

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

Z5–I–1

Zvláštní kalkulačka má pouze dvě funkční tlačítka. Po stisknutí prvního tlačítka se k číslu na displeji přičte jedna, po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji vynásobí dvěma. Na displeji po každém stisknutí tlačítka svítí správný výsledek.

Najděte dva způsoby, jak pomocí šesti stisknutí tlačítek dostat na displeji z čísla 1 číslo 15.
(I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících třech návodných úlohách používáme stejnou kalkulačku jako v soutěžní úloze.

- N1. Na displeji svítilo číslo 1. Pak jsme čtyřikrát stiskli stejné tlačítko. Jaké číslo mohlo být na displeji?
- N2. Kolika způsoby lze dostat na displeji z čísla 1 číslo 4?
- N3. Na displeji svítilo neznámé číslo. Pak jsme čtyřikrát stiskli stejné tlačítko. Jaké mohlo být neznámé číslo, jestliže na displeji nyní svítí číslo a) 15; b) 16?
- D1. Zvláštní kalkulačka funguje jako ta v soutěžní úloze, akorát po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji místo násobení vydělí dvěma. Najděte dva způsoby, jak dostat na displeji z čísla 9 číslo 1.

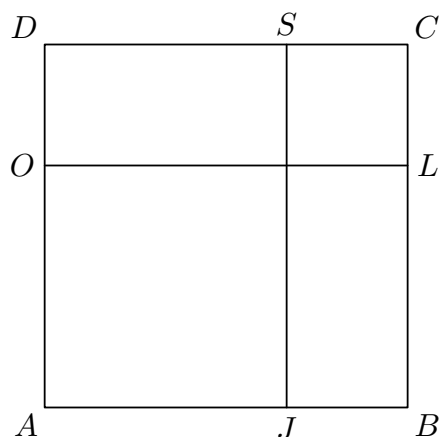
Z5–I–2

U zámku je čtvercový park se stranou délky 240 metrů. Po stranách čtverce vedou cesty, v jeho vrcholech stojí akát, buk, cedr a dub. Park křižují dvě další cesty rovnoběžné s cestami po jeho stranách — jedna vede od javoru ke studánce, druhá vede od lípy k ořechu. Princezna při svých procházkách parkem chodila jen po cestách, nikde se nevracela, ani zbytečně neodbočovala a zjistila, že:

- *procházka od buku ke studánce kolem javoru, akátu, ořechu a dubu je dvakrát delší než kolem lípy a cedru,*
- *procházka od buku ke studánce kolem lípy a cedru je stejně dlouhá jako procházka od dubu k lípě kolem studánky a cedru.*

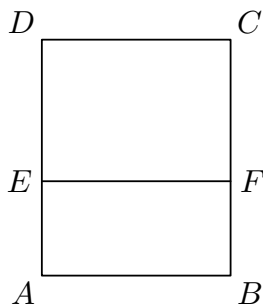
Jak dlouhá je přímá cesta od akátu k ořechu?

(M. Macko)

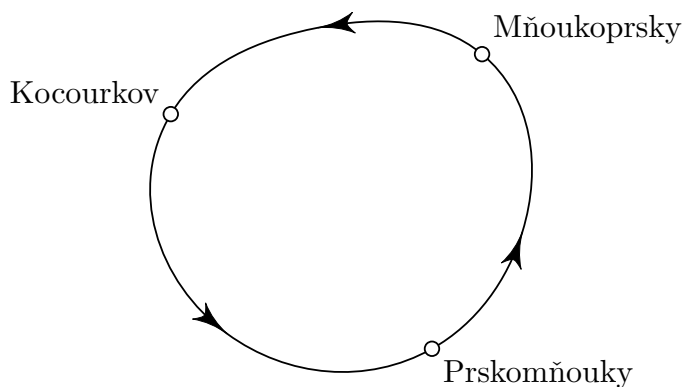


NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Záhon má tvar obdélníku $ABCD$. Přímá cesta z A do B měří 6 metrů. Cesta z A do B přes D a C měří 16 metrů. Jak dlouhá je přímá cesta z B do C ?
- N2. Na obrázku jsou znázorněny cesty, které tvoří hranice dvou obdélníků se společnou stranou. Přímá cesta z A do B měří 8 metrů, nejkratší cesta z A do C měří 18 metrů. Viktor se prochází po cestách z A do C , a to tak, že žádnou část neprojde víc než jednou. Jak dlouhá může být Viktorova procházka?



- N3. Přímá cesta mezi vrcholy K a L obdélníku $KLMN$ je pětkrát kratší než cesta po obvodu z K přes N a M do L . Vyjádřete délku cesty z L přes M do N pomocí délky některé strany obdélníku.
- D1. Jarmila překonala vzdálenost mezi dvěma keři čtyřmi kroky, Lenka stejnou vzdálenost překonala třemi kroky. Přitom krok Lenky byl o 15 cm delší než krok Jarmily. Jak daleko od sebe byly keře?
- D2. Okružní cesta spojuje tři vesnice jako na obrázku. Ve vyznačeném směru to je z Prskomňouk do Kocourkova 10 km, z Mňoukoprska do Prskomňouk 15 km a z Kocourkova do Mňoukoprska 16 km. Jak dlouhá je celá okružní cesta?



Z5–I–3

Danka a Janka každá pro sebe nasbíraly jahody. Kdyby měla Janka o polovinu víc jahod, než nasbírala, měla by jich stejně jako Danka. Kdyby měla Janka dvakrát víc jahod, než nasbírala, měla by jich o 48 víc než Danka.

Kolik jahod nasbírala Janka a kolik Danka?

(M. Dillingerová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Radka a Šárka měly dohromady 60 malin. Radka jich měla dvakrát tolik co Šárka. Kolik malin měla každá z děvčat?

- N2. Bolek a Lolek měli dohromady 60 borůvek. Bolek jich měl a) o polovinu; b) o třetinu méně než Lolek. Kolik borůvek měl každý z chlapců?
- N3. Tereška měla o 30 švestek víc než Žaneta, a ta měla a) dvakrát; b) třikrát; c) čtyřikrát méně švestek než Tereška. Kolik švestek měla Žaneta?
- D1. Filip měl dvakrát tolik třešní co Honza. Honza měl dvakrát tolik třešní co Ivan. Ivan měl o 36 třešní méně než Filip. Kolik třešní měl Honza?

Z5–I–4

Anežka správně vynásobila určité číslo sedmi a výsledné pětimístné číslo napsala na papír. Papoušek Fráňa kus papíru vykloval a první číslice výsledku se tak stala nečitelnou. Na zbytku papíru zůstalo napsáno 2887.

Jaká mohla být první číslice Anežčina výsledku? Najděte všechny možnosti.

