

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

Z5–I–1

Zvláštní kalkulačka má pouze dvě funkční tlačítka. Po stisknutí prvního tlačítka se k číslu na displeji přičte jedna, po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji vynásobí dvěma. Na displeji po každém stisknutí tlačítka svítí správný výsledek.

Najděte dva způsoby, jak pomocí šesti stisknutí tlačítek dostat na displeji z čísla 1 číslo 15.
(I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících třech návodných úlohách používáme stejnou kalkulačku jako v soutěžní úloze.

N1. Na displeji svítlo číslo 1. Pak jsme čtyřikrát stiskli stejné tlačítko. Jaké číslo mohlo být na displeji?

[Buď 5 (při užití prvního tlačítka), nebo 16 (při užití druhého tlačítka).]

N2. Kolika způsoby lze dostat na displeji z čísla 1 číslo 4?

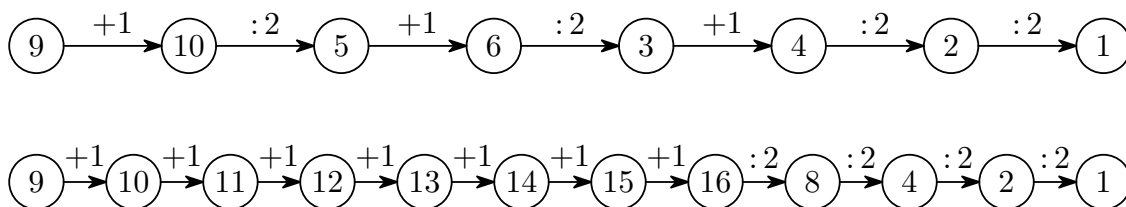
[Jde to čtyřmi způsoby: $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$, $1 \cdot 2 + 1 + 1 = 4$, $(1 + 1) \cdot 2 = 4$, $1 + 1 + 1 + 1 = 4$.]

N3. Na displeji svítlo neznámé číslo. Pak jsme čtyřikrát stiskli stejné tlačítko. Jaké mohlo být neznámé číslo, jestliže na displeji nyní svítí číslo a) 15; b) 16?

[a) Jedině 11 ($11 + 1 + 1 + 1 + 1 = 15$). b) Buď 1 ($1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$), nebo 12 ($12 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16$).]

D1. Zvláštní kalkulačka funguje jako ta v soutěžní úloze, akorát po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji místo násobení vydělí dvěma. Najděte dva způsoby, jak dostat na displeji z čísla 9 číslo 1.

[Možná řešení jsou znázorněna pomocí tzv. početního hada na obrázku níže. Úloha má nekonečně mnoho řešení, viz např. opakování nápadu $(1 + 1) : 2 = 1$.]



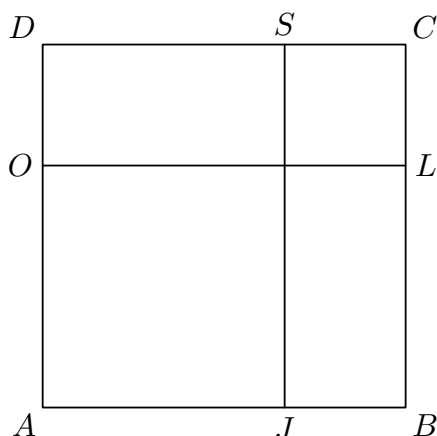
Z5–I–2

U zámku je čtvercový park se stranou délky 240 metrů. Po stranách čtverce vedou cesty, v jeho vrcholech stojí akát, buk, cedr a dub. Park křižují dvě další cesty rovnoběžné s cestami po jeho stranách — jedna vede od javoru ke studánce, druhá vede od lípy k ořechu. Princezna při svých procházkách parkem chodila jen po cestách, nikde se nevracela, ani zbytečně neodbočovala a zjistila, že:

- procházka od buku ke studánce kolem javoru, akátu, ořechu a dubu je dvakrát delší než kolem lípy a cedru,
- procházka od buku ke studánce kolem lípy a cedru je stejně dlouhá jako procházka od dubu k lípě kolem studánky a cedru.

Jak dlouhá je přímá cesta od akátu k ořechu?

(M. Macko)

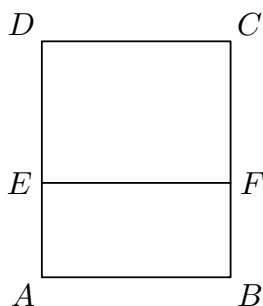


NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Záhon má tvar obdélníku $ABCD$. Přímá cesta z A do B měří 6 metrů. Cesta z A do B přes D a C měří 16 metrů. Jak dlouhá je přímá cesta z B do C ?

[Rozdíl délek cest $A-D-C-B$ a $A-B$ je $16 - 6 = 10$ metrů. To odpovídá součtu délek stran AD a BC , které jsou stejné. Přímá cesta z B do C je dlouhá $10 : 2 = 5$ metrů.]

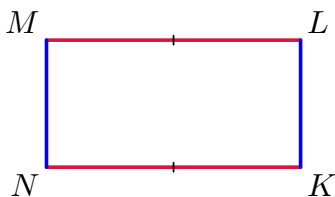
- N2. Na obrázku jsou znázorněny cesty, které tvoří hranice dvou obdélníků se společnou stranou. Přímá cesta z A do B měří 8 metrů, nejkratší cesta z A do C měří 18 metrů. Viktor se prochází po cestách z A do C , a to tak, že žádnou část neprojde víc než jednou. Jak dlouhá může být Viktorova procházka?



[Nejkratší procházka je buď $A-B-F-C$, nebo $A-E-F-C$, nebo $A-E-D-C$ a je dlouhá 18 metrů. Protože $|AB| = 8$ metrů, je $|BC| = |AD| = 10$ metrů. Jediná další možná procházka je $A-B-F-E-D-C$ a je dlouhá $3 \cdot 8 + 10 = 34$ metrů.]

- N3. Přímá cesta mezi vrcholy K a L obdélníku $KLMN$ je pětikrát kratší než cesta po obvodu z K přes N a M do L . Vyjádřete délku cesty z L přes M do N pomocí délky některé strany obdélníku.

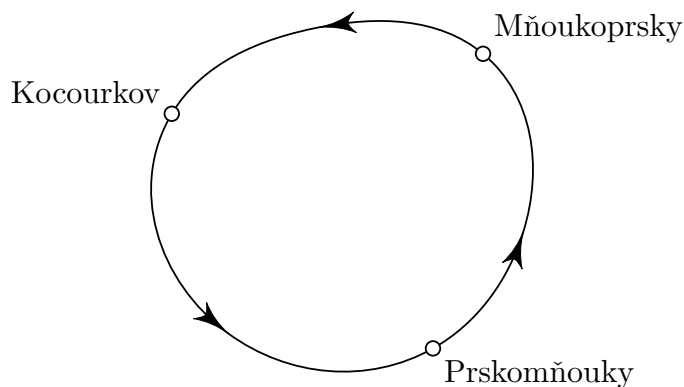
[Stejně dlouhé strany obdélníku zvýrazníme stejnými barvami, viz obrázek. Součet délek dvou červených a jedné modré úsečky je pětikrát větší než délka modré úsečky ($2\check{c} + m = 5m$). Tedy červená úsečka je dvakrát delší než modrá ($\check{c} = 2m$). Cesta $L-M-N$ je stejně dlouhá jako tři modré nebo jedna a půl červené strany obdélníku ($\check{c} + m = 3m = \frac{3}{2}\check{c}$).]



- D1. Jarmila překonala vzdálenost mezi dvěma keři čtyřmi kroky, Lenka stejnou vzdálenost překonala třemi kroky. Přitom krok Lenky byl o 15 cm delší než krok Jarmily. Jak daleko od sebe byly keře?

[Po třech krocích je Lenka o $3 \cdot 15 = 45$ cm dál než Jarmila. Tedy délka Jarmilina kroku je 45 cm a vzdálenost keřů je $4 \cdot 45 = 180$ cm.]

- D2. Okružní cesta spojuje tři vesnice jako na obrázku. Ve vyznačeném směru to je z Prskomňouk do Kocourkova 10 km, z Mňoukoprska do Prskomňouk 15 km a z Kocourkova do Mňoukoprska 16 km. Jak dlouhá je celá okružní cesta?



[Součet popsanych vzdáleností mezi vesnicemi odpovídá dvěma délkám okružní cesty, tj. $10 + 15 + 16 = 41$ km. Délka okružní cesty je poloviční, tedy 20 km a 500 m.[?]]

[?] Převzato ze 74. ročníku MO, úloha **Z5-II-2**.

Z5–I–3

Danka a Janka každá pro sebe nasbíraly jahody. Kdyby měla Janka o polovinu víc jahod, než nasbírala, měla by jich stejně jako Danka. Kdyby měla Janka dvakrát víc jahod, než nasbírala, měla by jich o 48 víc než Danka.

Kolik jahod nasbírala Janka a kolik Danka?

(M. Dillingerová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Radka a Šárka měly dohromady 60 malin. Radka jich měla dvakrát tolik co Šárka. Kolik malin měla každá z děvčat?

[Dohromady měly trojnásobek toho, co měla Šárka. Šárka měla 20 malin, Radka 40.]

- N2. Bolek a Lolek měli dohromady 60 borůvek. Bolek jich měl a) o polovinu; b) o třetinu méně než Lolek. Kolik borůvek měl každý z chlapců?

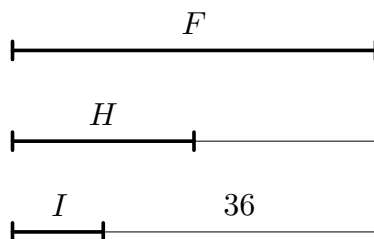
[a) Dohromady měli $3/2$ toho, co měl Lolek. Lolek měl 40 borůvek, Bolek 20. b) Dohromady měli $5/3$ toho, co měl Lolek. Lolek měl 36 borůvek, Bolek 24.]

- N3. Tereзка měla o 30 švestek víc než Žaneta, a ta měla a) dvakrát; b) třikrát; c) čtyřikrát méně švestek než Tereзка. Kolik švestek měla Žaneta?

[30 švestek odpovídá a) počtu; b) dvojnásobku; c) trojnásobku Žanetinych švestek. Žaneta měla a) 30; b) 15; c) 10 švestek.]

- D1. Filip měl dvakrát tolik třešní co Honza. Honza měl dvakrát tolik třešní co Ivan. Ivan měl o 36 třešní méně než Filip. Kolik třešní měl Honza?

[Filip měl čtyřikrát tolik třešní co Ivan. Tedy 36 třešní odpovídá trojnásobku Ivanových třešní. Ivan měl 12 třešní, Honza jich měl 24. Pro přehlednost si lze pomoci úsečkami jako na obrázku níže.]



Z5–I–4

Anežka správně vynásobila určité číslo sedmi a výsledné pětimístné číslo napsala na papír. Papoušek Fráňa kus papíru vykloval a první číslice výsledku se tak stala nečitelnou. Na zbytku papíru zůstalo napsáno 2887.

Jaká mohla být první číslice Anežčina výsledku? Najděte všechny možnosti.

(M. Petrová)

V následujících úlohách používáme v zápisech čísel písmena velké abecedy pro neznámé číslice.

- [Stačí projít výsledky malé násobilky. Míšino číslo mohlo být 1, 3, 7, nebo 9.]

- [a) Dvojmístným násobkem devíti končícím 4 je pouze číslo 54, tedy $A = 5$. b) Trojmístných násobků devíti končících 5 je deset, ale jen u čísla 225 se opakuje číslice na prvních dvou místech. Tedy $A = 2$.]

- [Poslední číslice podílu musí být 6, protože pouze součin $6 \cdot 7 = 42$ končí číslicí 2. Pak také dělení $(A82 - 42) : 7 = A40 : 7$ musí vyjít beze zbytku. Tedy číslice A je buď 1, nebo 8.]

- [Součin končí číslicí 3, tedy číslice A a B jsou buď 1 a 3, nebo 7 a 9. V prvním případě vychází $13 \cdot 31 = 403$, ve druhém vychází $79 \cdot 97 = 7663$. Číslice A a B jsou 7 a 9.]

- D2. V následujícím algebrogramu zastupují stejná písmena stejné číslice, různá různě. O číslicích označených hvězdičkou nevíme nic bližšího. Nahraďte písmena a hvězdičky číslicemi tak, aby byl výpočet správný.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \times \\ \hline \\ \\ \\ \hline \end{array}$$

[Výsledek na posledním řádku: Hvězdička na místě jednotek je 1 a z počítání na místě desítek plyne $B = 7$. Mezivýsledek na třetím řádku: Z hodnoty na místě jednotek plyne buď $C = 1$, nebo $C = 9$. Pro $C = 1$ na místě desítek vychází 7, což nevyhovuje. Pro $C = 9$ na místě desítek vychází 1, což vyhovuje. Mezivýsledek na čtvrtém řádku končí 7, a to je poslední číslice součinu $9 \cdot A$. Tedy $A = 3$ a algebrogram je dořešen níže.]

$$\begin{array}{r} 379 \\ \times 39 \\ \hline 3411 \\ 1137 \\ \hline 14781 \end{array}$$

- D3. V následujícím algebrogramu zastupují stejná písmena stejné číslice, různá různé. Nahradte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný.

$$\begin{array}{r}
 A H A \\
 \times \quad T U \\
 \hline
 P T P T \\
 U P U P \\
 \hline
 U T E T T
 \end{array}$$

[Z tvaru mezivýsledků na třetím a čtvrtém řádku plyne $H = 0$. Z prvních dvou číslic ve výsledku na posledním řádku plyne, že P je menší než 5 a T je sudé. Mezivýsledek na čtvrtém řádku končí P , a to je poslední číslice součinu $A \cdot T$, tedy také P je sudé. Proto je buď $P = 2$ a $T = 4$, nebo $P = 4$ a $T = 8$. První možnost vede k řešení níže, druhá nevyhovuje.]

$$\begin{array}{r}
 8 \ 0 \ 8 \\
 \times \quad 4 \ 3 \\
 \hline
 2 \ 4 \ 2 \ 4 \\
 3 \ 2 \ 3 \ 2 \\
 \hline
 3 \ 4 \ 7 \ 4 \ 4
 \end{array}$$

Z5–I–5

Věky sedmi kamarádů jsou 8, 9, 10, 11, 11, 13 a 14 roků. Tři kamarádi jsou zrovna v kině, dva jsou na fotbale a dva doma. Součet věků těch v kině je 30 roků, součet věků těch na fotbale je 24 roků. Každý z kamarádů na fotbale má víc roků než Ondřej, který zůstal doma.

