b)$, což po dosazení dává $240\,\mathrm{cm}^2$, $435\,\mathrm{cm}^2$, $99\,\mathrm{cm}^2$, nebo $144\,\mathrm{cm}^2$.]



Z9–I–2

Útvar na obrázku je vytvořen z pěti shodných azurových kosočtverců a jednoho žlutého pravidelného pětiúhelníku, který kosočtverce částečně překrývá. Kosočtverce sousedí celými stranami a na nich leží vrcholy pětiúhelníku. Poměr velikostí poloměru kružnice opsané pětiúhelníku a strany kosočtverce je $4:7$.

Rozhodněte, zda nepřekrytá část každého kosočtverce má větší, stejný, nebo menší obsah než pětiúhelník. *(M. Dományová)*

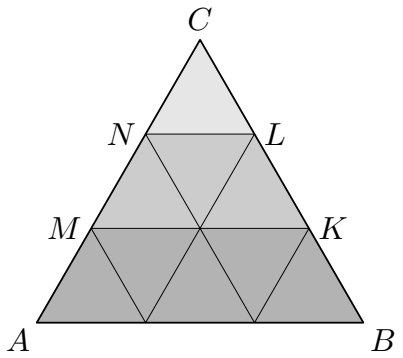


Návodné a doplňující úlohy

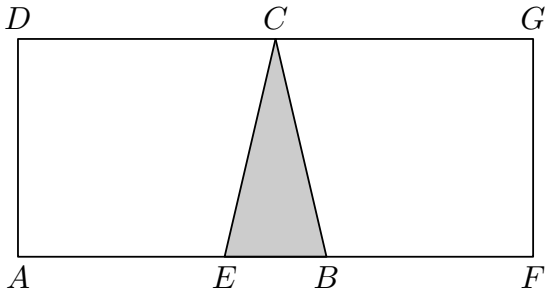
N1. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu délky 24 cm. Na straně BC jsou body K a L tak, že $|BK| = |KL| = |LC|$. Na straně AC jsou body M a N tak, že $|AM| = |MN| =$

$= |NC|$. Určete postupný poměr obsahů lichoběžníků $ABKM$, $MKLN$ a trojúhelníku NLC. Zkuste úlohu řešit i bez znalosti délky strany trojúhelníku ABC.

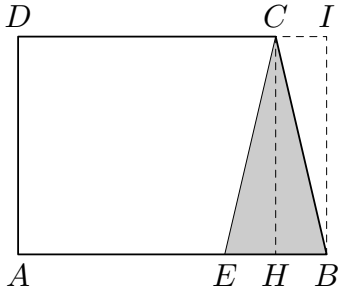
[Trojúhelník ABC lze příčkami rovnoběžnými se stranami rozdělit na devět trojúhelníků shodných s NLC (se stranami délky 8 cm). Lichoběžník $ABKM$ je tvořen pěti takovými trojúhelníky, lichoběžník $MKLN$ třemi. Poměry obsahů jsou $S_{ABKM} : S_{MKLN} : S_{NLC} = 5 : 3 : 1$. (Velikost, ani rovnostrannost trojúhelníku ABC není podstatná.)]



N2. Dva shodné pravoúhlé lichoběžníky $ABCD$ a $FECG$ se překrývají v trojúhelníku EBC. Obsah trojúhelníku EBC tvoří 18 % obsahu lichoběžníku $ABCD$. Určete poměr délek úseček AB a CD.



[Doplňme body H a I tak, aby $AHCD$ a $ABID$ byly obdélníky. Trojúhelníky EHC, BHC a CIB jsou navzájem shodné, obsah každého z nich odpovídá 9 % obsahu lichoběžníku $ABCD$. Obsah obdélníku $AHCD$, resp. $ABID$ odpovídá 91 %, resp. 109 % obsahu lichoběžníku $ABCD$. Poměr délek úseček AB a CD je stejný jako poměr obsahů obdélníků $ABID$ a $AHCD$, tj. 109 : 91.]