(M. Petrová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících úlohách používáme v zápisech čísel písmena velké abecedy pro neznámé číslice.

- N1. Míša si zvolila jednomístné číslo. Zjistila, že když jím vynásobí jakákoliv dvě různá jednomístná čísla, výsledné součiny budou končit jinými číslicemi. Jaké mohlo být Míšino číslo?
- N2. Určete hodnotu číslice A tak, aby číslo tvaru a) $A4$; b) $AA5$ bylo násobkem devíti.
- N3. Když se číslo $A82$ vydělí sedmi, dělení vyjde beze zbytku. Jaká může být číslice A ? Najděte všechna řešení.
- D1. Součin dvojmístných čísel AB a BA je roven 7663. Určete číslice A a B .
- D2. V následujícím algebrogramu zastupují stejná písmena stejné číslice, různá různě. O číslicích označených hvězdičkou nevíme nic bližšího. Nahraďte písmena a hvězdičky číslicemi tak, aby byl výpočet správný.

$$\begin{array}{r}
 ABC \\
 \times \quad AC \\
 \hline
 A * 1 1 \\
 1 1 AB \\
 \hline
 * * B 8 *
 \end{array}$$

- D3. V následujícím algebrogramu zastupují stejná písmena stejné číslice, různá různě. Nahraďte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný.

$$\begin{array}{r}
 AHA \\
 \times \quad TU \\
 \hline
 PTPT \\
 UPU P \\
 \hline
 UTE T T
 \end{array}$$

Z5–I–5

Věky sedmi kamarádů jsou 8, 9, 10, 11, 11, 13 a 14 roků. Tři kamarádi jsou zrovna v kině, dva jsou na fotbale a dva doma. Součet věků těch v kině je 30 roků, součet věků těch na fotbale je 24 roků. Každý z kamarádů na fotbale má víc roků než Ondřej, který zůstal doma.

Kolik roků může mít Ondřej? Najděte všechny možnosti.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

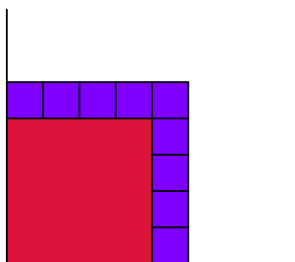
- N1. Z čísel 3, 4, 5, 6, 7 vyberte dvojici, jejíž součet je a) roven devíti; b) menší než devět. Najděte všechny možnosti.
- N2. Z čísel 11, 15, 19, 31, 35 a 39 vytvořte tři dvojice se stejnými součty.
- N3. Z čísel 2, 3, 4, 5 a 6 vyberte dvě dvojice se stejnými součty. Najděte všechny možnosti.
- D1. Z čísel 5, 6, 8, 9, 11 a 13 sestavte dvě trojice se stejnými součty.

Z5–I–6

Čtyři děvčata dláždila čtvercovými dlaždicemi terasu v rohu dvoru. Viola používala dlaždice se stranou 1 dm, Růžena se stranou 2 dm, Blanka se stranou 3 dm a Karmen se stranou 4 dm. První z děvčat položila jednu ze svých dlaždic do rohu. Druhá položila své dlaždice podél volných stran předchozí dlaždice a přidala jednu navíc, aby vznikl čtverec (viz obrázek). Obdobným způsobem položilo své dlaždice třetí a nakonec i čtvrté děvče. Takto vznikla čtvercová terasa bez mezer a překryvů.

V jakém pořadí mohla děvčata pokládat dlaždice a kolik dlaždic celkem použila? Najděte všechny možnosti.

(M. Macko)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících úlohách lemem obdélníku nebo čtverce rozumíme souvislý stejně široký pás, který jej obklopuje. Lem vztažený jen k některým stranám obdélníku nebo čtverce je zbylými stranami omezen obdobně jako fialový lem kolem dvou stran karmínového čtverce na obrázku v soutěžní úloze.

- N1. Kolem čtvercové dlaždice se stranou 5 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 1 dm. Kolik dlaždic je na lem potřeba?
- N2. Kolem dvou sousedních stran čtvercové dlaždice se stranou 6 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 2 dm. Kolem tohoto lemu vytvořte ještě jeden lem ze čtvercových dlaždic se stranou 4 dm. Je to možné? Pokud ano, kolik dlaždic je na oba lemy potřeba?
- N3. Kolem tří stran čtvercové dlaždice se stranou 6 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic se stranou 3 dm. Kolem tohoto lemu vytvořte ještě jeden lem ze čtvercových dlaždic se stranou 5 dm. Je to možné? Pokud ano, kolik celkem dlaždic je na oba lemy potřeba?

- D1. Kolem tří stran obdélníkové dlaždice se stranami 12 dm a 15 dm vytvořte lem ze čtvercových dlaždic s velikostí strany vyjádřenou v dm celým číslem. Kolik dlaždic je na lem potřeba? Najděte všechny možnosti.

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z6

Z6–I–1

V následujícím sčítacím algebrogramu odpovídají různá písmena různým číslicím, stejná stejným:

$$\begin{array}{r} T O N A \\ O N A \\ N A \\ A \\ \hline 8 6 5 4 \end{array}$$

Nahradte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný. Najděte všechny možnosti.
(I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících algebrogramech odpovídají různá písmena různým číslicím, stejná stejným. Nahradte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný. Najděte všechny možnosti.

N1.

$$PES + ES = 170$$

N2.

$$NIVA + IVA = 8630$$

D1.

$$PO \cdot DO = ONO$$

D2.

$$\begin{array}{rcl} ABC & : & AD = AE \\ + & & + \\ FG & - & BG = EH \\ = & & = \\ EDH & & CF \end{array}$$

Z6–I–2

Od 1. ledna byl pan Novák zaměstnán v nové práci. Nástupní výše jeho platu byla 1 550 eur měsíčně. Protože se osvědčil, od jistého měsíce v prvním půlroce mu byl zvýšen plat o celý počet eur. Za celý rok si vydělal 20 000 eur.

Za který měsíc si pan Novák poprvé vydělal více a o kolik? Určete všechny možnosti.
(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

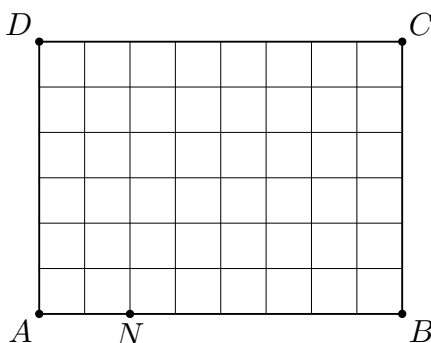
- N1. Michal dostal na celý týden košík se 17 jablky. Každý den počínaje pondělím snědl tři jablka. Záhy si spočítal, že pokud mu mají jablka vyjít až do neděle, musí počet jablek, která každý den sní, snížit o jedno. Který den začal Michal jíst méně jablek?
- N2. Arnošt dostal na celý týden košík se 47 švestkami. Každý den počínaje pondělím snědl pět švestek. Záhy si spočítal, že může počet švestek, které každý den sní, zvýšit a švestky mu i tak vydrží až do neděle. Začal tedy jíst víc švestek, a to každý den

stejně, ale ne více než deset. V neděli dojedl všechny. Který den začal Arnošt jíst více švestek a o kolik? Uveďte všechny možnosti.