Kolik roků může mít Ondřej? Najděte všechny možnosti.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Z čísel 3, 4, 5, 6, 7 vyberte dvojici, jejíž součet je a) roven devíti; b) menší než devět. Najděte všechny možnosti.

[a) Buď dvojice 3 a 6, nebo 4 a 5. b) Buď dvojice 3 a 4, nebo 3 a 5.]

- N2. Z čísel 11, 15, 19, 31, 35 a 39 vytvořte tři dvojice se stejnými součty.

[Součet všech čísel je 150, tedy součet čísel v jedné dvojici má být 50. Řešení odpovídá dvojicím sčítanců $11 + 39 = 19 + 31 = 15 + 35$.]

- N3. Z čísel 2, 3, 4, 5 a 6 vyberte dvě dvojice se stejnými součty. Najděte všechny možnosti.

[Čísel je pět, tedy jedno se při tvorbě dvojic vynechá. Tři čísla jsou sudá a dvě lichá, tedy nelze vynechat liché číslo. Řešení odpovídá dvojicím sčítanců $3 + 6 = 4 + 5$, nebo $3 + 5 = 2 + 6$, nebo $2 + 5 = 3 + 4$.]

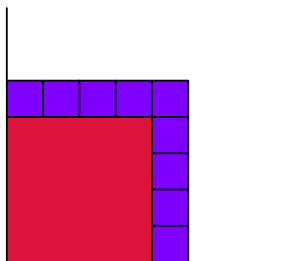
- D1. Z čísel 5, 6, 8, 9, 11 a 13 sestavte dvě trojice se stejnými součty.

[Součet všech čísel je 52, tedy součet čísel v jedné trojici má být 26. Řešení odpovídá trojicím sčítanců $5 + 8 + 13 = 6 + 9 + 11$.]

Z5–I–6

Čtyři děvčata dláždila čtvercovými dlaždicemi terasu v rohu dvoru. Viola používala dlaždice se stranou 1 dm, Růžena se stranou 2 dm, Blanka se stranou 3 dm a Karmen se stranou 4 dm. První z děvčat položila jednu ze svých dlaždic do rohu. Druhá položila své dlaždice podél volných stran předchozí dlaždice a přidala jednu navíc, aby vznikl čtverec (viz obrázek). Obdobným způsobem položilo své dlaždice třetí a nakonec i čtvrté děvče. Takto vznikla čtvercová terasa bez mezer a překryvů.

V jakém pořadí mohla děvčata pokládat dlaždice a kolik dlaždic celkem použila? Najděte všechny možnosti. (M. Macko)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících úlohách lemem obdélníku nebo čtverce rozumíme souvislý stejně široký pás, který jej obklopuje. Lem vztažený jen k některým stranám obdélníku nebo čtverce je zbylými stranami omezen obdobně jako fialový lem kolem dvou stran karmínového čtverce na obrázku v soutěžní úloze.

- N1. Kolem čtvercové dlaždice se stranou 5 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 1 dm. Kolik dlaždic je na lem potřeba?

[Podél každé strany velké dlaždice je třeba 5 malých dlaždic, u vrcholů další 4. Celkem je třeba $4 \cdot 5 + 4 = 24$ dlaždic.]

- N2. Kolem dvou sousedních stran čtvercové dlaždice se stranou 6 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 2 dm. Kolem tohoto lemu vytvořte ještě jeden lem ze čtvercových dlaždic se stranou 4 dm. Je to možné? Pokud ano, kolik dlaždic je na oba lemy potřeba?

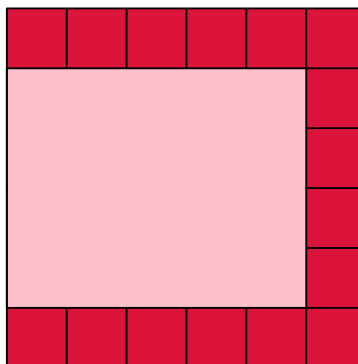
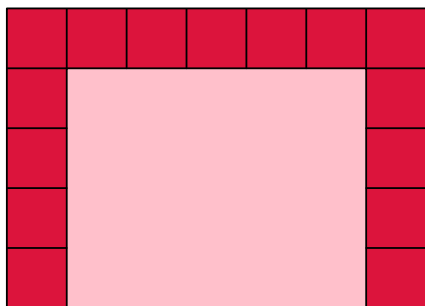
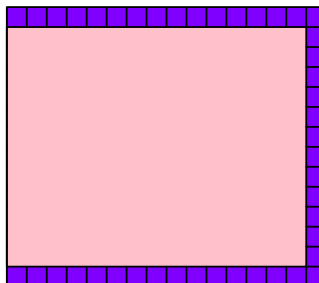
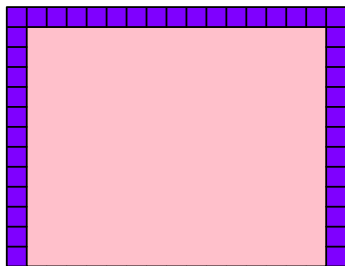
[Je to možné: Na první lem bude třeba $2 \cdot 3 + 1 = 7$ dlaždic, na druhý $2 \cdot 2 + 1 = 5$ dlaždic. Celkem je třeba 12 dlaždic.]

- N3. Kolem tří stran čtvercové dlaždice se stranou 6 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 3 dm. Kolem tohoto lemu vytvořte ještě jeden lem ze čtvercových dlaždic se stranou 5 dm. Je to možné? Pokud ano, kolik celkem dlaždic je na oba lemy potřeba?

[Není to možné: První lem vytvořit lze, vzniklý obdélník bude mít rozměry 9 dm a 12 dm. Druhý lem vytvořit nelze, protože žádný z předchozích rozměrů v dm není násobkem 5.]

- D1. Kolem tří stran obdélníkové dlaždice se stranami 12 dm a 15 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic s velikostí strany vyjádřenou v dm celým číslem. Kolik dlaždic je na lem potřeba? Najděte všechny možnosti.

[Čtvercové dlaždice mohou mít stranu buď 1 dm, nebo 3 dm. Počet použitých dlaždic závisí na jejich velikosti a na tom, která strana obdélníku není lemována. Dlaždic prvního typu je třeba buď $2 \cdot 12 + 15 + 2 = 41$, nebo $2 \cdot 15 + 12 + 2 = 44$. Dlaždic druhého typu je třeba buď $2 \cdot 4 + 5 + 2 = 15$, nebo $2 \cdot 5 + 4 + 2 = 16$.]



Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z6

Z6–I–1

V následujícím sčítacím algebrogramu odpovídají různá písmena různým číslicím, stejná stejným:

$$\begin{array}{r} T O N A \\ O N A \\ N A \\ A \\ \hline 8 6 5 4 \end{array}$$

Nahradte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný. Najděte všechny možnosti.
(I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících algebrogramech odpovídají různá písmena různým číslicím, stejná stejným. Nahradte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný. Najděte všechny možnosti.
N1.

$$PES + ES = 170$$

[Zřejmě musí být $P = 1$, tedy řešíme $ES + ES = 70$. Odtud dostáváme jediné řešení, v němž PES odpovídá 135.]

N2.

$$NIVA + IVA = 8630$$

[Z počítání na místě jednotek plyne buď $A = 0$, nebo $A = 5$. Pro $A = 0$ vychází v součtu na místě desítek sudé číslo, což nevyhovuje. Pro $A = 5$ vychází buď $V = 1$, nebo $V = 6$. Pro $V = 6$ vychází v součtu na místě stovek liché číslo, což nevyhovuje. Pro $V = 1$ vychází buď $I = 3$ a $N = 8$, nebo $I = 8$ a $N = 7$. Dostáváme dvě řešení, v nichž $NIVA$ odpovídá 8315, nebo 7815.]

D1.

$$PO \cdot DO = ONO$$

[Z počítání na místě jednotek plyne buď $O = 1$, nebo $O = 5$, nebo $O = 6$. Pro $O = 1$ nemá úloha řešení. Pro $O = 5$ vychází buď $P = 1$ a $D = 3$, nebo naopak. Pro $O = 6$ vychází $P = D = 2$, což nejsou různé číslice. Jediné řešení (až na pořadí součinitelů) odpovídá výpočtu $15 \cdot 35 = 525$.]

D2.

$$\begin{array}{rcl} ABC & : & AD = AE \\ + & & + \\ FG & - & BG = EH \\ = & & = \\ EDH & & CF \end{array}$$

[Z rozdílu na druhém řádku plyne $H = 0$. Dělení na prvním řádku znamená $AD \cdot AE = ABC$, odkud plyne $A = 1$. Odtud a z různosti číslic plyne poměrně málo možností pro D , E , B a C . Ze součtu v prvním sloupci plyne $E = 2$ a jen dvě možnosti pro zbylé číslice. Po vyzkoušení vyhovuje jediná možnost zobrazená níže.]

$$\begin{array}{rccccccc} 156 & : & 13 & = & 12 & & \\ + & & + & & & & \\ 74 & - & 54 & = & 20 & & \\ = & & = & & & & \\ 230 & & 67 & & & & \end{array}$$

Z6–I–2

Od 1. ledna byl pan Novák zaměstnán v nové práci. Nástupní výše jeho platu byla 1 550 eur měsíčně. Protože se osvědčil, od jistého měsíce v prvním půlroce mu byl zvýšen plat o celý počet eur. Za celý rok si vydělal 20 000 eur.

Za který měsíc si pan Novák poprvé vydělal více a o kolik? Určete všechny možnosti.
(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Michal dostal na celý týden košík se 17 jablek. Každý den počínaje pondělím snědl tři jablka. Záhy si spočítal, že pokud mu mají jablka vyjít až do neděle, musí počet jablek, která každý den sní, snížit o jedno. Který den začal Michal jíst méně jablek?

[Méně jablek začal jíst ve čtvrtek ($3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 17$).]

- N2. Arnošt dostal na celý týden košík se 47 švestkami. Každý den počínaje pondělím snědl pět švestek. Záhy si spočítal, že může počet švestek, které každý den sní, zvýšit a švestky mu i tak vydrží až do neděle. Začal tedy jíst víc švestek, a to každý den stejně, ale ne více než deset. V neděli dojedl všechny. Který den začal Arnošt jíst více švestek a o kolik? Uveďte všechny možnosti.

[Pokud by jedl 5 švestek denně celý týden, snědl by jich 35 a 12 by mu zbylo. S tímto přebytkem si mohl poradit tak, že začal jíst buď v úterý o 2, nebo ve čtvrtek o 3, nebo v pátek o 4 švestky více.]

- N3. Eliška se rozhodla během července přečíst knihu, která měla 316 stran. Každý den počínaje 1. červencem přečetla deset stran. Několik dní před koncem měsíce zjistila, že by takto knihu nedočetla, a začala číst více. Opět četla stejný počet stran denně a svoje předsevzetí splnila. Kolik stran denně mohla Eliška číst během posledních červencových dnů? Uveďte všechny možnosti.

[Pokud by četla 10 stran denně celý červenec, přečetla by 310 stran a 6 by jí chybělo. Četbu mohla navýšit buď o 1 stranu posledních 6 dnů, nebo o 2 strany poslední 3 dny, nebo o 3 strany poslední dva dny. Poslední dny tedy mohla číst buď 11, nebo 12, nebo 13 stran denně.]

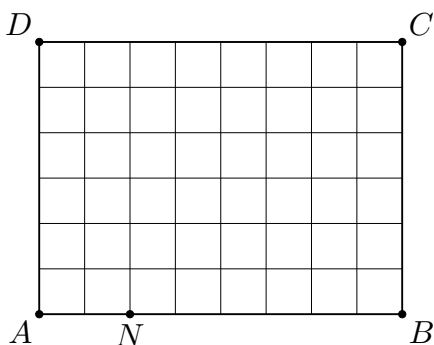
- D1. Pan Cílevědomý nastoupil 1. ledna do nového zaměstnání s nástupním platem v celých tisících korun. Protože se osvědčil, byl mu od jistého měsíce zvýšen plat o pětinu. Jeho

nový plat byl opět v celých tisících korun a za celý rok si vydělal něco mezi 250 000 a 310 000 korunami. Jaký byl nástupní plat pana Cílevědomého a od kterého měsíce dostal přidáno? Určete všechny možnosti.

[Uvedenému ročnímu výdělku odpovídá měsíční plat mezi 20 834 a 25 833 korunami. Nástupní plat pana Cílevědomého byl nižší a dělitelný 5 000, tedy buď 20 000, nebo 25 000 korun. S měsíčním platem 20 000 korun by za rok vydělal 240 000, tedy dostal přidáno nejpozději v říjnu ($240\,000 + 3 \cdot 4\,000 = 252\,000$). S měsíčním platem 25 000 korun by za rok vydělal 300 000, tedy dostal přidáno nejdříve v prosinci ($300\,000 + 1 \cdot 5\,000 = 305\,000$).]