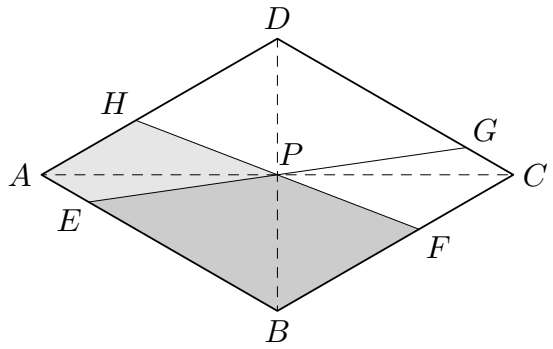


N3. Na stranách AB, BC, CD a DA kosočtverce $ABCD$ jsou postupně dány body E, F, G a H tak, že platí $|AE| : |EB| = |CG| : |GD| = 1 : 4$ a $|BF| : |FC| = |DH| : |HA| = 3 : 2$. Bod P je průsečíkem přímek EG a HF. Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $AEPH$ a $EBFP$.

[Kosočtverec je středově souměrný podle průsečíku úhlopříček a stejně jsou souměrné dvojice bodů E a G, resp. F a H. Tedy bod P je průsečíkem úhlopříček kosočtverce. Každý ze čtyřúhelníků $AEPH$ a $EBFP$ je úhlopříčkami rozdělen na dva trojúhelníky. Všechny čtyři trojúhelníky mají společný vrchol P a stejné velikosti výšek z tohoto vrcholu. Tedy jejich obsahy jsou úměrné stranám protilehlým vrcholu P a platí:

$$\frac{S_{AEPH}}{S_{EBFP}} = \frac{S_{AEP} + S_{AHP}}{S_{BEP} + S_{BFP}} = \frac{|AE| + |AH|}{|BE| + |BF|} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}} = \frac{3}{7}.$$

Poměr obsahů čtyřúhelníků $AEPH$ a $EBFP$ je $3 : 7$.]

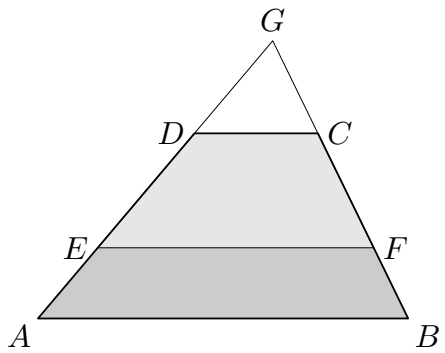


D1. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami $|AB| = 12\,\text{cm}$, $|CD| = 4\,\text{cm}$ a výškou $6\,\text{cm}$. Na ramenech AD, BC leží body E, F tak, že lichoběžníky $ABFE$ a $EFCD$ mají stejný obsah. Vypočítejte délku úsečky EF.

[Prodloužená ramena lichoběžníku se protínají v bodě G. Trojúhelníky DCG, EFG a ABG jsou navzájem podobné. Koeficient podobnosti pro dvojici DCG a ABG je 3, koeficient podobnosti pro dvojici DCG a EFG označíme k. Pro obsahy dílčích lichoběžníků platí

$$S_{ABFE} = (9 - k^2) \cdot S_{DCG}, \quad S_{EFGH} = (k^2 - 1) \cdot S_{DCG}.$$

Z rovnosti obsahů dostáváme $9 - k^2 = k^2 - 1$, odtud $k^2 = 5$, a tedy $k = \sqrt{5}$. Hledaná délka úsečky je $|EF| = k\,|CD| = 4\sqrt{5} \doteq 8{,}9\,(\text{cm})$. (Výška lichoběžníku $ABCD$, ani velikosti základen nejsou podstatné; při řešení byl použit pouze poměr $|AB| : |CD| = 3$.)]



Z9–I–3

Na tabuli je napsáno několik po sobě jdoucích přirozených čísel počínaje jedničkou. Každé z těchto čísel má buď azurovou, nebo žlutou barvou. Součet každých dvou různobarevných čísel je prvočíslem, součet každých dvou stejnobarevných čísel je složeným číslem.

Kolik nejvíce čísel může být napsáno na tabuli? *(P. Bak)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Seznamte se s metodou Eratosthenova síta a najděte pomocí něj všechna prvočísla menší než 100.

[Popis algoritmu najdete v učebnicích o dělitelnosti nebo na internetu.[?] Všechna prvočísla menší než 100 jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.]