- N3. Eliška se rozhodla během července přečíst knihu, která měla 316 stran. Každý den počínaje 1. červencem přečetla deset stran. Několik dní před koncem měsíce zjistila, že by takto knihu nedočetla, a začala číst více. Opět četla stejný počet stran denně a svoje předsevzetí splnila. Kolik stran denně mohla Eliška číst během posledních červencových dnů? Uveďte všechny možnosti.
- D1. Pan Cílevědomý nastoupil 1. ledna do nového zaměstnání s nástupním platem v celých tisících korun. Protože se osvědčil, byl mu od jistého měsíce zvýšen plat o pětinu. Jeho nový plat byl opět v celých tisících korun a za celý rok si vydělal něco mezi 250 000 a 310 000 korunami. Jaký byl nástupní plat pana Cílevědomého a od kterého měsíce dostal přidáno? Určete všechny možnosti.

Z6–I–3

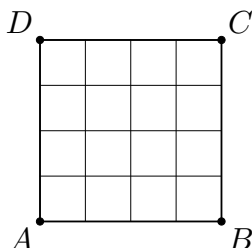
Vrcholy obdélníku $ABCD$ jsou mřížovými body čtvercové sítě a bod N je mřížovým bodem na straně AB :



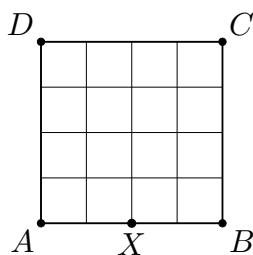
Rozdělte obdélník $ABCD$ třemi úsečkami se společným bodem N na čtyři části se stejnými obsahy. (D. Kovalčíková)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

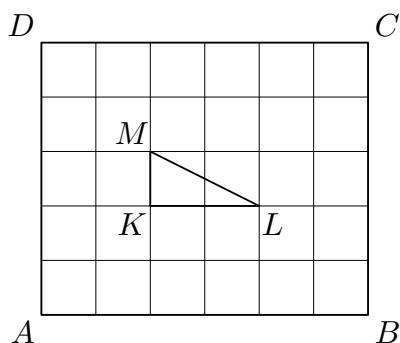
- N1. Vrcholy čtverce $ABCD$ jsou mřížovými body čtvercové sítě. Najděte alespoň tři způsoby, jak rozdělit čtverec $ABCD$ na čtyři stejné útvary, jejichž vrcholy jsou mřížovými body čtvercové sítě.



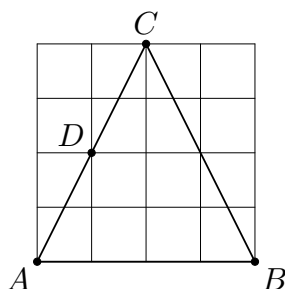
- N2. Vrcholy čtverce $ABCD$ jsou mřížovými body čtvercové sítě a bod X je mřížovým bodem na straně AB . Rozdělte čtverec $ABCD$ na čtyři části se společným bodem X a se stejnými obsahy.



- N3. Vrcholy obdélníku $ABCD$ a trojúhelníku KLM jsou mřížovými body čtvercové sítě. Vyznačte trojúhelník, který má stejný obsah jako trojúhelník KLM , má s ním společnou právě jednu stranu a zbylý vrchol je mřížovým bodem obdélníku $ABCD$. Najděte alespoň šest řešení.



- D1. Vrcholy trojúhelníku ABC jsou mřížovými body čtvercové sítě a bod D je mřížovým bodem na straně AC . Rozdělte trojúhelník ABC na čtyři části se společným bodem D a se stejnými obsahy.



Z6–I–4

Veronika dostala jedno trojmístné a jedno dvojmístné číslo. Trojmístné číslo zaokrouhlila na stovky a dvojmístné zaokrouhlila na desítky. Rozdíl zaokrouhlených čísel byl 500.

Jaký nejmenší a jaký největší mohl být rozdíl nezaokrouhlených čísel? (M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Jindra si zapsal na řádek čísla 17, 49, 72, 65, 8. Všechna čísla zaokrouhlil na desítky a výsledky zapsal na další řádek pod původní čísla. Pro kterou dvojici čísel na prvním řádku platí, že jejich rozdíl se a) nejméně; b) nejvíce liší od rozdílu odpovídajících čísel na druhém řádku?
- N2. Na běžeckém závodě doběhl Samuel do cíle před Erikem. Oba běželi celé počty minut, které po zaokrouhlení na desítky dávaly stejný výsledek. Tak to také Erik později

podával, i když skutečný Samuelův čas byl o pětinu kratší než Erikův. Kolik minut mohl trvat závod každému z chlapců? Najděte všechny možnosti.

- N3. Klára měla dvě dvojmístná čísla. Když obě zaokrouhlila na desítky, byl rozdíl těchto zaokrouhlených čísel 40. Jaký nejmenší a jaký největší mohl být rozdíl nezaokrouhlených čísel?
- D1. Jirka měl jedno trojmístné a jedno dvojmístné číslo. Trojmístné číslo zaokrouhlil na stovky a dvojmístné zaokrouhlil na desítky. Součet zaokrouhlených čísel byl 750, součet nezaokrouhlených čísel byl o 16 větší. Jaký nejmenší a jaký největší mohl být rozdíl nezaokrouhlených čísel?

Z6–I–5

Peťa má ke každému dnu v týdnu přiřazenu barvu: pondělí modrou, úterý zelenou, středu bílou, čtvrtek červenou, pátek oranžovou, sobotu šedou a neděli hnědou. V těchto barvách nosí i ponožky, a to tak, že na pravé noze má ponožku barvy dne, avšak na levé noze nemá ponožku barvy tohoto dne, ani dne následujícího. (Např. v sobotu má na pravé noze šedou ponožku a na levé nemá šedou, ani hnědou.)

Určete, který je den, jestliže předevcířem měl Peťa na levé noze modrou ponožku, včera měl červenou a dnes má hnědou. (M. Dillingerová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících čtyřech úlohách nosí Peťa ponožky tak, jak je popsáno v soutěžní úloze.