Z6–I–3

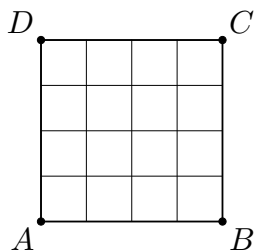
Vrcholy obdélníku $ABCD$ jsou mřížovými body čtvercové sítě a bod N je mřížovým bodem na straně AB :



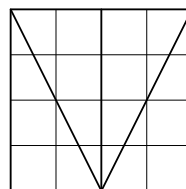
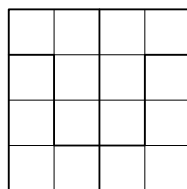
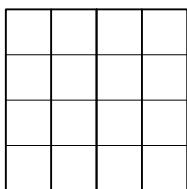
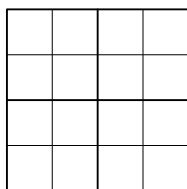
Rozdělte obdélník $ABCD$ třemi úsečkami se společným bodem N na čtyři části se stejnými obsahy.
(D. Kovalčíková)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

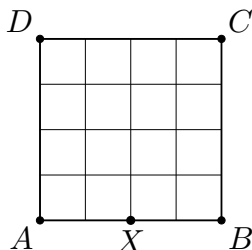
N1. Vrcholy čtverce $ABCD$ jsou mřížovými body čtvercové sítě. Najděte alespoň tři způsoby, jak rozdělit čtverec $ABCD$ na čtyři stejné útvary, jejichž vrcholy jsou mřížovými body čtvercové sítě.



[Několik možných rozdělení je naznačeno na obrázcích níže.]

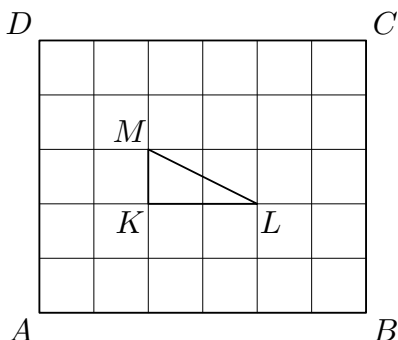


- N2. Vrcholy čtverce $ABCD$ jsou mřížovými body čtvercové sítě a bod X je mřížovým bodem na straně AB . Rozdělte čtverec $ABCD$ na čtyři části se společným bodem X a se stejnými obsahy.

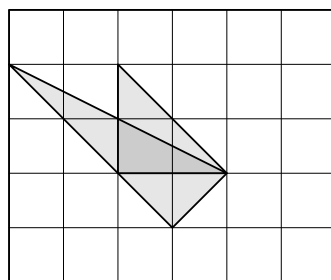
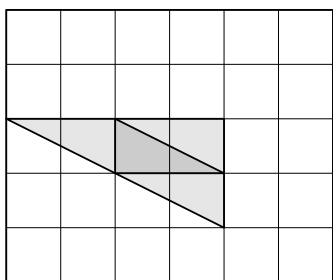


[Jedná se např. o poslední případ z řešení předchozí úlohy.]

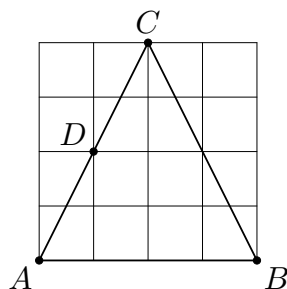
- N3. Vrcholy obdélníku $ABCD$ a trojúhelníku KLM jsou mřížovými body čtvercové sítě. Vyznačte trojúhelník, který má stejný obsah jako trojúhelník KLM , má s ním společnou právě jednu stranu a zbylý vrchol je mřížovým bodem obdélníku $ABCD$. Najděte alespoň šest řešení.



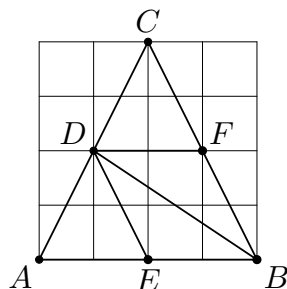
[Trojúhelníků, které vyhovují všem podmínkám a jsou shodné s trojúhelníkem KLM , je pět. Tři takové trojúhelníky jsou znázorněny na prvním obrázku níže, další tři trojúhelníky neshodné s KLM jsou na druhém obrázku. (Trojúhelníků se společnou stranou KM , KL , resp. LM je šest, sedm, resp. tři.)]



- D1. Vrcholy trojúhelníku ABC jsou mřížovými body čtvercové sítě a bod D je mřížovým bodem na straně AC . Rozdělte trojúhelník ABC na čtyři části se společným bodem D a se stejnými obsahy.



[Obsah trojúhelníku ABC odpovídá 8 čtverečkům sítě, tedy obsah každé části dělení bude odpovídat dvěma čtverečkům. Řešení je naznačeno na obrázku níže — koncové body dělicích úseček jsou mřížové body E , B , F .]



Z6–I–4

Veronika dostala jedno trojmístné a jedno dvojmístné číslo. Trojmístné číslo zaokrouhlila na stovky a dvojmístné zaokrouhlila na desítky. Rozdíl zaokrouhlených čísel byl 500.

Jaký nejmenší a jaký největší mohl být rozdíl nezaokrouhlených čísel? (M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Jindra si zapsal na řádek čísla 17, 49, 72, 65, 8. Všechna čísla zaokrouhlil na desítky a výsledky zapsal na další řádek pod původní čísla. Pro kterou dvojici čísel na prvním řádku platí, že jejich rozdíl se a) nejméně; b) nejvíce liší od rozdílu odpovídajících čísel na druhém řádku?

[Rozdíly na prvním a druhém řádku se liší a) nejméně o 1 pro dvojice 17, 8 a 49, 8; b) nejvíce o 7 pro dvojici 72, 65.]

- N2. Na běžeckém závodě doběhl Samuel do cíle před Erikem. Oba běželi celé počty minut, které po zaokrouhlení na desítky dávaly stejný výsledek. Tak to také Erik později podával, i když skutečný Samuelův čas byl o pětinu kratší než Erikův. Kolik minut mohl trvat závod každému z chlapců? Najděte všechny možnosti.

[Erikův čas v minutách byl násobkem pěti, Samuelův čas se zaokrouhloval nahoru. Buď Erik běžel 10 a Samuel 8 minut, nebo Erik běžel 20 a Samuel 16 minut.]

- N3. Klára měla dvě dvojmístná čísla. Když obě zaokrouhlila na desítky, byl rozdíl těchto zaokrouhlených čísel 40. Jaký nejmenší a jaký největší mohl být rozdíl nezaokrouhlených čísel?

[Při zaokrouhlení na desítky se číslo může zmenšit nanejvýš o 4 a zvětšit nanejvýš o 5. Rozdíl nezaokrouhlených čísel mohl být nejméně 31 a nejvíce 49.]

- D1. Jirka měl jedno trojmístné a jedno dvojmístné číslo. Trojmístné číslo zaokrouhlil na stovky a dvojmístné zaokrouhlil na desítky. Součet zaokrouhlených čísel byl 750, součet nezaokrouhlených čísel byl o 16 větší. Jaký nejmenší a jaký největší mohl být rozdíl nezaokrouhlených čísel?

[Součet 750 mohl vzniknout jedině jako $700 + 50$. Dvojmístné nezaokrouhlené číslo mohlo být v rozmezí od 45 do 54. Pro 45, resp. 54 je trojmístné nezaokrouhlené číslo 721, resp. 712. Rozdíl je 676, resp. 658, a to je největší, resp. nejmenší hodnota rozdílu nezaokrouhlených čísel.]

Z6–I–5

Peťa má ke každému dnu v týdnu přiřazenu barvu: pondělí modrou, úterý zelenou, středu bílou, čtvrtek červenou, pátek oranžovou, sobotu šedou a neděli hnědou. V těchto barvách nosí i ponožky, a to tak, že na pravé noze má ponožku barvy dne, avšak na levé noze nemá ponožku barvy tohoto dne, ani dne následujícího. (Např. v sobotu má na pravé noze šedou ponožku a na levé nemá šedou, ani hnědou.)

Určete, který je den, jestliže předevcírem měl Peťa na levé noze modrou ponožku, včera měl červenou a dnes má hnědou. (M. Dillingerová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících čtyřech úlohách nosí Peťa ponožky tak, jak je popsáno v soutěžní úloze.

- N1. Jednoho dne měl Peťa na levé noze zelenou ponožku. Jakou ponožku mohl mít tentýž den na pravé noze?

[Zelenou ponožku na levé noze mohl mít v jakýkoli den kromě pondělí a úterý. Na pravé noze tedy mohl mít bílou, červenou, oranžovou, šedou, nebo hnědou ponožku.]

- N2. Předevcírem měl Peťa na pravé noze červenou ponožku. Jakou ponožku nemůže mít zítra na levé noze?

[Předevcírem musel být čtvrtek, zítra tedy bude neděle. Zítra nemůže mít na levé noze hnědou, ani modrou ponožku.]

- N3. Dnes má Peťa na jedné noze zelenou a na druhé bílou ponožku. Co je dnes za den?

[Pokud má na pravé noze zelenou ponožku, pak je úterý. To ale nemůže mít na levé noze bílou ponožku, tedy tato možnost nevyhovuje. Pokud má na pravé noze bílou ponožku, pak je středa a zelenou ponožku na levé noze mít může. Dnes je středa.]

- D1. Včera měl Peťa na levé noze modrou a dnes červenou ponožku. Sestra mu doporučuje na levou nohu nasadit zítra znovu modrou ponožku a pozítří hnědou. Rozhodněte, zda se Peťa může obléct podle sestřina doporučení. Pokud ano, co je dnes za den?

[Z první a druhé informace plyne, že dnes není pondělí, ani úterý, ani středa, ani čtvrtek. Pokud by byl pátek, nemohl by si pozítří obléct hnědou. Pokud by byla sobota nebo neděle, nemohl by si zítra obléct modrou. Sestřino doporučení není slučitelné s Peťovými zvyklostmi.]

- D2. Alex má takový zvyk, že každou sobotu od 8 do 13 hodin lže a zbytek dne mluví pravdu. Podobně Saša každou sobotu od 13 do 18 hodin lže a zbytek dne mluví pravdu. Když se jednou v sobotu potkali, proběhl následující rozhovor:

Alex: „Rád tě vidím. Zrovna před hodinou jsem lhal.“

Saša: „To je náhoda, já jsem před hodinou také lhala.“

Kolik mohlo být zrovna hodin?

[Alex mohl svůj výrok pronést buď mezi 8. a 9. hodinou (nepravdivě), nebo mezi 13. a 14. hodinou (pravdivě). Saša mohla svůj výrok pronést buď mezi 13. a 14. hodinou (nepravdivě), nebo mezi 18. a 19. hodinou (pravdivě). Rozhovor proběhl mezi 13. a 14. hodinou.]

Z6–I–6

Obdélníkový park má obvod 228 metrů. Ve vrcholech obdélníku a na jeho stranách rostlo 38 okrasných keřů tak, že vzdálenosti mezi každými dvěma sousedními keři byly stejné. Na dvou protilehlých stranách obdélníku zasadil zahradník mezi každé dva keře jeden další. Tím zvýšil počet keřů po obvodu parku na 60.

Určete rozměry parku.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Zahradník osázel hranici obdélníkového záhonu jahodami tak, že rostliny byly v rozích a na stranách v pravidelných rozestupech 80 cm. Záhon měl rozměry 160 cm a 240 cm. Kolik rostlin zahradník zasadil?

[V rozích byly 4 rostliny, na každé z kratších stran jedna další, na každé z delších stran dvě další. Zahradník zasadil 10 rostlin.]

- N2. Mezi obcemi Počátky a Žirovnice se má po jedné straně cesty vysázet nové stromořadí. Nejprve chtějí vysadit v pravidelných rozestupech břízy, poté doprostřed mezi každé dvě břízy střídavě jabloně a třešně. Délka stromořadí od první po poslední břízu bude 5 km, vzdálenosti mezi sobě nejbližšími jabloněmi budou 40 metrů. Kolik bříz má být podle tohoto plánu vysazeno?

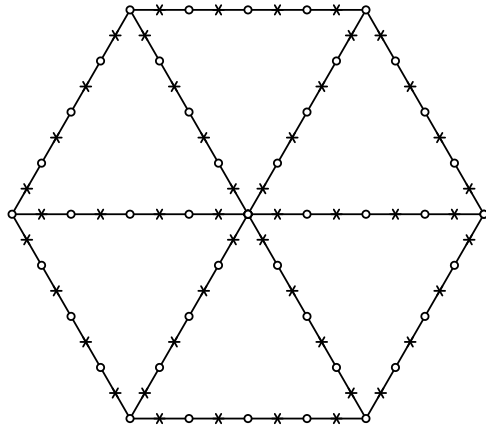
[Mezi sobě nejbližšími jabloněmi mají být dvě břízy. Vzdálenost sobě nejbližších bříz tak bude 20 metrů. Takových úseků se do 5 km vejde 250. Podle plánu mají vysázet 251 bříz.]

- N3. Alžběta pomocí kolíků vyznačila obdélníkové území s obsahem 24 čtverečních metrů. Kolíky byly v rozích a na stranách v pravidelných rozestupech 1 metr. Kolik kolíků potřebovala? Najděte všechny možnosti.