N2. Obarvěte čísla 1, 2 a 3 podle pravidel ze soutěžní úlohy.

[Čísla 1 a 3 musí mít stejnou barvu, číslo 2 jinou.]

N3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel menších než 6, jejichž součty jsou složená čísla.

[Řešení odpovídají sčítancům v následujících výrazech: $4 = 1 + 3 = 2 + 2$, $6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5 = 4 + 4$, $9 = 4 + 5$, $10 = 5 + 5$.]

D1. Leonardo si vypisoval členy Fibonacciho posloupnosti: Začal dvěma jedničkami, k nim připsal jejich součet a v každém dalším kroku doplnil součet předchozích dvou čísel. Několik prvních členů vypadalo takto: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Ukažte, že číslo na 9999. místě je složené.

[V posloupnosti se střídají dvě lichá a jedno sudé číslo (součet dvou lichých čísel je sudé číslo, součet sudého a lichého čísla je liché číslo). Každé třetí číslo je sudé a 9999 je násobkem tří, tedy číslo na 9999. místě posloupnosti je sudé. Sudá čísla větší než 2 jsou složená, a to je také naše číslo. Číslo na 9999. místě je složené.]

Z9–I–4

Přirozené číslo se nazývá čtverečkové, pokud jeho zápis obsahuje číslici nebo skupinu po sobě jdoucích číslic, jež jsou zápisem druhé mocniny kladného celého čísla. (Např. čísla 257 a 725 jsou čtverečková, čísla 275 a 572 nikoli.)

Určete počet všech dvojmístných čtverečkových čísel. *(M. Dillingerová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Najděte:

a) nejmenší trojmístné čtverečkové číslo;

b) stoprvní trojmístné čtverečkové číslo;

c) stotřicáté trojmístné čtverečkové číslo.

[Všechna čísla od 100 do 199 jsou čtverečková, následující je 201. Tedy a) první je 100; b) stoprvní je 201. Další je třeba pečlivě vypisovat; c) stotřicáté je 248.]

[?] Viz např. Wikipedii.

N2. Kolik trojmístných čtverečkových čísel začíná číslicí 7 a obsahuje číslici 5?

[Čísla 5 a 7 nejsou druhými mocninami. Žádné dvojmístné číslo, které je druhou mocninou, nezačíná 7 a jediné dvojmístné číslo, které je druhou mocninou a obsahuje 5, je 25. Trojmístná čísla, která jsou druhou mocninou a začínají 7, jsou 729 a 784. Tato čísla však neobsahují 5. Vyhovujících čísel je sedm: 725, 751, 715, 754, 745, 759, 795.]

N3. Přirozené číslo nazveme *patrojkové*, jestliže obsahuje číslici 3, ale není dělitelné třemi. Najděte deset nejmenších patrojkových čísel.

[Jsou to čísla 13, 23, 31, 32, 34, 35, 37, 38, 43, 53.]

D1. Přirozené číslo nazveme *supersloženým*, pokud jeho zápis obsahuje právě dvě číslice, z nichž každá představuje jednomístné složené číslo. (Např. číslo 144 je supersložené, číslo 124 nikoli.) Kolik je trojmístných supersložených čísel?

[Jednomístná složená čísla jsou čtyři: 4, 6, 8 a 9. Na dvou ze tří míst jsou tyto číslice, na zbylém místě je jiná, „nesložená“ číslice. Pro „nesloženou“ číslici na prvním místě máme $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ možností (nemůže být 0). Pro „nesloženou“ číslici na druhém nebo třetím místě, máme vždy $4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$ možností. Trojmístných supersložených čísel je $80 + 96 + 96 = 272$.]

Z9–I–5

V lyžařském oddíle se počet všech dětí snížil o 10 %, přitom poměr děvčat vůči všem dětem vzrostl z 50 % na 55 %.

O kolik procent se změnil počet děvčat? *(I. Jančigová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Janečkovi natrhali 30 kg třešní. Z 30 % třešní vyrobili šťávu, polovinu zbylých třešní zpracovali na marmeládu. Nový zbytek rozdělili na tři stejné díly, dva díly usušili a jeden díl snědli. Kolik procent všech třešní Janečkovi usušili?