- N1. Jednoho dne měl Peťa na levé noze zelenou ponožku. Jakou ponožku mohl mít tentýž den na pravé noze?
- N2. Předevcířem měl Peťa na pravé noze červenou ponožku. Jakou ponožku nemůže mít zítra na levé noze?
- N3. Dnes má Peťa na jedné noze zelenou a na druhé bílou ponožku. Co je dnes za den?
- D1. Včera měl Peťa na levé noze modrou a dnes červenou ponožku. Sestra mu doporučuje na levou nohu nasadit zítra znovu modrou ponožku a pozítří hnědou. Rozhodněte, zda se Peťa může obléct podle sestřina doporučení. Pokud ano, co je dnes za den?
- D2. Alex má takový zvyk, že každou sobotu od 8 do 13 hodin lže a zbytek dne mluví pravdu. Podobně Saša každou sobotu od 13 do 18 hodin lže a zbytek dne mluví pravdu. Když se jednou v sobotu potkali, proběhl následující rozhovor:

Alex: „Rád tě vidím. Zrovna před hodinou jsem lhal.“

Saša: „To je náhoda, já jsem před hodinou také lhala.“

Kolik mohlo být zrovna hodin?

Z6–I–6

Obdélníkový park má obvod 228 metrů. Ve vrcholech obdélníku a na jeho stranách rostlo 38 okrasných keřů tak, že vzdálenosti mezi každými dvěma sousedními keři byly stejné. Na dvou protilehlých stranách obdélníku zasadil zahradník mezi každé dva keře jeden další. Tím zvýšil počet keřů po obvodu parku na 60.

Určete rozměry parku.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Zahradník osázel hranici obdélníkového záhonu jahodami tak, že rostliny byly v rozích a na stranách v pravidelných rozestupech 80 cm. Záhon měl rozměry 160 cm a 240 cm. Kolik rostlin zahradník zasadil?

- N2. Mezi obcemi Počátky a Žirovnice se má po jedné straně cesty vysázet nové stromořadí. Nejprve chtějí vysadit v pravidelných rozestupech břízy, poté doprostřed mezi každé dvě břízy střídavě jabloně a třešně. Délka stromořadí od první po poslední břízu bude 5 km, vzdálenosti mezi sobě nejbližšími jabloněmi budou 40 metrů. Kolik bříz má být podle tohoto plánu vysazeno?
- N3. Alžběta pomocí kolíků vyznačila obdélníkové území s obsahem 24 čtverečních metrů. Kolíky byly v rozích a na stranách v pravidelných rozestupech 1 metr. Kolik kolíků potřebovala? Najděte všechny možnosti.
- D1. Julián vytvořil na zahradě ornament ve tvaru pravidelného šestiúhelníku se stranou délky 120 cm. Ve vrcholech šestiúhelníku, na jeho stranách i na úhlopříčkách procházejících středem zasadil sedmikrásy v pravidelných rozestupech 30 cm. Na každé straně a každé úhlopříčce ještě mezi každé dvě sedmikrásy zasadil fialku. Kolik Julián zasadil sedmikrásek a kolik fialek?

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z7

Z7–I–1

Kolik existuje čtyřmístných čísel takových, že jejich třetina, polovina, dvojnásobek a trojnásobek jsou všechno čtyřmístná čísla? (M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Najděte

- a) nejmenší dvojmístný násobek pěti, jehož polovina je dvojmístné číslo;
- b) největší dvojmístný násobek šesti, jehož dvojnásobek je dvojmístné číslo;
- c) nejmenší dvojmístný násobek osmi, jehož pětina je dvojmístné číslo.

N2. Připomeňte si znaky dělitelnosti dvěma, třemi a šesti. Poté z číslic 2, 2, 5, 9 sestavte největší čtyřmístné číslo dělitelné šesti, které je menší než 5 123.

N3. Kolik je sudých čísel větších než 123 a menších než 321?

D1. Zjistěte, kolik pětímístných čísel má následující dvě vlastnosti:

- v čísle se opakuje jedna číslice třikrát, zbylé dvě číslice jsou různé,
- třicetina tohoto čísla je trojmístné číslo.

Z7–I–2

V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je bod G středem úhlopříčky AE .

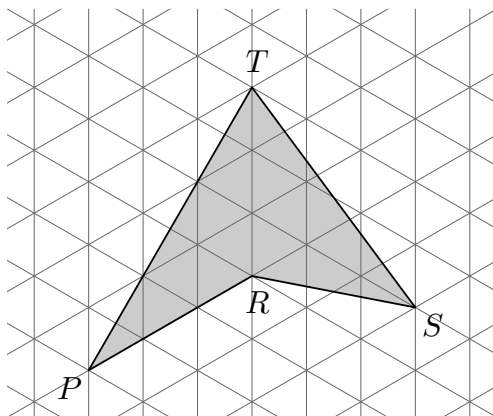
Určete poměr obsahů trojúhelníku ADG a šestiúhelníku $ABCDEF$.

(E. Semerádová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Najděte alespoň dva způsoby, jak rozdělit pravidelný šestiúhelník na a) tři; b) šest; c) dvanáct navzájem shodných částí.

N2. Vrcholy čtyřúhelníku $PRST$ jsou mřížovými body trojúhelníkové sítě, jejíž základní trojúhelník má obsah 1 cm^2 . Určete obsah čtyřúhelníku $PRST$.



N3. Trojúhelník ADE je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu D . Na straně AD jsou body B a C tak, že $|AB| = |BC| = |CD|$. Popište vztahy mezi obsahy trojúhelníků ADE , ABE , BCE a BDE .

D1. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou body K, L, M, N, O, P postupně středy jeho stran. Určete poměr obsahů šestiúhelníků $ABCDEF$ a $KLMNOP$.

Z7–I–3

Pan Komický, Elegantní a Vážný se znají z golfu. Jeden se jmenuje Karel, jeden Erik a jeden Viktor. Jeden nosí kravatu barvy krémové, jeden barvy ebenové a jeden barvy vínové.

- *Výherce posledního utkání nosí ebenovou kravatu.*
- *Pan Elegantní nebyl nikdy na návštěvě u pana Komického.*
- *Viktor nosí krémovou kravatu.*
- *Panu Komickému připadá vtipné, že nikdy nevyhrál.*
- *Karel byl po posledním utkání u pana Komického.*
- *Pan Vážný nosí vínovou kravatu.*

Zjistěte, jaké je vlastní jméno každého z pánů a jakou kdo nosí kravatu.

(E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Zebra, žirafa, slonice a tygřice se každá věnuje jinému zimnímu sportu.

- Zebra, ani žirafa nesáňkuje.
- Slonice nelyžuje.
- Tygřice nehraje hokej.
- Zebra se přátelí s lyžařkou a hokejistkou.
- Tygřice se přátelí s bobistkou a sáňkařkou.