[Úvahy jsou podobné jako v úloze N1, avšak záleží na rozměrech obdélníku: pro rozměry 1 m a 24 m potřebovala 50 kolíků, pro rozměry 2 m a 12 m potřebovala 28 kolíků, pro rozměry 3 m a 8 m potřebovala 22 kolíků, pro rozměry 4 m a 6 m potřebovala 20 kolíků.]

- D1. Julián vytvořil na zahradě ornament ve tvaru pravidelného šestiúhelníku se stranou délky 120 cm. Ve vrcholech šestiúhelníku, na jeho stranách i na úhlopříčkách procházejících středem zasadil sedmikrásky v pravidelných rozestupech 30 cm. Na každé straně a každé úhlopříčce ještě mezi každé dvě sedmikrásky zasadil fialku. Kolik Julián zasadil sedmikrásek a kolik fialek?

[Pravidelný šestiúhelník je úhlopříčkami procházejícími středem rozdělen na šest stejných rovnostranných trojúhelníků. Ve vrcholech a ve středu šestiúhelníku je 7 sedmikrásek, mezi nimi na každé z 12 úseček jsou 3 další sedmikrásky a 4 fialky. Julián zasadil 43 sedmikrásek a 48 fialek.]



Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z7

Z7–I–1

Kolik existuje čtyřmístných čísel takových, že jejich třetina, polovina, dvojnásobek a trojnásobek jsou všechno čtyřmístná čísla? (M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Najděte

- nejmenší dvojmístný násobek pěti, jehož polovina je dvojmístné číslo;
- největší dvojmístný násobek šesti, jehož dvojnásobek je dvojmístné číslo;
- nejmenší dvojmístný násobek osmi, jehož pětina je dvojmístné číslo.

[a) Číslo je násobkem desíti, ne menší než 20, nejmenší vyhovující je 20. b) Číslo je násobkem šesti, ne větší než 49, největší vyhovující je 48. c) Číslo je násobkem čtyřiceti, ne menší než 50, jediné vyhovující je 80.]

N2. Připomeňte si znaky dělitelnosti dvěma, třemi a šesti. Poté z číslic 2, 2, 5, 9 sestavte největší čtyřmístné číslo dělitelné šesti, které je menší než 5 123.

[Formulace i se zdůvodněními najdete v učebnicích nebo na internetu.[?] Mezi danými číslicemi jsou sudé číslice a součet všech číslic je 18, což je číslo dělitelné třemi. Tedy z daných číslic lze sestavit čísla dělitelná šesti, největší vyhovující je 2 952.]

N3. Kolik je sudých čísel větších než 123 a menších než 321?

[Vyhovující čísla jsou $124 = 2 \cdot 62$, $126 = 2 \cdot 63$, ..., $320 = 2 \cdot 160$. Těchto čísel je 99 ($= 160 - 62 + 1$).]

D1. Zjistěte, kolik pětímístných čísel má následující dvě vlastnosti:

- v čísle se opakuje jedna číslice třikrát, zbylé dvě číslice jsou různé,
- třicetina tohoto čísla je trojmístné číslo.

[Podle druhé podmínky se jedná o pětímístná čísla dělitelná třemi a desíti, která jsou menší než 30 000. Tedy číslice na posledním místě je 0 a na prvním místě je buď 1, nebo 2. Podle první podmínky se některá číslice opakuje třikrát. Pokud se opakují tři prostřední číslice, pak ciferný součet (tedy i číslo samotné) není dělitelný třemi. Takové číslo není žádné. Pokud se třikrát opakuje první číslice (1 nebo 2), potom zbylá číslice může být 3, 6, nebo 9, a to na třech možných místech. Takových čísel je $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$. Pokud se třikrát opakuje poslední číslice (0) a první číslice je 1, resp. 2, potom zbylá číslice může být 2, 5, nebo 8, resp. 1, 4, nebo 7, a to pokaždé na třech možných místech. Takových čísel je $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$. Všech vyhovujících čísel je $18 + 18 = 36$.]

[?] Viz např. [Wikipedii](#).

Z7–I–2

V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je bod G středem úhlopříčky AE .

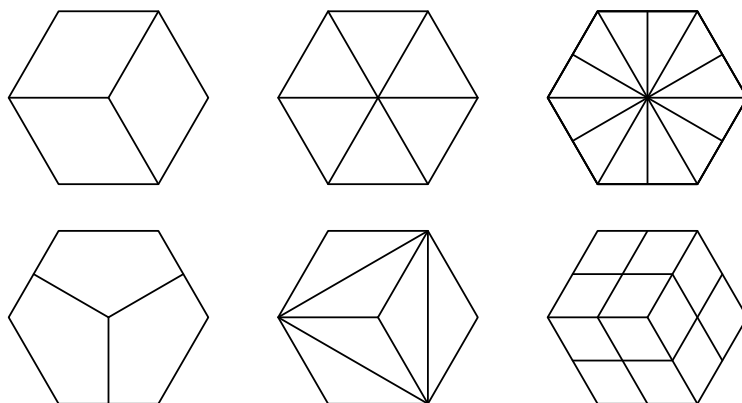
Určete poměr obsahů trojúhelníku ADG a šestiúhelníku $ABCDEF$.

(E. Semerádová)

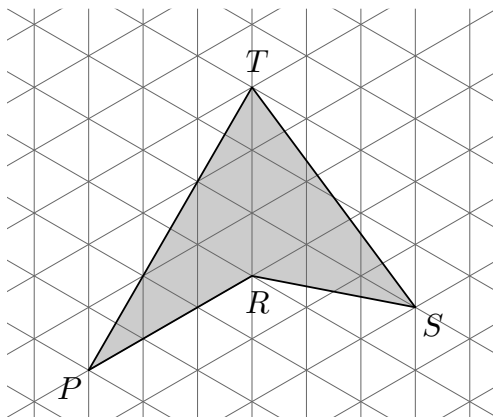
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Najděte alespoň dva způsoby, jak rozdělit pravidelný šestiúhelník na a) tři; b) šest; c) dvanáct navzájem shodných částí.

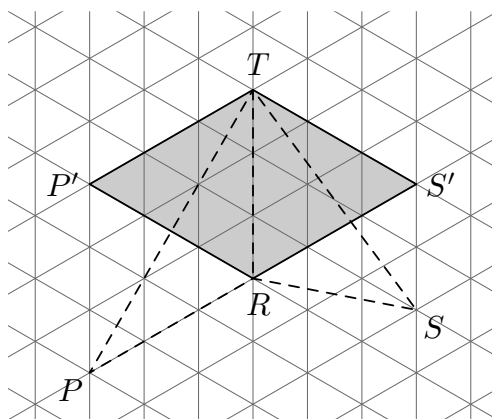
[Několik možných rozdělení je naznačeno na obrázcích níže.]



- N2. Vrcholy čtyřúhelníku $PRST$ jsou mřížovými body trojúhelníkové sítě, jejíž základní trojúhelník má obsah 1 cm^2 . Určete obsah čtyřúhelníku $PRST$.

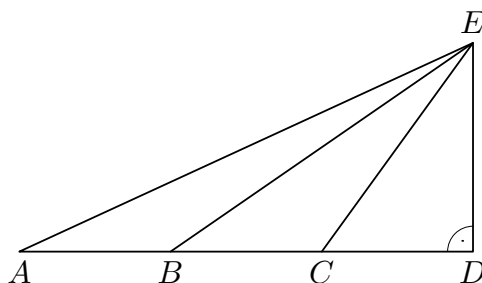


[Trojúhelníky RTP a RTP' , resp. trojúhelníky RTS a RTS' na následujícím obrázku mají stejný obsah (mají společnou stranu RT a stejné výšky na tuto stranu). Tedy čtyřúhelník $PRST$ má stejný obsah jako čtyřúhelník $P'RS'T$, a to je kosočtverec sestávající z 18 základních trojúhelníků. Čtyřúhelník $PRST$ má obsah 18 cm^2 .]



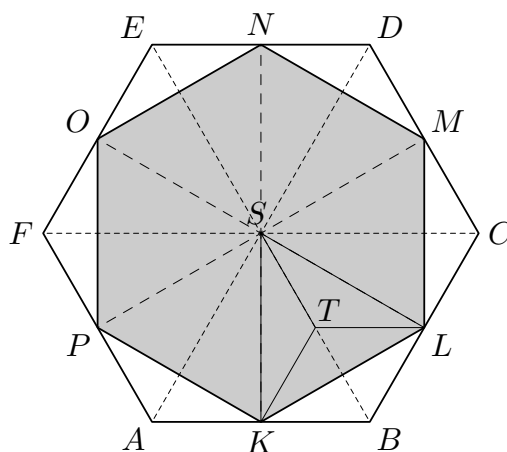
- N3. Trojúhelník ADE je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu D . Na straně AD jsou body B a C tak, že $|AB| = |BC| = |CD|$. Popište vztahy mezi obsahy trojúhelníků ADE , ABE , BCE a BDE .

[Všechny trojúhelníky mají společný vrchol E a stejné odpovídající výšky. Tedy vztahy mezi jejich obsahy jsou stejné jako vztahy mezi stranami protilehlými vrcholu E . Pro obsahy trojúhelníků platí $S_{ABE} = S_{BCE} = 1/3 S_{ADE}$ a $S_{BDE} = 2 S_{BCE} = 2/3 S_{ADE}$.]



- D1. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou body K, L, M, N, O, P postupně středy jeho stran. Určete poměr obsahů šestiúhelníků $ABCDEF$ a $KLMNOP$.

[Šestiúhelníky mají společný střed S . Trojúhelník KLS je rovnostranný a lze jej rozdělit na tři shodné rovnoramenné trojúhelníky se společným vrcholem T . Ty jsou shodné s trojúhelníkem KBL , tedy poměr obsahů čtyřúhelníku $KBLS$ a trojúhelníku KLS je $4 : 3$. Ze souměrností celého útvaru plyne, že stejný poměr je také mezi obsahy šestiúhelníků $ABCDEF$ a $KLMNOP$.]



Z7–I–3

Pan Komický, Elegantní a Vážný se znají z golfu. Jeden se jmenuje Karel, jeden Erik a jeden Viktor. Jeden nosí kravatu barvy krémové, jeden barvy ebenové a jeden barvy vínové.

- *Výherce posledního utkání nosí ebenovou kravatu.*
- *Pan Elegantní nebyl nikdy na návštěvě u pana Komického.*
- *Viktor nosí krémovou kravatu.*
- *Panu Komickému připadá vtipné, že nikdy nevyhrál.*
- *Karel byl po posledním utkání u pana Komického.*
- *Pan Vážný nosí vínovou kravatu.*

Zjistěte, jaké je vlastní jméno každého z pánů a jakou kdo nosí kravatu.

(E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Zebra, žirafa, slonice a tygřice se každá věnuje jinému zimnímu sportu.

- Zebra, ani žirafa nesáňkuje.
- Slonice nelyžuje.
- Tygřice nehraje hokej.
- Zebra se přátelí s lyžařkou a hokejistkou.
- Tygřice se přátelí s bobistkou a sánkařkou.

Zjistěte, který sport kdo provozuje.

[Zebra nesáňkuje, nelyžuje, ani nehraje hokej, tedy bobuje. Tygřice nehraje hokej, nebobuje, ani nesáňkuje, tedy lyžuje. Žirafa nesáňkuje, nebobuje, ani nelyžuje, tedy hraje hokej. Na slonici zbývá sáňkování (což je v souladu s informací ze zadání).]

N2. Pan režisér Alík potřeboval do televizní pohádky čtyři psy. Dostal nabídku z Řecka, Belgie, Irska a z Dolní Lhoty. Vybral ovčáka, dalmatina, vlkodava a jezevčíka, každého z jiné země, s různým jménem a různým věkem.

- Nejstarší ze psů byl jezevčík, bylo mu 5 let.
- Bucki byl z nich druhý nejmladší.
- Vlkodav pocházel z Irska.
- Pes z Dolní Lhoty se jmenoval Punťa.
- Oddi oslavil včera své čtvrté narozeniny.
- Ovčák pocházel z Belgie.
- Rubby nebyl dalmatin.
- Vlkodav měl tři roky.
- Nejmladší z vybraných psů byl Rubby, byly mu dva roky.

Zjistěte, jak se každý vybraný pes jmenoval, odkud pocházel, jaké byl rasy a kolik mu bylo let.

[Všechny vztahy lze postupně doplňovat do tabulky níže; kurzívou jsou vyznačeny bezprostřední postřehy ze zadání, ostatní jsou odvozené.[?]]

věk	2 roky	3 roky	4 roky	5 let
rasa	ovčák	<i>vlkodav</i>	dalmatin	<i>jezevčík</i>
jméno	<i>Rubby</i>	<i>Bucki</i>	<i>Oddi</i>	Punťa
země	Belgie	Irsko	Řecko	Dolní Lhota

D1. Ve třech sousedních domech v řadové zástavbě žily Xenie, Yveta a Zita se svými mazlíčky. Jedna chovala morče, jedna psa a jedna kočku.

- Xenie bydlí vedle domu se psem.
- Morče a kočka nebydlí v sousedních domech.
- Zita nemá kočku.
- Morče nebydlí vedle Yvety.

S kým bydlí pes?

[Podle druhé informace bydlí v krajních domech morče a kočka, v prostředním pes. Podle první informace bydlí Xenie v některém z krajních domů. Podle zbylých informací bydlí Yveta buď s morčetem, nebo s kočkou a Zita se psem.]

D2. Do třídy přibyl nový žák, o kterém se vědělo, že kromě angličtiny umí výborně ještě jeden cizí jazyk. Tři spolužáci se dohadovali, který jazyk to je.

První soudil: „Francouzština to není.“

Druhý hádal: „Je to španělština nebo němčina.“

Třetí usuzoval: „Je to španělština.“

[?] Převzato ze 70. ročníku MO, úloha **Z5–I–3**.