[Šťávu vyrobili z $\frac{3}{10} \cdot 30 = 9$ kg, zbylo 21 kg. Marmeládu udělali z $\frac{1}{2} \cdot 21 = 10{,}5$ kg, stejné množství zbylo. Na sušení vyčlenili $\frac{2}{3} \cdot 10{,}5 = 7$ kg. Janečkovi usušili $\frac{7}{30} \doteq 23{,}3\,\%$ třešní. (Hmotnost natrhaných třešní není k dořešení úlohy nutná.)]

N2. Ve firmě pije 45 % zaměstnanců čaj, ostatní pijí kávu. Kávu sladí o polovinu víc zaměstnanců než je těch, kteří ji nesladí. Kolik procent všech zaměstnanců pije hořkou kávu?

[Kávu pije 55 % zaměstnanců. Poměr těch, co kávu sladí a nesladí, je 3 : 2. Poměr těch, co kávu nesladí, a všech příznivců kávy je 2 : 5. Hořkou kávu pije $\frac{2}{5} \cdot \frac{55}{100} = 22\,\%$ zaměstnanců.]

N3. V učitelském sboru je p vyučujících, z toho $(100 - p)\,\%$ tvoří ženy a mužů je 36. Kolik vyučujících je ve sboru?

[Muži tvoří $p\,\%$ zaměstnanců a je jich 36, tzn. $p \cdot \frac{p}{100} = 36$. Odtud plyne $p^2 = 3600$, tedy $p = 60$. Ve sboru je 60 vyučujících.]

D1. V pytlíku byly rohlíky, z nichž 80 % bylo s kmínem, ostatní s mákem. Po snědení dvou rohlíků s kmínem tvořil tento druh rohlíků 75 % všech. Kolik rohlíků bylo s mákem?

[Původní poměr rohlíků s kmínem a s mákem byl 4 : 1, tedy počet všech rohlíků byl násobkem 5. Postupným zkoušením vyplyne, že všech rohlíků bylo 10, těch s kmínem 8 a těch

s mákem 2. (Úlohu lze zapsat pomocí neznámých takto: $\frac{k}{k+m} = \frac{8}{10}$, $\frac{k-2}{k+m-2} = \frac{3}{4}$, kde k a m značí původní počty rohlíků s kmínem a s mákem.)]

Z9–I–6

Kružnice k a l se zvnějšku dotýkají a poloměr kružnice k je stejný jako průměr kružnice l. Bod S je středem kružnice k, bod T je bodem dotyku kružnic, bod A leží na kružnici l mimo spojnici středů kružnic a bod M je středem úsečky AS.

Dokažte, že úhel ATM je pravý. *(L. Komín)*

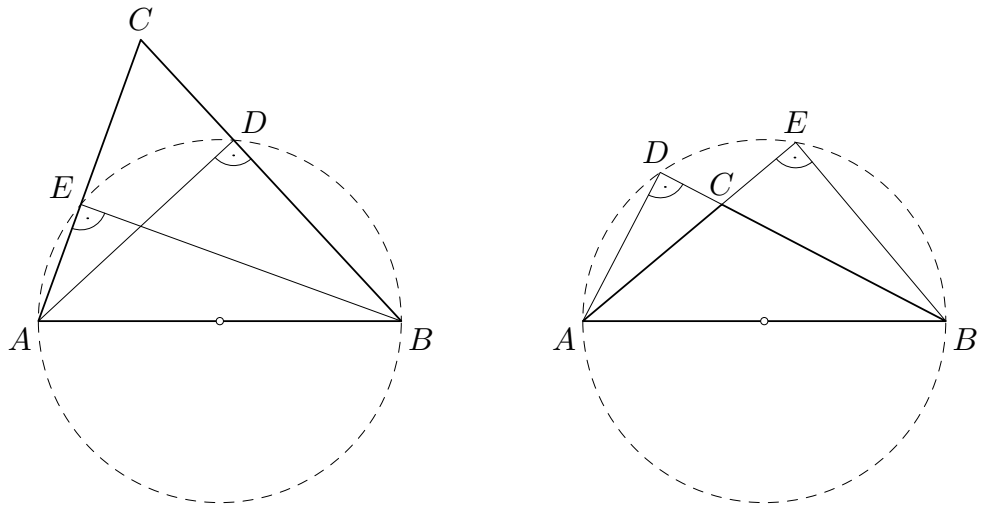
Návodné a doplňující úlohy

N1. Připomeňte si a zformulujte Thaletovu větu.