Zjistěte, který sport kdo provozuje.

N2. Pan režisér Alík potřeboval do televizní pohádky čtyři psy. Dostal nabídku z Řecka, Belgie, Irska a z Dolní Lhoty. Vybral ovčáka, dalmatina, vlkodava a jezevčíka, každého z jiné země, s různým jménem a různým věkem.

- Nejstarší ze psů byl jezevčík, bylo mu 5 let.
- Bucki byl z nich druhý nejmladší.
- Vlkodav pocházel z Irska.
- Pes z Dolní Lhoty se jmenoval Punťa.
- Oddi oslavil včera své čtvrté narozeniny.
- Ovčák pocházel z Belgie.
- Rubby nebyl dalmatin.
- Vlkodav měl tři roky.
- Nejmladší z vybraných psů byl Rubby, byly mu dva roky.

Zjistěte, jak se každý vybraný pes jmenoval, odkud pocházel, jaké byl rasy a kolik mu bylo let.

D1. Ve třech sousedních domech v řadové zástavbě žily Xenie, Yveta a Zita se svými mazlíčky. Jedna chovala morče, jedna psa a jedna kočku.

- Xenie bydlí vedle domu se psem.

- Morče a kočka nebydlí v sousedních domech.
- Zita nemá kočku.
- Morče nebydlí vedle Yvety.

S kým bydlí pes?

D2. Do třídy přibyl nový žák, o kterém se vědělo, že kromě angličtiny umí výborně ještě jeden cizí jazyk. Tři spolužáci se dohadovali, který jazyk to je.

První soudil: „Francouzština to není.“

Druhý hádal: „Je to španělština nebo němčina.“

Třetí usuzoval: „Je to španělština.“

Záhy se dozvěděli, že to opravdu byl jeden z těchto tří jazyků a že alespoň jeden ze spolužáků hádal správně a alespoň jeden nesprávně.

Určete, který ze jmenovaných jazyků nový žák ovládal.

Z7–I–4

Adéla, Beáta, Šárka a Jitka si natrhaly třešně. Beáta jich měla pětkrát víc než Adéla, Šárka měla o 15 třešní víc než Beáta, Jitka měla o 200 víc než Adéla.

O kolik nejméně se mohly lišit počty třešní Šárky a Jitky? A kolik třešní by v takovém případě měla každá z dívek? (K. Pazourek)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Pro neznámé číslo platí, že jeho trojnásobek je menší než toto číslo zvětšené o 33. Najděte všechna přirozená čísla s touto vlastností.

N2. Najděte nejbližší násobek sedmi k nejbližšímu násobku patnácti k největšímu sudému trojmístnému číslu.

N3. Pro přirozená čísla a , b , c , d platí, že b je o 5 větší než a a d je o 8 menší než c . O kolik se mohou lišit

- rozdíly $a - c$ a $b - d$;
- součty $a + c$ a $b + d$;
- součty $a + b$ a $c + d$?

D1. Adam, Bořek a Čenda porovnávali, kolik kg kaštanů nasbírali. Zjistili, že aritmetický průměr toho, co nasbíral Adam s Bořkem, je o 10 kg větší než Čendův příspěvek. A aritmetický průměr toho, co nasbíral Adam s Čendou, je o 3 kg menší než Bořkův příspěvek. Určete rozdíl mezi aritmetickým průměrem toho, co nasbíral Bořek s Čendou, a Adamovým příspěvkem.

Z7–I–5

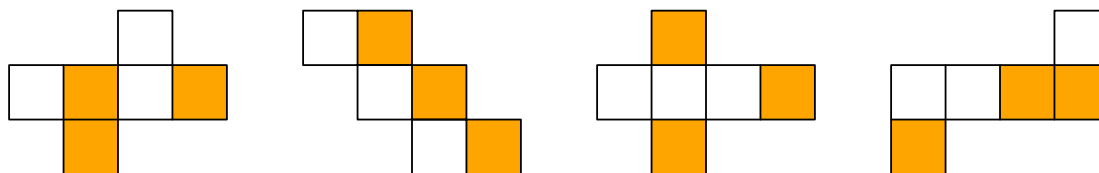
Václav měl několik bílých kostek. Na každé kostce nabarvil tři různé stěny třemi různými barvami, a to červenou, zelenou a modrou. Poté roztrídil kostky do skupin podle typu obarvení tak, že všechny kostky v jedné skupině vypadaly po vhodném otočení stejně.

Kolik nejvýše skupin mohl Václav vytvořit? (I. Jančigová)

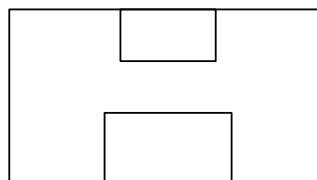
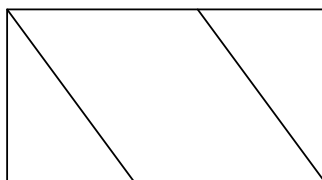
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících čtyřech úlohách jsou různými obarveními útvaru myšlena taková obarvení, která po žádném otočení útvaru nevypadají stejně (to v soutěžní úloze odpovídá různým Václavovým skupinám).

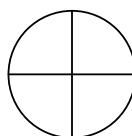
- N1. Kolika různými způsoby lze obarvit a) dvě; b) tři stěny bílé krychle na oranžovo?
- N2. Rozdělte následující obarvené sítě do skupin tak, aby po jejich složení byly různě obarvené krychle v různých skupinách.



- N3. Kolika různými způsoby lze obarvit tři stěny bílé krychle tak, aby jedna stěna byla modrá a dvě červené?
- D1. V obchodě mají dva druhy obdélníkových ubrusů se vzory jako na obrázku. Trojúhelníkové části u prvního vzoru jsou shodné, obdélníkové části u druhého nejsou shodné. U každého ubrusu mají jeho tři části navzájem různé barvy, a to červenou, zelenou a modrou. Žádné dva ubrusy v obchodě nejsou obarveny stejně. Kolik ubrusů je v obchodě?



- D2. Následující obrazec je kruh rozdělený dvěma kolmými průměry na části. Obarvěte jeho čtyři části dvěma barvami tak, aby žádná část nezůstala neobarvená. Zjistěte, kolika různými způsoby to lze udělat, pokud za různá obarvení považujeme taková, která nevypadají stejně po
- žádné osové souměrnosti;
 - žádné středové souměrnosti;
 - žádném otočení.