Záhy se dozvěděli, že to opravdu byl jeden z těchto tří jazyků a že alespoň jeden ze spolužáků hádal správně a alespoň jeden nesprávně.

Určete, který ze jmenovaných jazyků nový žák ovládal.

[Kdyby tím jazykem byla francouzština, pak by všichni tři spolužáci hádali nesprávně.

Kdyby to byla španělština, pak by všichni tři hádali správně. Kdyby to byla němčina, pak by první dva hádali správně a třetí nesprávně. Nový žák ovládal němčinu.[?]]

Z7–I–4

Adéla, Beáta, Šárka a Jitka si natrhaly třešně. Beáta jich měla pětkrát víc než Adéla, Šárka měla o 15 třešní víc než Beáta, Jitka měla o 200 víc než Adéla.

O kolik nejméně se mohly lišit počty třešní Šárky a Jitky? A kolik třešní by v takovém případě měla každá z dívek? (K. Pazourek)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Pro neznámé číslo platí, že jeho trojnásobek je menší než toto číslo zvětšené o 33. Najděte všechna přirozená čísla s touto vlastností.

[Pro neznámé číslo n má platit $3n < n + 33$ neboli $n < 16,5$. Vyhovuje prvních 16 přirozených čísel.]

- N2. Najděte nejblíží násobek sedmi k nejblížímu násobku patnácti k největšímu sudému trojmístnému číslu.

[Největší sudé trojmístné číslo je 998. Nejblíží násobek patnácti k 998 je 1005 ($= 15 \cdot 67$). Nejblíží násobek sedmi k 1005 je 1008 ($= 7 \cdot 144$), a to je hledané číslo.]

- N3. Pro přirozená čísla a, b, c, d platí, že b je o 5 větší než a a d je o 8 menší než c . O kolik se mohou lišit

- a) rozdíly $a - c$ a $b - d$;
- b) součty $a + c$ a $b + d$;
- c) součty $a + b$ a $c + d$?

[Platí $b = a + 5$ a $d = c - 8$. a) Odtud $b - d = a - c + 13$, tedy uvedené rozdíly se liší o 13. b) Dále $b + d = a + c - 3$, tedy uvedené součty se liší o 3. c) Dále $a + b = 2a + 5$ a $c + d = 2c - 8$, tedy uvedené součty se mohou lišit o jakoukoli lichou hodnotu (první číslo je liché, druhé sudé).]

- D1. Adam, Bořek a Čenda porovnávali, kolik kg kaštanů nasbírali. Zjistili, že aritmetický průměr toho, co nasbíral Adam s Bořkem, je o 10 kg větší než Čendův příspěvek. Aritmetický průměr toho, co nasbíral Adam s Čendou, je o 3 kg menší než Bořkův příspěvek. Určete rozdíl mezi aritmetickým průměrem toho, co nasbíral Bořek s Čendou, a Adamovým příspěvkem.

[Množství kaštanů (v kg) nasbírané jednotlivými chlapci označíme jejich počátečními písmeny, hledaný rozdíl označíme x :

$$\frac{a+b}{2} = c + 10, \quad \frac{a+c}{2} = b - 3, \quad \frac{b+c}{2} = a - x.$$

[?] Převzato ze 68. ročníku MO, úloha Z8–I–2.

Součet těchto tří rovnic dává $a + b + c = a + b + c + 7 - x$ neboli $x = 7$. Hledaný rozdíl je 7 kg.[?]]

Z7–I–5

Václav měl několik bílých kostek. Na každé kostce nabarvil tři různé stěny třemi různými barvami, a to červenou, zelenou a modrou. Poté roztrídil kostky do skupin podle typu obarvení tak, že všechny kostky v jedné skupině vypadaly po vhodném otočení stejně.

Kolik nejvýše skupin mohl Václav vytvořit? (I. Jančígová)

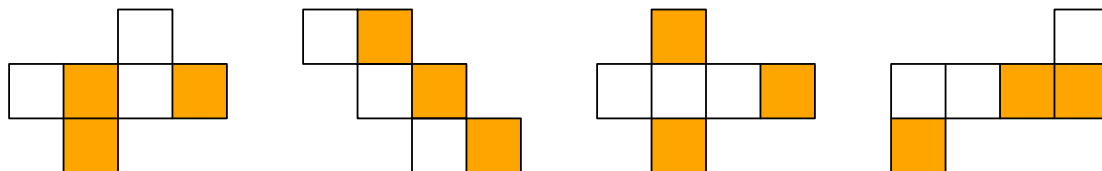
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících čtyřech úlohách jsou různými obarveními útvaru myšlena taková obarvení, která po žádném otočení útvaru nevypadají stejně (to v soutěžní úloze odpovídá různým Václavovým skupinám).

N1. Kolika různými způsoby lze obarvit a) dvě; b) tři stěny bílé krychle na oranžovo?

[a) Dvěma způsoby (obarvené stěny jsou buď sousední, nebo protilehlé). b) Dvěma způsoby (obarvené stěny buď mají společný vrchol, nebo po rozvinutí tvoří pás).]

N2. Rozdělte následující obarvené sítě do skupin tak, aby po jejich složení byly různé obarvené krychle v různých skupinách.



[Složené krychle jsou znázorněny níže. Skupiny jsou dvě (viz předchozí úlohu): první a třetí případ patří do jedné skupiny, druhý a čtvrtý do druhé.]

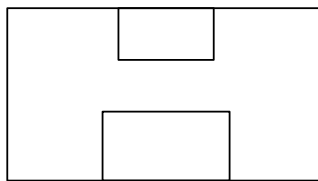
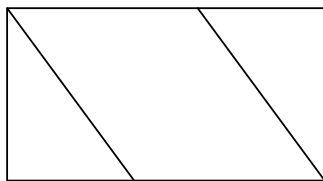


N3. Kolika různými způsoby lze obarvit tři stěny bílé krychle tak, aby jedna stěna byla modrá a dvě červené?

[Jeden způsob je pro obarvené stěny se společným vrcholem, dva pro obarvené stěny bez společného vrcholu (v rozvinutém pásu je modrá buď uprostřed, nebo na kraji). Celkem rozlišujeme tři způsoby.]

D1. V obchodě mají dva druhy obdélníkových ubrusů se vzory jako na obrázku. Trojúhelníkové části u prvního vzoru jsou shodné, obdélníkové části u druhého nejsou shodné. U každého ubrusu mají jeho tři části navzájem různé barvy, a to červenou, zelenou a modrou. Žádné dva ubrusy v obchodě nejsou obarveny stejně. Kolik ubrusů je v obchodě?

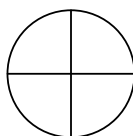
[?] Převzato ze 71. ročníku MO, úloha Z9–I–1.



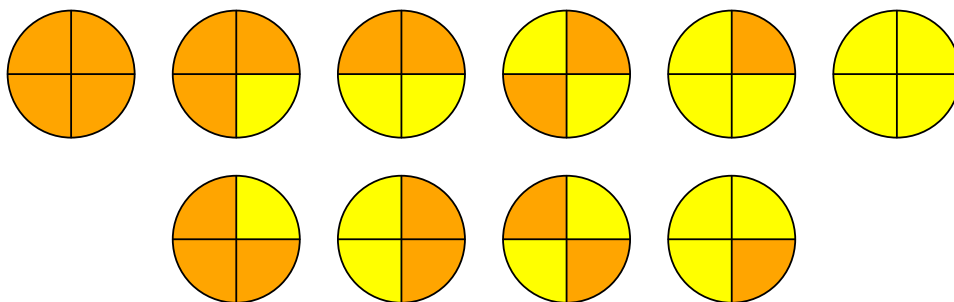
[V obou případech je všech možných obarvení šest (3 barvy pro jednu část, 2 zbylé barvy pro druhou a barva pro třetí část zbývá jediná). Levý obrazec je středově souměrný, tj. při otočení o 180° si trojúhelníkové části odpovídají. Různá obarvení jsou určena barvou prostření části, tedy jsou tři. V pravém obrazci si jeho části neodpovídají při žádném otočení, tedy různých obarvení je šest. V obchodě je devět ubrusů.]

D2. Následující obrazec je kruh rozdělený dvěma kolmými průměry na části. Obarvěte jeho čtyři části dvěma barvami tak, aby žádná část nezůstala neobarvená. Zjistěte, kolika různými způsoby to lze udělat, pokud za různá obarvení považujeme taková, která nevypadají stejně po

- a) žádné osové souměrnosti;
- b) žádné středové souměrnosti;
- c) žádném otočení.



[Všech možných obarvení je 16 (na každou z částí lze použít dvě barvy a části jsou čtyři). a) Až na osové souměrnosti rozlišujeme 6 způsobů, viz první řádek na obrázku níže. b) Až na středové souměrnosti rozlišujeme 10 způsobů, viz všechny možnosti na obrázku níže. c) Až na otáčení rozlišujeme 6 způsobů, a ty se shodují s těmi v a).]



Z7–I–6

Pro čtyřúhelník $ABCD$ platí:

- strana AD a úhlopříčka BD jsou shodné,
- úhlopříčka BD a strana DC jsou kolmé,
- strany AB a BC jsou kolmé,
- osa úhlu BDC a strana AD jsou kolmé.

Určete velikost úhlu BCD .

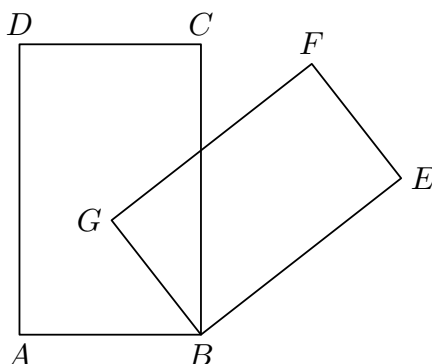
(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. V trojúhelníku ABC jsou velikosti vnitřních úhlů u vrcholů A a B po řadě 56° a 108° . Bod S je průsečíkem os jeho vnitřních úhlů. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků ABS , BCS a CAS .

[Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180° a osa úhlu příslušný úhel půlí. S těmito poznatky postupně odvodíme, že velikost úhlu ACB je 16° , velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABS jsou 28° , 54° , 98° , v trojúhelníku BCS jsou 54° , 8° , 118° a v trojúhelníku CAS jsou 8° , 28° , 144° .]

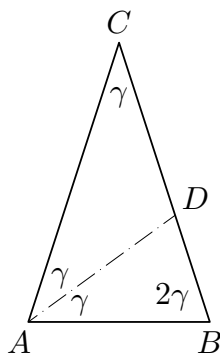
- N2. Pro dva obdélníky $ABCD$ a $BEFG$ se společným vrcholem B platí, že velikost úhlu ABG je 52° . Určete velikost úhlu CBE .



[Obdélníky sdílí společný úhel GBC a u vrcholu B mají stejné vnitřní (pravé) úhly. Tedy $\sphericalangle ABG + \sphericalangle GBC = \sphericalangle GBC + \sphericalangle CBE$ ($= 90^\circ$), a proto $\sphericalangle CBE = \sphericalangle ABG$. Velikost úhlu CBE je 52° .]

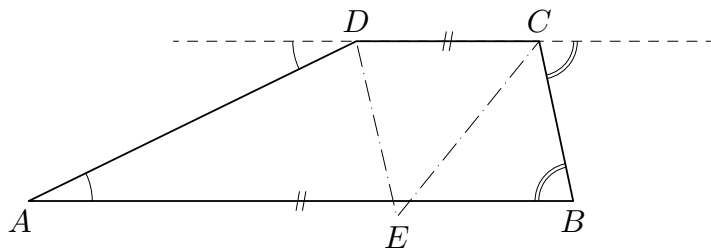
- N3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a bod D , který je průsečíkem strany BC a osy úhlu BAC . Dále platí, že úsečky AD a DC jsou shodné. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC .

[Trojúhelník ACD je rovnoramenný s rameny AD a DC , tedy $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA$, a tento úhel označíme γ . Úsečka AD je osou úhlu BAC , tedy $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC = \gamma$. Trojúhelník ABC je rovnoramenný s rameny AC a CB , tedy $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CAB = 2\gamma$. Součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABC je $5\gamma = 180^\circ$, tedy $\gamma = 36^\circ$. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC jsou 72° , 72° a 36° .]



- D1. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD jsou velikosti vnitřních úhlů u vrcholů A a B po řadě 26° a 78° . Bod E je průsečíkem os vnitřních úhlů u vrcholů C a D . Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku CDE .

[Základny jsou rovnoběžné, tedy vnější úhly u vrcholů C , resp. D jsou shodné s vnitřními úhly u vrcholů B , resp. A (střídavé úhly). Součtem vnějšího a vnitřního úhlu je přímý úhel a osa úhlu příslušný úhel půlí. S těmito poznatky postupně odvodíme, že velikosti úhlů BCD , resp. ADC jsou 102° , resp. 154° , velikosti úhlů ECD , resp. EDC jsou 51° , resp. 77° a velikost úhlu CED je 52° . Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku CDE jsou 51° , 77° a 52° .]



Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z8

Z8–I–1

Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p_1, p_2, p_3 , pro která platí

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_3 - p_1) = 195.$$

(E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Vyberte všechny trojice jednomístných prvočísel $p_1 < p_2 < p_3$ a určete výsledek součinu

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_3 - p_1).$$

[Jednomístná prvočísla jsou 2, 3, 5, 7. Z nich lze vybrat čtyři vzestupně uspořádané trojice s odpovídajícími výsledky 3, 5, 15 a 8.]