[Formulaci i se zdůvodněním najdete v učebnicích nebo na internetu:[?] Pokud je AB průměr kružnice a C jakýkoli jiný bod na téže kružnici, potom trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C.]

N2. V obecném trojúhelníku ABC značí D a E paty výšek na strany BC a AC. Dokažte, že body A, B, D a E leží na jedné kružnici.

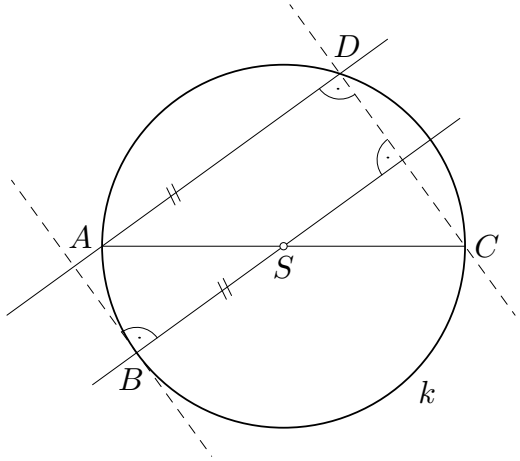
[Trojúhelníky ABD a ABE jsou pravoúhlé s pravými úhly u vrcholů D a E. Vrcholy všech pravoúhlých trojúhelníků s přeponou AB tvoří kružnici, tzv. Thaletovu kružnici nad průměrem AB. (V pravoúhlém trojúhelníku ABC některé body splývají.)]

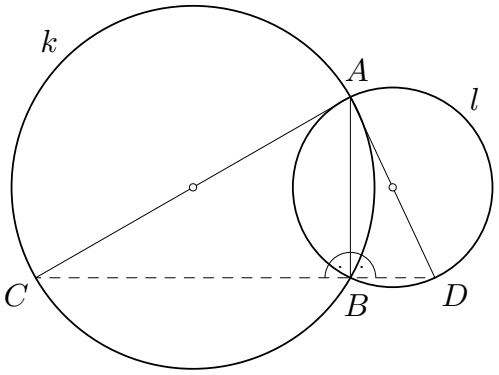
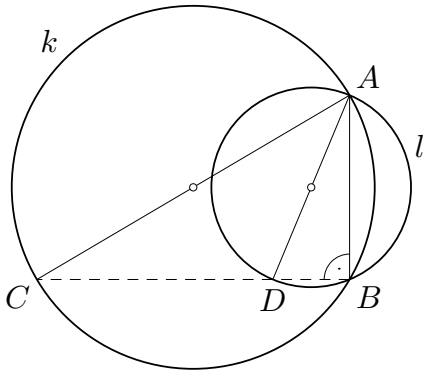


N3. Na kružnici k se středem S jsou dány navzájem různé body A, B, C, D tak, že platí $S \in AC$ a $BS \| AD$. Dokažte, že tečna ke kružnici k s bodem dotyku B je rovnoběžná s přímkou CD.

[Podle Thaletovy věty je úhel ADC pravý. Přímky BS a AD jsou rovnoběžné, tedy přímky BS a CD jsou kolmé. Tečna s bodem dotyku B je kolmá na BS, tedy je rovnoběžná s CD.]

[?] Viz např. Wikipedii.



D1. Kružnice k a l se protínají v různých bodech A a B. Body C a D jsou krajními body průměrů kružnic k a l procházejících společným bodem A. Dokažte, že body B, C a D leží na jedné přímce.

[Může se stát, že některý s bodů C, D splývá s bodem B. V takovém případě je vlastnost splněna triviálně. Obecně jsou body B, C a D navzájem různé a podle Thaletovy věty jsou úhly ABC a ABD pravé. Tedy body C a D leží na kolmici k přímce AB procházející bodem B, tzn. body B, C a D leží na jedné přímce.]