Z7–I–6

Pro čtyřúhelník $ABCD$ platí:

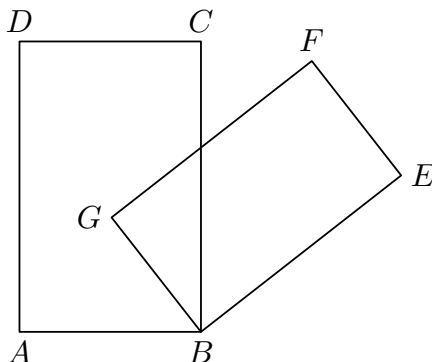
- strana AD a úhlopříčka BD jsou shodné,
- úhlopříčka BD a strana DC jsou kolmé,
- strany AB a BC jsou kolmé,
- osa úhlu BDC a strana AD jsou kolmé.

Určete velikost úhlu BCD .

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. V trojúhelníku ABC jsou velikosti vnitřních úhlů u vrcholů A a B po řadě 56° a 108° . Bod S je průsečíkem os jeho vnitřních úhlů. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků ABS , BCS a CAS .
- N2. Pro dva obdélníky $ABCD$ a $BEFG$ se společným vrcholem B platí, že velikost úhlu ABG je 52° . Určete velikost úhlu CBE .



- N3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a bod D , který je průsečíkem strany BC a osy úhlu BAC . Dále platí, že úsečky AD a DC jsou shodné. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC .
- D1. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD jsou velikosti vnitřních úhlů u vrcholů A a B po řadě 26° a 78° . Bod E je průsečíkem os vnitřních úhlů u vrcholů C a D . Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku CDE .

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z8

Z8–I–1

Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p_1, p_2, p_3 , pro která platí

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_3 - p_1) = 195.$$

(E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Vyberte všechny trojice jednomístných prvočísel $p_1 < p_2 < p_3$ a určete výsledek součinu

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_3 - p_1).$$

N2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x a y , pro která platí

$$(x - y) \cdot (x + y) = 105.$$

N3. Najděte všechny dvojice prvočísel, pro která platí, že součin jejich součtu a jejich rozdílu je roven 117.

D1. Najděte všechny dvojice navzájem různých prvočísel p_1 a p_2 , pro která platí

$$p_1 \cdot (p_1 + p_2) \cdot (p_1 - p_2) = 315.$$

Z8–I–2

Pro rovnoběžníky $ABCD$ a $KLMN$ platí:

- bod K je středem úsečky CD ,
- bod K je průsečíkem přímky CD s osou úsečky BC ,
- bod L je průsečíkem přímky AB s osou úsečky CD ,
- bod N je průsečíkem přímky AB s osou úsečky BC ,
- úhel BAD má velikost 60° .

Určete poměr obsahů rovnoběžníků $ABCD$ a $KLMN$.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. V obdélníku $ABCD$ je bod M středem strany AB . Určete poměr obsahů trojúhelníku AMD a čtyřúhelníku $MBCD$.

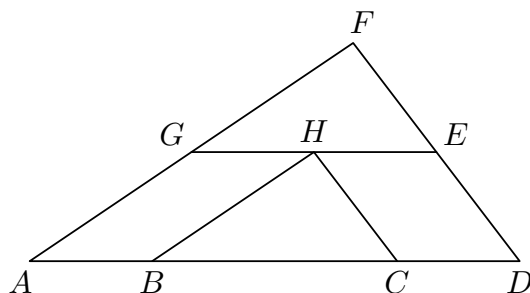
N2. V trojúhelníku ABC platí, že bod M je středem strany AC a úsečky MA , MB a AB jsou shodné. Určete poměr obsahů trojúhelníků ABM a MBC .

N3. Na stranách rovnostranného trojúhelníku ABC jsou body K , L a M tak, že platí:

- bod K je středem strany BC ,
- bod L je průsečíkem strany AB s osou úsečky KB ,
- bod M je středem úsečky BL .

Určete poměr obsahů trojúhelníků KLM a ABC .

- D1. Obecný trojúhelník ADF je rozdělen na dva trojúhelníky GEF a BCH a dva rovnoběžníky $ABHG$ a $CDEH$. Trojúhelníky GEF a BCH jsou shodné a bod H leží na těžnici trojúhelníku ADF procházející vrcholem F . Určete poměr obsahů trojúhelníku GEF a rovnoběžníku $CDEH$.



Z8–I–3

Tomáš sbírá pohlednice z Islandu, Anglie a Norska. Z každé země má alespoň jednu pohlednici, celkem jich má 40. Pohlednic z Anglie má více než pohlednic z Norska. Pohlednic z Islandu má více než pětinásobek a méně než šestinásobek počtu pohlednic z Anglie.

Ze kterých zemí jsou pohlednice, jejichž počet v Tomášově sbírce lze určit jednoznačně?
(E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Laura, Aleš a Ivan sbírali na táboře kešky. Každý našel alespoň jednu, dohromady jich nasbírali 23 a Laura jich nasbírala pětkrát tolik co Ivan. Kolik kešek mohl nasbírat Aleš? Určete všechny možnosti.
- N2. Jakub dal kamarádům za úkol uhodnout číslo, které si myslí. Prozradil, že se jedná o dvojmístné číslo menší než sedminásobek největšího jednomístného čísla a větší než druhá mocnina počtu dnů v týdnu. Kdyby navíc svoje číslo vydělil osmi, dostal by počet svých kšiltovek. Mohou kamarádi určit Jakubovo myšlené číslo, i když neznají počet jeho kšiltovek?
- N3. Andrea sbírá pohlednice z Arménie, Belgie a Číny. Z každé země má alespoň jednu pohlednici. Pohlednic z Arménie má méně než pohlednic z Belgie. Pohlednic z Číny má více než pětinásobek a méně než šestinásobek počtu pohlednic z Belgie. Zdeněk se z těchto informací snažil zjistit, kolik vlastně má Andrea pohlednic, a nevěděl si rady. Andrea mu pomohla sdělením, že v jejím případě jsou těmito omezeními počty pohlednic z jednotlivých zemí popsány jednoznačně. Kolik má Andrea pohlednic?
- D1. Libor sbírá pohlednice z Andorrry, Brazílie, Černé Hory a Dánska, celkem jich má méně než 40. Pohlednic z Brazílie má více než dvojnásobek a méně než trojnásobek počtu pohlednic z Andorrry. Pohlednic z Černé Hory má více než pohlednic z Andorrry a méně než pohlednic z Brazílie. Pohlednic z Dánska má dvakrát tolik co pohlednic z Brazílie. Kolik nejméně a kolik nejvíce pohlednic může mít Libor?

Z8–I–4

Žáci napsali první písemku s průměrným hodnocením 84 bodů. Stejní žáci napsali druhou písemku s průměrným hodnocením 70 bodů. Čtyři z těchto žáků měli v obou písemkách po 63 bodech. Průměrné hodnocení ostatních žáků ve druhé písemce bylo 72 bodů.