- N2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x a y , pro která platí

$$(x - y) \cdot (x + y) = 105.$$

[Číslo 105 lze rozložit na součin dvou přirozených čísel následujícími způsoby:

$$105 = 1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15.$$

Číslo x je větší než y a první součinitel v předchozím rozkladu prozrazuje o kolik. Hledané dvojice x, y jsou 53, 52; 19, 16; 13, 8 a 11, 4.]

- N3. Najděte všechny dvojice prvočísel, pro která platí, že součin jejich součtu a jejich rozdílu je roven 117.

[Jako v předchozí úloze se určí rozklady čísla 117 na dva součinitele a odpovídající dvojice čísel 59, 58; 21, 18 a 11, 2. Pouze poslední dvojici tvoří prvočísla. Jediná vyhovující dvojice je 11, 2.]

- D1. Najděte všechny dvojice navzájem různých prvočísel p_1 a p_2 , pro která platí

$$p_1 \cdot (p_1 + p_2) \cdot (p_1 - p_2) = 315.$$

[Číslo p_1 je větší než p_2 a součinitelé jsou uspořádáni takto: $(p_1 - p_2) < p_1 < (p_1 + p_2)$. Možné rozklady čísla 315 s prostředním součinitelem prvočíslem jsou:

$$315 = 1 \cdot 3 \cdot 105 = 1 \cdot 5 \cdot 63 = 3 \cdot 5 \cdot 21 = 1 \cdot 7 \cdot 45 = 3 \cdot 7 \cdot 15 = 5 \cdot 7 \cdot 9.$$

Jedině v posledním případě jsou rozdíly mezi sousedními součiniteli stejné. Jediná vyhovující dvojice je $p_1 = 7$ a $p_2 = 2$.]

Z8–I–2

Pro rovnoběžníky $ABCD$ a $KLMN$ platí:

- bod K je středem úsečky CD ,
- bod K je průsečíkem přímky CD s osou úsečky BC ,
- bod L je průsečíkem přímky AB s osou úsečky CD ,
- bod N je průsečíkem přímky AB s osou úsečky BC ,
- úhel BAD má velikost 60° .

Určete poměr obsahů rovnoběžníků $ABCD$ a $KLMN$.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. V obdélníku $ABCD$ je bod M středem strany AB . Určete poměr obsahů trojúhelníku AMD a čtyřúhelníku $MBCD$.

[Střed strany CD označíme N . Úsečka MN dělí obdélník na dva shodné obdélníky. Úhlopříčka MD dělí obdélník $AMND$ na dva shodné trojúhelníky, z nichž jeden je AMD . Hledaný poměr obsahů je $1 : 3$.]

- N2. V trojúhelníku ABC platí, že bod M je středem strany AC a úsečky MA , MB a AB jsou shodné. Určete poměr obsahů trojúhelníků ABM a MBC .

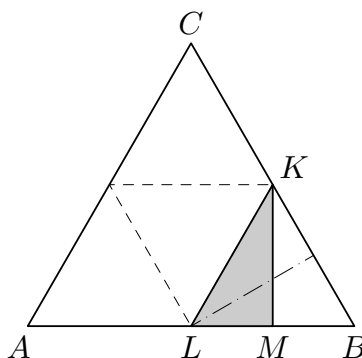
[Trojúhelníky ABM a MBC mají společnou výšku z vrcholu B . Tedy poměr jejich obsahů je stejný jako poměr délek stran AM a MC , a ten je $1 : 1$. (Upřesnění o úsečkách MA , MB a AB není podstatné.)]

- N3. Na stranách rovnostranného trojúhelníku ABC jsou body K , L a M tak, že platí:

- bod K je středem strany BC ,
- bod L je průsečíkem strany AB s osou úsečky KB ,
- bod M je středem úsečky BL .

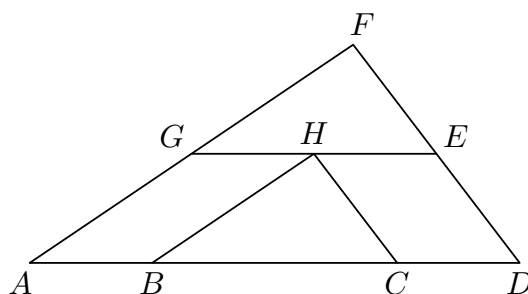
Určete poměr obsahů trojúhelníků KLM a ABC .

[Ze zadání plyne, že trojúhelník KLB je rovnostranný. Tedy L je středem strany AB a celý trojúhelník ABC lze rozdělit na čtyři trojúhelníky shodné s KLB . Úsečka KM dělí trojúhelník KLB na dvě shodné části. Hledaný poměr obsahů je $1 : 8$.]

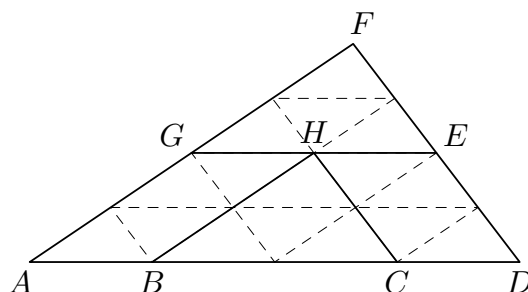


- D1. Obecný trojúhelník ADF je rozdělen na dva trojúhelníky GEF a BCH a dva rovnoběžníky $ABHG$ a $CDEH$. Trojúhelníky GEF a BCH jsou shodné a bod H leží na

těžnici trojúhelníku ADF procházející vrcholem F . Určete poměr obsahů trojúhelníku GEF a rovnoběžníku $CDEH$.



[Ze zadaných vztahů plyne, že úsečka GE je střední příčkou trojúhelníku ADF , bod H je jejím středem a všechny čtyři dílčí útvary mají stejné výšky na strany rovnoběžné s AD . Tedy všechny čtyři dílčí útvary mají stejné obsahy. Hledaný poměr je $1 : 1$. (Stejný závěr lze odvodit z pomocného dělení na menší shodné trojúhelníky, viz obrázek níže.)]



Z8–I–3

Tomáš sbírá pohlednice z Islandu, Anglie a Norska. Z každé země má alespoň jednu pohlednici, celkem jich má 40. Pohlednic z Anglie má více než pohlednic z Norska. Pohlednic z Islandu má více než pětinašobek a méně než šestinašobek počtu pohlednic z Anglie.

Ze kterých zemí jsou pohlednice, jejichž počet v Tomášově sbírce lze určit jednoznačně?
(E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Laura, Aleš a Ivan sbírali na táboře kešky. Každý našel alespoň jednu, dohromady jich nasbírali 23 a Laura jich nasbírala pětikrát tolik co Ivan. Kolik kešek mohl nasbírat Aleš? Určete všechny možnosti.

[Ivan měl nejméně 1 a nejvíce 3 kešky (pro 4 a více by Laura měla 20 a více, tedy dohromady více než 23). Pokud měl Ivan 1, 2, resp. 3 kešky, pak Laura měla 5, 10, resp. 15 a Aleš jich měl 17, 11, resp. 5.]

N2. Jakub dal kamarádům za úkol uhodnout číslo, které si myslí. Prozradil, že se jedná o dvojmístné číslo menší než sedminásobek největšího jednomístného čísla a větší než druhá mocnina počtu dnů v týdnu. Kdyby navíc svoje číslo vydělil osmi, dostal by

počet svých kšiltovek. Mohou kamarádi určit Jakubovo myšlené číslo, i když neznají počet jeho kšiltovek?

[Číslo je v rozmezí od 49 do 63 a je dělitelné osmi, tedy to může být jediné číslo 56. Jakubovo číslo určit lze, i když počet kšiltovek není předem znám (z výsledku plyne, že jich bylo 7).]

- N3. Andrea sbírá pohlednice z Arménie, Belgie a Číny. Z každé země má alespoň jednu pohlednici. Pohlednic z Arménie má méně než pohlednic z Belgie. Pohlednic z Číny má více než pětinašobek a méně než šestinašobek počtu pohlednic z Belgie. Zdeněk se z těchto informací snažil zjistit, kolik vlastně má Andrea pohlednic, a nevěděl si rady. Andrea mu pomohla sdělením, že v jejím případě jsou těmito omezeními počty pohlednic z jednotlivých zemí popsány jednoznačně. Kolik má Andrea pohlednic?

[Počet pohlednic z Číny je danými omezeními popsán jednoznačně, pouze když pohlednice z Belgie jsou 2. Pohlednic z Číny je 11 a pohlednice z Arménie je 1. Andrea má 14 pohlednic.]

- D1. Libor sbírá pohlednice z Andorry, Brazílie, Černé Hory a Dánska, celkem jich má méně než 40. Pohlednic z Brazílie má více než dvojnásobek a méně než trojnásobek počtu pohlednic z Andorry. Pohlednic z Černé Hory má více než pohlednic z Andorry a méně než pohlednic z Brazílie. Pohlednic z Dánska má dvakrát tolik co pohlednic z Brazílie. Kolik nejméně a kolik nejvíce pohlednic může mít Libor?

[Pohlednice z Andorry byly nejméně 2 a nejvíce 4 (kdyby byla žádná nebo 1, nevyhovovala by podmínka na počet pohlednic z Brazílie; kdyby jich bylo více než 4, nevyhovovala by podmínka na celkový počet pohlednic). Libor mohl mít nejméně 20 pohlednic (2 z Andorry, 3 z Černé Hory, 5 z Brazílie, 10 z Dánska) a nejvíce 39 pohlednic (4 z Andorry, 8 z Černé Hory, 9 z Brazílie, 18 z Dánska, nebo 4 z Andorry, 5 z Černé Hory, 10 z Brazílie, 20 z Dánska).]

Z8–I–4

Žáci napsali první písemku s průměrným hodnocením 84 bodů. Stejní žáci napsali druhou písemku s průměrným hodnocením 70 bodů. Čtyři z těchto žáků měli v obou písemkách po 63 bodech. Průměrné hodnocení ostatních žáků ve druhé písemce bylo 72 bodů.

Určete průměrné hodnocení ostatních žáků v první písemce. (I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Adam, Bořek, Cyril, Dan a Emil porovnávali svoje časy v běhu na 60 metrů. Bořek doběhl stejně jako Cyril za 11,2 vteřin, Emil doběhl za 9,3 vteřin a Dan za 10,8 vteřin. Adam svůj čas nechtěl prozradit, ale všichni věděli, že jejich průměrný čas byl 10,6 vteřin. Jaký byl Adamův čas?

[Součet časů všech pěti chlapců byl stejný jako pětinašobek průměrného času. Adamův čas byl 10,5 vteřin ($5 \cdot 10,6 = 53 = 10,5 + 2 \cdot 11,2 + 9,3 + 10,8$).]

- N2. Během jednoho roku zachránil šestičlenný tým superhrdinů řadu měst, průměrně každý 11. Thor, Hulk a Iron Man zachránili každý stejné množství měst, Kapitán Amerika jich zachránil 5, Ant-Man 7 a Hawkeye 6. Kolik měst zachránil Hulk?

[Součet měst, které zachránili jednotliví superhrdinové, je stejný jako šestinásobek průměrného počtu. Hulk (stejně jako Thor a Iron Man) zachránil 16 měst ($6 \cdot 11 = 66 = 3 \cdot 16 + 5 + 7 + 6$).]

- N3. Průměrná výška deseti nejvyšších hor světa je 8 378 metrů nad mořem. Jak by se změnila průměrná výška, pokud bychom z tohoto seznamu vynechali Annapurnu (8 091 m), K2 (8 611 m) a Makalu (8 485 m)?

[Součet výšek deseti nejvyšších hor je 83 780 m, součet výšek vynechaných hor je 25 187 m. Průměrná výška zbylých sedmi hor je přibližně 8 370 m ($(83\,780 - 25\,187)/7 \doteq 8\,370$).]

- D1. V základní škole U Tří dubů, kam chodí i Zikmund, každoročně pořádají vědomostní soutěž, v níž každý soutěžící může získat nejvíce 15 bodů. Letos byl průměrný bodový zisk soutěžících zaokrouhlený na desetiny roven 10,4. Zikmund si po soutěži uvědomil, že jednu otázku si špatně přečetl a odpovídal na něco jiného. Mohl tak mít o 4 body více a průměrný bodový zisk zaokrouhlený na desetiny by se tím zvýšil na 10,6. Určete, kolik nejméně a kolik nejvíce dětí letos U tří dubů soutěžilo.

[Pracujeme se zaokrouhlenými čísly, tedy skutečný průměrný bodový zisk mohl být v rozmezí od 10,35 včetně po 10,45 vyjma. Pokud n značí počet účastníků soutěže a c celkový součet bodů získaných všemi soutěžícími, potom spolu s další podmínkou ze zadání dostáváme:

$$10,35 \leq \frac{c}{n} < 10,45, \quad 10,55 \leq \frac{c+4}{n} < 10,65.$$

Odtud po úpravách plyne $40/3 < n < 40$. Soutěže se zúčastnilo nejméně 14 a nejvíce 39 dětí.[?]]

Z8–I–5

Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 6 cm a přímka p procházející bodem S . Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby platilo:

- vrcholy A a B leží na přímce p ,
- kružnice k se dotýká strany CD ,
- kružnice k protíná stranu AD v bodě K a stranu BC v bodě L ,
- $|AK| = |CL| = 1,5$ cm.

(M. Petrová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Narýsujte čtverec $ABCD$ o straně délky 5 cm. Poté narýsujte kružnici vepsanou a kružnici opsanou čtverci $ABCD$.

[Obě kružnice mají střed ve středu čtverce, tj. v průsečíku úhlopříček AC a BD . Poloměr kružnice vepsané, resp. opsané se shoduje s polovinou strany, resp. úhlopříčky čtverce. Body dotyku vepsané kružnice leží na kolmicích ke stranám čtverce procházejících jeho středem.]

[?] Převzato ze 73. ročníku MO, úloha Z9–I–3.

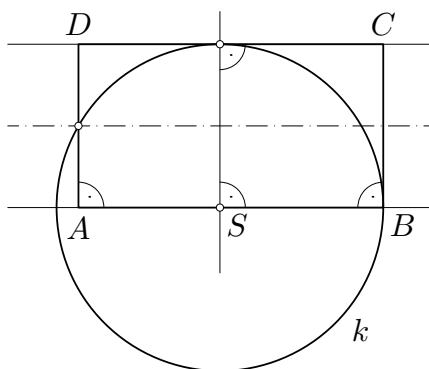
N2. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 4 cm. Narýsujte obdélník $ABCD$, jehož strany AB , CD a AD se dotýkají kružnice k a délky stran BC a CD jsou v poměru 2 : 3.

[Průměr kružnice k se shoduje se stranami AD a BC . Tedy $|AD| = |BC| = 8$ cm a následně $|AB| = |CD| = 12$ cm. Konstrukci lze začít s libovolným průměrem kružnice k a využít kolmostí stran obdélníku na odpovídající průměry v bodech dotyku.]

N3. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 6 cm. Narýsujte obdélník $ABCD$ tak, aby platilo:

- bod S leží na straně AB ,
- bod B leží na kružnici k ,
- kružnice k se dotýká strany CD ,
- kružnice k protíná stranu AD v jejím středu.

[Poloměr kružnice k se shoduje se stranami AD a BC . Průsečík kružnice k a strany AD leží na ose souměrnosti obdélníku kolmé k těmto stranám, a to je přímka rovnoběžná se stranou AB ve vzdálenosti 3 cm. Konstrukci lze začít s libovolným průměrem kružnice k a využít kolmostí stran obdélníku na odpovídající průměry v bodech dotyku.]



D1. Je dána kružnice k se středem S . Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby platilo:

- bod S leží na straně AB ,
- bod C leží na kružnici k ,
- ramena AC a BC protínají kružnici k v bodech N a O ,
- úsečka NO je střední příčkou trojúhelníku ABC .

[Úsečka SC je výškou a osou souměrnosti trojúhelníku ABC . Body N a O leží na ose úsečky SC , příp. také na kružnici shodné s k se středem v bodě C . Konstrukci lze začít s libovolným bodem C na kružnici k , poté využít kolmostí $NO \perp SC$, $AB \perp SC$ a vlastností střední příčky.]

- D1. Vrcholům šestiúhelníkového jehlanu jsou přiřazena přirozená čísla tak, že různé vrcholy mají různá čísla a pro každou stěnu je součet čísel u všech jejích vrcholů dělitelný čtyřmi. Ukažte, že zbytek, který dává číslo u hlavního vrcholu po dělení čtyřmi, nemůže být jiný než nula.

[Ukážeme, že po dělení čtyřmi dává číslo u hlavního vrcholu stejný zbytek jako součet čísel u vrcholů podstavy. V následující tabulce jsou postupně pro všechny zbytky u hlavního vrcholu rozepsány možné zbytky u ostatních šesti vrcholů (aby platil požadavek pro každou stěnu obsahující hlavní vrchol), na posledním řádku je zbytek odpovídající jejich součtu. Požadavek pro podstavu jehlanu platí pouze v prvním případě.]

hlavní	0	1	2	3
ostatní	0 1 2	0 1	0 1 3	0 2
	0 3 2	3 2	2 1 3	1 3
	0 1 2	0 1	0 1 3	0 2
	0 3 2	3 2	2 1 3	1 3
	0 1 2	0 1	0 1 3	0 2
	0 3 2	3 2	2 1 3	1 3
součet	0	1	2	3

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Do rohových políček tabulky 3×3 jsou vepsána čísla jako na obrázku:

3		6
12		15

Do prázdných políček doplňte kladná celá čísla tak, aby součin čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný. Najděte všechny možnosti. (J. Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. V následující tabulce jsou a , b , c kladná celá čísla taková, že hodnoty v sousedních políčkách se rovnají. Najděte tři nejmenší řešení.

$5a$	$7b$	$8c$
------	------	------

[Čísla ve všech políčkách se rovnají. Protože čísla 5, 7 a 8 jsou nesoudělná, je obecné řešení tvaru $a = 7 \cdot 8 \cdot k$, $b = 5 \cdot 8 \cdot k$, $c = 5 \cdot 7 \cdot k$, kde k je kladné celé číslo. Tři nejmenší řešení (a, b, c) jsou $(56, 40, 35)$, $(112, 80, 70)$, $(168, 120, 105)$.]

- N2. V následující tabulce jsou a , b , c kladná celá čísla taková, že hodnoty v sousedních políčkách se rovnají. Najděte tři nejmenší řešení.

$20a$	$21b$	$12c$
-------	-------	-------

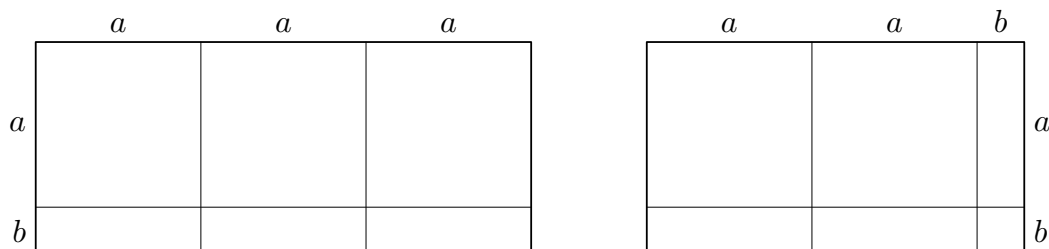
[Čísla ve všech políčkách se rovnají. Čísla 20, 21 a 12 jsou soudělná, jejich rozklady na součiny nesoudělných dělitelů jsou $20 = 4 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$ a $12 = 4 \cdot 3$. Obecné řešení je tvaru $a = 3 \cdot 7 \cdot k$, $b = 4 \cdot 5 \cdot k$, $c = 5 \cdot 7 \cdot k$, kde k je kladné celé číslo. Tři nejmenší řešení (a, b, c) jsou $(21, 20, 35)$, $(42, 40, 70)$ a $(63, 60, 105)$.]

- N3. Pro kladná sudá čísla a , b , c platí, že součiny $a \cdot b$ a $b \cdot c$ se rovnají a součin $a \cdot b \cdot c$ je dvojmístný a větší než 75. Jaký může být součet těchto tří čísel? Najděte všechny možnosti.

[Čísla a , b , c jsou sudá, tedy součin $a \cdot b \cdot c$ je násobkem osmi a jeho možné hodnoty jsou 80, 88 nebo 96. Protože $a \cdot b = b \cdot c$, je $a = c$. Hledané trojice (a, b, c) jsou $(2, 20, 2)$, $(2, 22, 2)$, $(2, 24, 2)$ a $(4, 6, 4)$, jejich součty jsou 24, 26, 28 a 14.]

- D1. Obdélník je třemi úsečkami rozdělen na tři čtverce a tři menší obdélníky. Všechny dílčí pravoúhelníky mají délky všech stran v cm vyjádřeny celými čísly. Obsah jednoho z malých obdélníků je 14 cm^2 . Jaký může být obsah daného obdélníku? Najděte všechny možnosti.

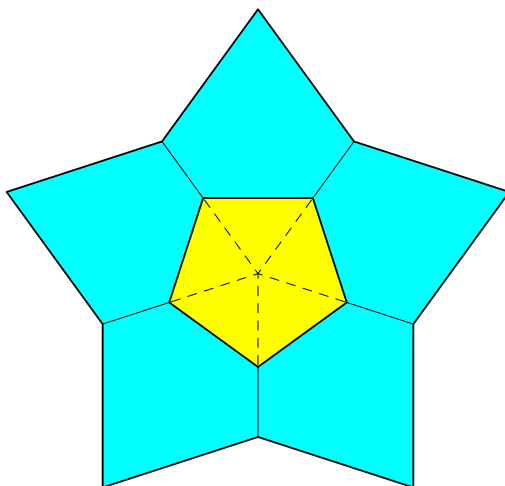
[Typově různá dělení jsou naznačena na obrázcích níže. V obou případech jsou malé obdélníky navzájem shodné. Obsah těchto obdélníků v cm^2 je $a \cdot b = 14 = 1 \cdot 14 = 2 \cdot 7$, tedy máme čtyři možné dvojice a a b . Pro první typ dělení je obsah daného obdélníku $3a(a+b)$, což po dosazení dává 45 cm^2 , 630 cm^2 , 54 cm^2 , nebo 189 cm^2 . Pro druhý typ dělení je obsah daného obdélníku $(2a+b)(a+b)$, což po dosazení dává 240 cm^2 , 435 cm^2 , 99 cm^2 , nebo 144 cm^2 .]



Z9–I–2

Útvar na obrázku je vytvořen z pěti shodných azurových kosočtverců a jednoho žlutého pravidelného pětiúhelníku, který kosočtverce částečně překrývá. Kosočtverce sousedí celými stranami a na nich leží vrcholy pětiúhelníku. Poměr velikostí poloměru kružnice opsané pětiúhelníku a strany kosočtverce je $4 : 7$.

Rozhodněte, zda nepřekrývá část každého kosočtverce má větší, stejný, nebo menší obsah než pětiúhelník. (M. Dományová)

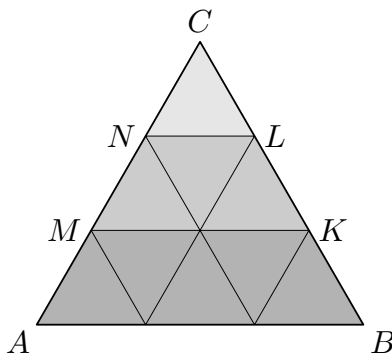


NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

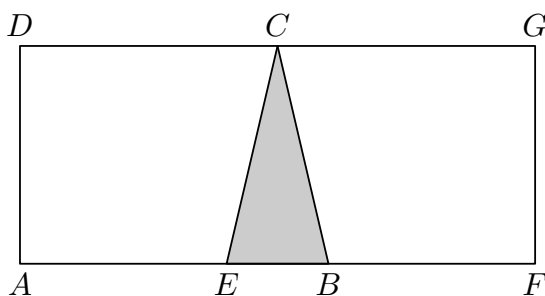
- N1. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu délky 24 cm . Na straně BC jsou body K a L tak, že $|BK| = |KL| = |LC|$. Na straně AC jsou body M a N tak, že $|AM| = |MN| =$

$= |NC|$. Určete postupný poměr obsahů lichoběžníků $ABKM$, $MKLN$ a trojúhelníku NLC . Zkuste úlohu řešit i bez znalosti délky strany trojúhelníku ABC .

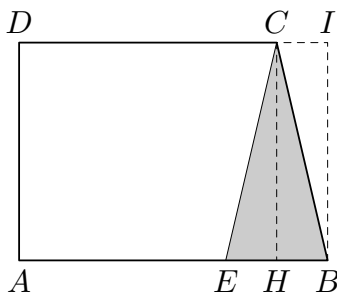
[Trojúhelník ABC lze příčkami rovnoběžnými se stranami rozdělit na devět trojúhelníků shodných s NLC (se stranami délky 8 cm). Lichoběžník $ABKM$ je tvořen pěti takovými trojúhelníky, lichoběžník $MKLN$ třemi. Poměry obsahů jsou $S_{ABKM} : S_{MKLN} : S_{NLC} = 5 : 3 : 1$. (Velikost, ani rovnostrannost trojúhelníku ABC není podstatná.)]



- N2. Dva shodné pravoúhlé lichoběžníky $ABCD$ a $FECG$ se překrývají v trojúhelníku EBC . Obsah trojúhelníku EBC tvoří 18 % obsahu lichoběžníku $ABCD$. Určete poměr délek úseček AB a CD .



[Doplňme body H a I tak, aby $AHCD$ a $ABID$ byly obdélníky. Trojúhelníky EHC , BHC a CIB jsou navzájem shodné, obsah každého z nich odpovídá 9 % obsahu lichoběžníku $ABCD$. Obsah obdélníku $AHCD$, resp. $ABID$ odpovídá 91 %, resp. 109 % obsahu lichoběžníku $ABCD$. Poměr délek úseček AB a CD je stejný jako poměr obsahů obdélníků $ABID$ a $AHCD$, tj. 109 : 91.]

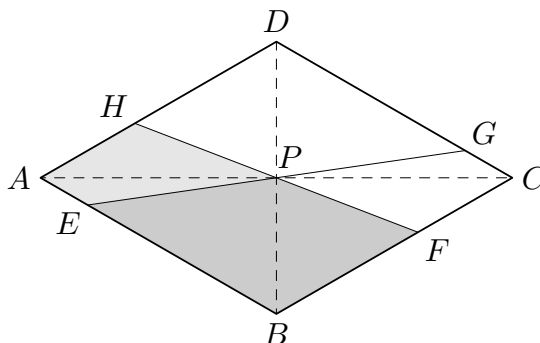


- N3. Na stranách AB , BC , CD a DA kosočtverce $ABCD$ jsou postupně dány body E , F , G a H tak, že platí $|AE| : |EB| = |CG| : |GD| = 1 : 4$ a $|BF| : |FC| = |DH| : |HA| = 3 : 2$. Bod P je průsečíkem přímek EG a HF . Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $AEPH$ a $EBFP$.