Určete průměrné hodnocení ostatních žáků v první písemce.
(I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Adam, Bořek, Cyril, Dan a Emil porovnávali svoje časy v běhu na 60 metrů. Bořek doběhl stejně jako Cyril za 11,2 vteřin, Emil doběhl za 9,3 vteřin a Dan za 10,8 vteřin. Adam svůj čas nechtěl prozradit, ale všichni věděli, že jejich průměrný čas byl 10,6 vteřin. Jaký byl Adamův čas?
- N2. Během jednoho roku zachránil šestičlenný tým superhrdinů řadu měst, průměrně každý 11. Thor, Hulk a Iron Man zachránili každý stejné množství měst, Kapitán Amerika jich zachránil 5, Ant-Man 7 a Hawkeye 6. Kolik měst zachránil Hulk?
- N3. Průměrná výška deseti nejvyšších hor světa je 8 378 metrů nad mořem. Jak by se změnila průměrná výška, pokud bychom z tohoto seznamu vynechali Annapurnu (8 091 m), K2 (8 611 m) a Makalu (8 485 m)?
- D1. V základní škole U Tří dubů, kam chodí i Zikmund, každoročně pořádají vědomostní soutěž, v níž každý soutěžící může získat nejvíce 15 bodů. Letos byl průměrný bodový zisk soutěžících zaokrouhlený na desetiny roven 10,4. Zikmund si po soutěži uvědomil, že jednu otázku si špatně přečetl a odpovídal na něco jiného. Mohl tak mít o 4 body více a průměrný bodový zisk zaokrouhlený na desetiny by se tím zvýšil na 10,6. Určete, kolik nejméně a kolik nejvíce dětí letos U tří dubů soutěžilo.

Z8–I–5

Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 6 cm a přímka p procházející bodem S . Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby platilo:

- vrcholy A a B leží na přímce p ,
- kružnice k se dotýká strany CD ,
- kružnice k protíná stranu AD v bodě K a stranu BC v bodě L ,
- $|AK| = |CL| = 1,5$ cm.

(M. Petrová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Narýsujte čtverec $ABCD$ o straně délky 5 cm. Poté narýsujte kružnici vepsanou a kružnici opsanou čtverci $ABCD$.
- N2. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 4 cm. Narýsujte obdélník $ABCD$, jehož strany AB , CD a AD se dotýkají kružnice k a délky stran BC a CD jsou v poměru 2 : 3.
- N3. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 6 cm. Narýsujte obdélník $ABCD$ tak, aby platilo:
- bod S leží na straně AB ,
 - bod B leží na kružnici k ,
 - kružnice k se dotýká strany CD ,
 - kružnice k protíná stranu AD v jejím středu.
- D1. Je dána kružnice k se středem S . Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby platilo:
- bod S leží na straně AB ,
 - bod C leží na kružnici k ,

- ramena AC a BC protínají kružnici k v bodech N a O ,
- úsečka NO je střední příčkou trojúhelníku ABC .

Z8–I–6

Jonáš a Michal sestavili každý svůj osmiboký jehlan s devíti různými čísly na jeho různých stěnách. Všechna čísla byla větší než 10, menší než 30 a žádné nebylo dělitelné čtyřmi. Pro každý vrchol však součet čísel na všech stěnách, které ho obsahovaly, byl dělitelný čtyřmi. Jonáš tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 15. Michal tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 17.

Kdo z chlapců měl pravdu?

(K. Pazourek)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Silva zkoumala čtyřstěn, který se objevil na její lavici. Na čtyřech stěnách byla napsána čtyři různá čísla, žádné z nich nebylo dělitelné třemi. Pro každý vrchol však součet čísel na třech stěnách, které ho obsahovaly, dělitelný třemi byl. Která čísla mohla být napsána na stěnách čtyřstěnu? Najděte alespoň dvě možnosti.
- N2. Karel popsal stěny krychle tak, že na různých stěnách byla různá přirozená čísla, součet čísel na každých dvou protilehlých stěnách byl dělitelný čtyřmi a největší z použitých čísel bylo co nejmenší. Která čísla Karel použil?
- N3. Jindra popsal stěny krychle tak, že na různých stěnách byla různá přirozená čísla, součet čísel na každých dvou sousedních stěnách byl dělitelný čtyřmi a největší z použitých čísel bylo co nejmenší. Která čísla Jindra použil?
- D1. Vrcholům šestibokého jehlanu jsou přiřazena přirozená čísla tak, že různé vrcholy mají různá čísla a pro každou stěnu je součet čísel u všech jejích vrcholů dělitelný čtyřmi. Ukažte, že zbytek, který dává číslo u hlavního vrcholu po dělení čtyřmi, nemůže být jiný než nula.

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Do rohových políček tabulky 3×3 jsou vepsána čísla jako na obrázku:

3		6
12		15

Do prázdných políček doplňte kladná celá čísla tak, aby součin čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný. Najděte všechny možnosti. (J. Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. V následující tabulce jsou a , b , c kladná celá čísla taková, že hodnoty v sousedních políčkách se rovnají. Najděte tři nejmenší řešení.

$5a$	$7b$	$8c$
------	------	------

N2. V následující tabulce jsou a , b , c kladná celá čísla taková, že hodnoty v sousedních políčkách se rovnají. Najděte tři nejmenší řešení.

$20a$	$21b$	$12c$
-------	-------	-------

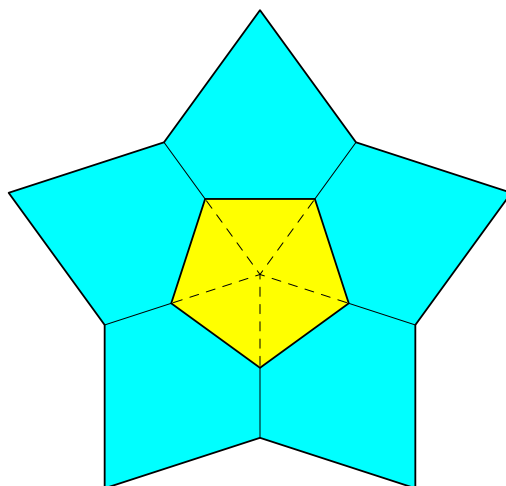
N3. Pro kladná sudá čísla a , b , c platí, že součiny $a \cdot b$ a $b \cdot c$ se rovnají a součin $a \cdot b \cdot c$ je dvojmístný a větší než 75. Jaký může být součet těchto tří čísel? Najděte všechny možnosti.

D1. Obdélník je třemi úsečkami rozdělen na tři čtverce a tři menší obdélníky. Všechny dílčí pravoúhelníky mají délky všech stran v cm vyjádřeny celými čísly. Obsah jednoho z malých obdélníků je 14 cm^2 . Jaký může být obsah daného obdélníku? Najděte všechny možnosti.