[Kosočtverec je středově souměrný podle průsečíku úhlopříček a stejně jsou souměrné dvojice bodů E a G , resp. F a H . Tedy bod P je průsečíkem úhlopříček kosočtverce. Každý ze čtyřúhelníků $AEPH$ a $EBFP$ je úhlopříčkami rozdělen na dva trojúhelníky. Všechny čtyři trojúhelníky mají společný vrchol P a stejné velikosti výšek z tohoto vrcholu. Tedy jejich obsahy jsou úměrné stranám protilehlým vrcholu P a platí:

$$\frac{S_{AEPH}}{S_{EBFP}} = \frac{S_{AEP} + S_{AHP}}{S_{BEP} + S_{BFP}} = \frac{|AE| + |AH|}{|BE| + |BF|} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}} = \frac{3}{7}.$$

Poměr obsahů čtyřúhelníků $AEPH$ a $EBFP$ je $3 : 7$.]

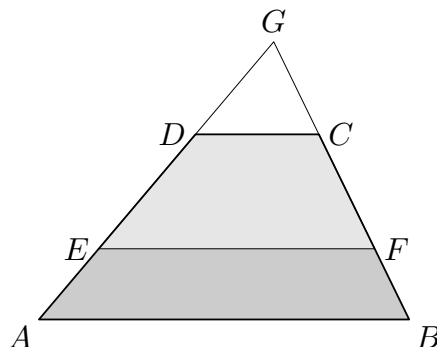


- D1. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami $|AB| = 12$ cm, $|CD| = 4$ cm a výškou 6 cm. Na ramenech AD , BC leží body E , F tak, že lichoběžníky $ABFE$ a $EFCD$ mají stejný obsah. Vypočítejte délku úsečky EF .

[Prodloužená ramena lichoběžníku se protínají v bodě G . Trojúhelníky DCG , EFG a ABG jsou navzájem podobné. Koeficient podobnosti pro dvojici DCG a ABG je 3, koeficient podobnosti pro dvojici DCG a EFG označíme k . Pro obsahy dílčích lichoběžníků platí

$$S_{ABFE} = (9 - k^2) \cdot S_{DCG}, \quad S_{EFGH} = (k^2 - 1) \cdot S_{DCG}.$$

Z rovnosti obsahů dostáváme $9 - k^2 = k^2 - 1$, odtud $k^2 = 5$, a tedy $k = \sqrt{5}$. Hledaná délka úsečky je $|EF| = k|CD| = 4\sqrt{5} \doteq 8,9$ (cm). (Výška lichoběžníku $ABCD$, ani velikosti základů nejsou podstatné; při řešení byl použit pouze poměr $|AB| : |CD| = 3$.)]



Z9–I–3

Na tabuli je napsáno několik po sobě jdoucích přirozených čísel počínaje jedničkou. Každé z těchto čísel má buď azurovou, nebo žlutou barvu. Součet každých dvou různobarevných čísel je prvočíslem, součet každých dvou stejnobarevných čísel je složeným číslem. Kolik nejvíce čísel může být napsáno na tabuli? (P. Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Seznamte se s metodou Eratosthenova síta a najděte pomocí něj všechna prvočísla menší než 100.

[Popis algoritmu najdete v učebnicích o dělitelnosti nebo na internetu.[?] Všechna prvočísla menší než 100 jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.]

- N2. Obarvěte čísla 1, 2 a 3 podle pravidel ze soutěžní úlohy.

[Čísla 1 a 3 musí mít stejnou barvu, číslo 2 jinou.]

- N3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel menších než 6, jejichž součty jsou složená čísla.

[Řešení odpovídají sčítancům v následujících výrazech: $4 = 1 + 3 = 2 + 2$, $6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5 = 4 + 4$, $9 = 4 + 5$, $10 = 5 + 5$.]

- D1. Leonardo si vypisoval členy Fibonacciho posloupnosti: Začal dvěma jedničkami, k nim připsal jejich součet a v každém dalším kroku doplnil součet předchozích dvou čísel. Několik prvních členů vypadalo takto: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Ukažte, že číslo na 9999. místě je složené.

[V posloupnosti se střídají dvě lichá a jedno sudé číslo (součet dvou lichých čísel je sudé číslo, součet sudého a lichého čísla je liché číslo). Každé třetí číslo je sudé a 9999 je násobkem tří, tedy číslo na 9999. místě posloupnosti je sudé. Sudá čísla větší než 2 jsou složená, a to je také naše číslo. Číslo na 9999. místě je složené.]

Z9–I–4

Přirozené číslo se nazývá čtverečkové, pokud jeho zápis obsahuje číslici nebo skupinu po sobě jdoucích číslic, jež jsou zápisem druhé mocniny kladného celého čísla. (Např. čísla 257 a 725 jsou čtverečková, čísla 275 a 572 nikoli.)

Určete počet všech dvojmístných čtverečkových čísel. (M. Dillingerová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Najděte:

- a) nejmenší trojmístné čtverečkové číslo;
- b) stoprvní trojmístné čtverečkové číslo;
- c) stotřicáté trojmístné čtverečkové číslo.

[Všechna čísla od 100 do 199 jsou čtverečková, následující je 201. Tedy a) první je 100; b) stoprvní je 201. Další je třeba pečlivě vypisovat; c) stotřicáté je 248.]

[?] Viz např. [Wikipedii](#).

N2. Kolik trojmístných čtverečkových čísel začíná číslicí 7 a obsahuje číslici 5?

[Čísla 5 a 7 nejsou druhými mocninami. Žádné dvojmístné číslo, které je druhou mocninou, nezačíná 7 a jediné dvojmístné číslo, které je druhou mocninou a obsahuje 5, je 25. Trojmístná čísla, která jsou druhou mocninou a začínají 7, jsou 729 a 784. Tato čísla však neobsahují 5. Vyhovujících čísel je sedm: 725, 751, 715, 754, 745, 759, 795.]

N3. Přirozené číslo nazveme *patrojkové*, jestliže obsahuje číslici 3, ale není dělitelné třemi. Najděte deset nejmenších patrojkových čísel.

[Jsou to čísla 13, 23, 31, 32, 34, 35, 37, 38, 43, 53.]

D1. Přirozené číslo nazveme *supersloženým*, pokud jeho zápis obsahuje právě dvě číslice, z nichž každá představuje jednomístné složené číslo. (Např. číslo 144 je supersložené, číslo 124 nikoli.) Kolik je trojmístných supersložených čísel?

[Jednomístná složená čísla jsou čtyři: 4, 6, 8 a 9. Na dvou ze tří míst jsou tyto číslice, na zbylém místě je jiná, „nesložená“ číslice. Pro „nesloženou“ číslici na prvním místě máme $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ možností (nemůže být 0). Pro „nesloženou“ číslici na druhém nebo třetím místě, máme vždy $4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$ možností. Trojmístných supersložených čísel je $80 + 96 + 96 = 272$.]

Z9–I–5

V lyžařském oddíle se počet všech dětí snížil o 10 %, přitom poměr děvčat vůči všem dětem vzrostl z 50 % na 55 %.

O kolik procent se změnil počet děvčat?

(I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Janečkovi natrhali 30 kg třešní. Z 30 % třešní vyrobili šťávu, polovinu zbylých třešní zpracovali na marmeládu. Nový zbytek rozdělili na tři stejné díly, dva díly usušili a jeden díl snědli. Kolik procent všech třešní Janečkovi usušili?

[Šťávu vyrobili z $\frac{3}{10} \cdot 30 = 9$ kg, zbylo 21 kg. Marmeládu udělali z $\frac{1}{2} \cdot 21 = 10,5$ kg, stejné množství zbylo. Na sušení vyčlenili $\frac{2}{3} \cdot 10,5 = 7$ kg. Janečkovi usušili $\frac{7}{30} \doteq 23,3\%$ třešní. (Hmotnost natrhaných třešní není k dořešení úlohy nutná.)]

N2. Ve firmě pije 45 % zaměstnanců čaj, ostatní pijí kávu. Kávu sladí o polovinu víc zaměstnanců než je těch, kteří ji nesladí. Kolik procent všech zaměstnanců pije hořkou kávu?

[Kávu pije 55 % zaměstnanců. Poměr těch, co kávu sladí a nesladí, je 3 : 2. Poměr těch, co kávu nesladí, a všech příznivců kávy je 2 : 5. Hořkou kávu pije $\frac{2}{5} \cdot \frac{55}{100} = 22\%$ zaměstnanců.]

N3. V učitelském sboru je p vyučujících, z toho $(100 - p)\%$ tvoří ženy a mužů je 36. Kolik vyučujících je ve sboru?

[Muži tvoří $p\%$ zaměstnanců a je jich 36, tzn. $p \cdot \frac{p}{100} = 36$. Odtud plyne $p^2 = 3600$, tedy $p = 60$. Ve sboru je 60 vyučujících.]

D1. V pytlíku byly rohlíky, z nichž 80 % bylo s kmínem, ostatní s mákem. Po snědení dvou rohlíků s kmínem tvořil tento druh rohlíků 75 % všech. Kolik rohlíků bylo s mákem?

[Původní poměr rohlíků s kmínem a s mákem byl 4 : 1, tedy počet všech rohlíků byl násobkem 5. Postupným zkoušením vyplyne, že všech rohlíků bylo 10, těch s kmínem 8 a těch

s mákem 2. (Úlohu lze zapsat pomocí neznámých takto: $\frac{k}{k+m} = \frac{8}{10}$, $\frac{k-2}{k+m-2} = \frac{3}{4}$, kde k a m značí původní počty rohů s kmínem a s mákem.)]

Z9–I–6

Kružnice k a l se zvnějšku dotýkají a poloměr kružnice k je stejný jako průměr kružnice l . Bod S je středem kružnice k , bod T je bodem dotyku kružnic, bod A leží na kružnici l mimo spojnici středů kružnic a bod M je středem úsečky AS .

Dokažte, že úhel ATM je pravý.

(L. Komín)

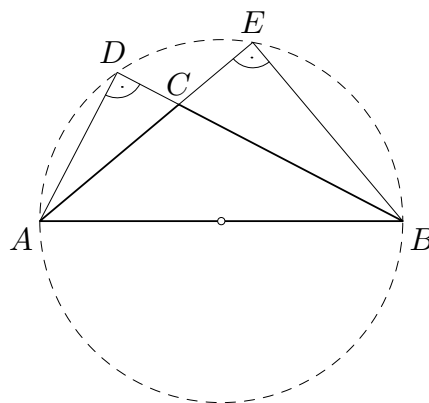
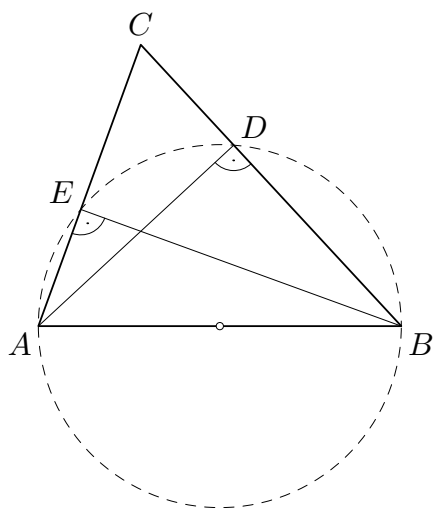
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Připomeňte si a zformulujte Thaletovu větu.

[Formulaci i se zdůvodněním najdete v učebnicích nebo na internetu:[?] Pokud je AB průměr kružnice a C jakýkoli jiný bod na téže kružnici, potom trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C .]

N2. V obecném trojúhelníku ABC značí D a E paty výšek na strany BC a AC . Dokažte, že body A , B , D a E leží na jedné kružnici.

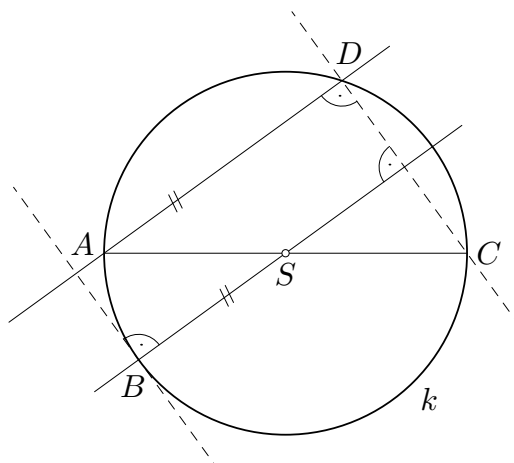
[Trojúhelníky ABD a ABE jsou pravoúhlé s pravými úhly u vrcholů D a E . Vrcholy všech pravoúhlých trojúhelníků s přeponou AB tvoří kružnici, tzv. Thaletovu kružnici nad průměrem AB . (V pravoúhlém trojúhelníku ABC některé body splývají.)]



N3. Na kružnici k se středem S jsou dány navzájem různé body A , B , C , D tak, že platí $S \in AC$ a $BS \parallel AD$. Dokažte, že tečna ke kružnici k s bodem dotyku B je rovnoběžná s přímkou CD .

[Podle Thaletovy věty je úhel ADC pravý. Přímký BS a AD jsou rovnoběžné, tedy přímký BS a CD jsou kolmé. Tečna s bodem dotyku B je kolmá na BS , tedy je rovnoběžná s CD .]

[?] Viz např. [Wikipedii](#).



- D1. Kružnice k a l se protínají v různých bodech A a B . Body C a D jsou krajními body průměrů kružnic k a l procházejících společným bodem A . Dokažte, že body B , C a D leží na jedné přímce.

[Může se stát, že některý s bodů C , D splývá s bodem B . V takovém případě je vlastnost splněna triviálně. Obecně jsou body B , C a D navzájem různé a podle Thaletovy věty jsou úhly ABC a ABD pravé. Tedy body C a D leží na kolmici k přímce AB procházející bodem B , tzn. body B , C a D leží na jedné přímce.]