Z9–I–2

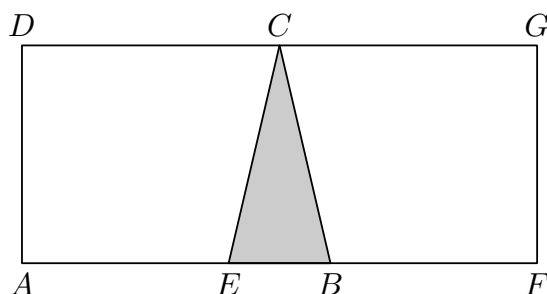
Útvar na obrázku je vytvořen z pěti shodných azurových kosočtverců a jednoho žlutého pravidelného pětiúhelníku, který kosočtverce částečně překrývá. Kosočtverce sousedí celými stranami a na nich leží vrcholy pětiúhelníku. Poměr velikostí poloměru kružnice opsané pětiúhelníku a strany kosočtverce je $4 : 7$.

Rozhodněte, zda nepřekrývá část každého kosočtverce má větší, stejný, nebo menší obsah než pětiúhelník. (M. Dományová)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu délky 24 cm. Na straně BC jsou body K a L tak, že $|BK| = |KL| = |LC|$. Na straně AC jsou body M a N tak, že $|AM| = |MN| = |NC|$. Určete postupný poměr obsahů lichoběžníků $ABKM$, $MKLN$ a trojúhelníku NLC . Zkuste úlohu řešit i bez znalosti délky strany trojúhelníku ABC .
- N2. Dva shodné pravoúhlé lichoběžníky $ABCD$ a $FECG$ se překrývají v trojúhelníku EBC . Obsah trojúhelníku EBC tvoří 18 % obsahu lichoběžníku $ABCD$. Určete poměr délek úseček AB a CD .



- N3. Na stranách AB , BC , CD a DA kosočtverce $ABCD$ jsou postupně dány body E , F , G a H tak, že platí $|AE| : |EB| = |CG| : |GD| = 1 : 4$ a $|BF| : |FC| = |DH| : |HA| = 3 : 2$. Bod P je průsečíkem přímek EG a HF . Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $AEPH$ a $EBFP$.
- D1. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami $|AB| = 12$ cm, $|CD| = 4$ cm a výškou 6 cm. Na ramenech AD , BC leží body E , F tak, že lichoběžníky $ABFE$ a $EFCD$ mají stejný obsah. Vypočítejte délku úsečky EF .

Z9–I–3

Na tabuli je napsáno několik po sobě jdoucích přirozených čísel počínaje jedničkou. Každé z těchto čísel má buď azurovou, nebo žlutou barvu. Součet každých dvou různobarevných čísel je prvočíslem, součet každých dvou stejnobarevných čísel je složeným číslem. Kolik nejvíce čísel může být napsáno na tabuli? (P. Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Seznamte se s metodou Eratosthenova síta a najděte pomocí něj všechna prvočísla menší než 100.

- N2. Obarvěte čísla 1, 2 a 3 podle pravidel ze soutěžní úlohy.
- N3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel menších než 6, jejichž součty jsou složená čísla.
- D1. Leonardo si vypisoval členy Fibonacciho posloupnosti: Začal dvěma jedničkami, k nim připsal jejich součet a v každém dalším kroku doplnil součet předchozích dvou čísel. Několik prvních členů vypadalo takto: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Ukažte, že číslo na 9999. místě je složené.

Z9–I–4

Přirozené číslo se nazývá čtverečkové, pokud jeho zápis obsahuje číslici nebo skupinu po sobě jdoucích číslic, jež jsou zápisem druhé mocniny kladného celého čísla. (Např. čísla 257 a 725 jsou čtverečková, čísla 275 a 572 nikoli.)

Určete počet všech dvojmístných čtverečkových čísel. (M. Dillingerová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Najděte:
- nejmenší trojmístné čtverečkové číslo;
 - stoprvní trojmístné čtverečkové číslo;
 - stotřicáté trojmístné čtverečkové číslo.
- N2. Kolik trojmístných čtverečkových čísel začíná číslicí 7 a obsahuje číslici 5?
- N3. Přirozené číslo nazveme *patrojkové*, jestliže obsahuje číslici 3, ale není dělitelné třemi. Najděte deset nejmenších patrojkových čísel.
- D1. Přirozené číslo nazveme *supersloženým*, pokud jeho zápis obsahuje právě dvě číslice, z nichž každá představuje jednomístné složené číslo. (Např. číslo 144 je supersložené, číslo 124 nikoli.) Kolik je trojmístných supersložených čísel?

Z9–I–5

V lyžařském oddíle se počet všech dětí snížil o 10 %, přitom poměr děvčat vůči všem dětem vzrostl z 50 % na 55 %.

O kolik procent se změnil počet děvčat? (I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Janečkovi natrhali 30 kg třešní. Z 30 % třešní vyrobili šťávu, polovinu zbylých třešní zpracovali na marmeládu. Nový zbytek rozdělili na tři stejné díly, dva díly usušili a jeden díl snědli. Kolik procent všech třešní Janečkovi usušili?
- N2. Ve firmě pije 45 % zaměstnanců čaj, ostatní pijí kávu. Kávu sladí o polovinu víc zaměstnanců než je těch, kteří ji nesladí. Kolik procent všech zaměstnanců pije hořkou kávu?
- N3. V učitelském sboru je p vyučujících, z toho $(100 - p)$ % tvoří ženy a mužů je 36. Kolik vyučujících je ve sboru?
- D1. V pytlíku byly rohlíky, z nichž 80 % bylo s kmínem, ostatní s mákem. Po snědení dvou rohlíků s kmínem tvořil tento druh rohlíků 75 % všech. Kolik rohlíků bylo s mákem?

Z9–I–6

Kružnice k a l se zvnějšku dotýkají a poloměr kružnice k je stejný jako průměr kružnice l . Bod S je středem kružnice k , bod T je bodem dotyku kružnic, bod A leží na kružnici l mimo spojnici středů kružnic a bod M je středem úsečky AS .

Dokažte, že úhel ATM je pravý.

(L. Komín)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Připomeňte si a zformulujte Thaletovu větu.
- N2. V obecném trojúhelníku ABC značí D a E paty výšek na strany BC a AC . Dokažte, že body A , B , D a E leží na jedné kružnici.
- N3. Na kružnici k se středem S jsou dány navzájem různé body A , B , C , D tak, že platí $S \in AC$ a $BS \parallel AD$. Dokažte, že tečna ke kružnici k s bodem dotyku B je rovnoběžná s přímkou CD .
- D1. Kružnice k a l se protínají v různých bodech A a B . Body C a D jsou krajními body průměrů kružnic k a l procházejících společným bodem A . Dokažte, že body B , C a D leží na jedné přímce.