75. ročník Matematické olympiády (2025/2026)

Úlohy školního kola kategorie A

1. Řekneme, že trojice reálných čísel a, b, c je *dobrá*, pokud platí

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \quad \text{a} \quad a+b+c=1.$$

a) Najděte příklad dobré trojice.

b) Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b},$$

kde trojice a, b, c je dobrá.

2. Kladné celé číslo nazveme *mozaikové*, pokud má mezi čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6 alespoň čtyři dělitele. Rozhodněte, zda lze z libovolných tří mozaikových čísel vybrat dvě, jejichž součet je mozaikový.

3. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík úhlopříček. Dále označme H průsečík výšek trojúhelníku APB. Předpokládejme, že platí $|AP|+|PB| = |AD|+|BC|$. Dokažte, že $|HC|=|HD|$.

Školní kolo kategorie A se koná

v úterý 9. prosince 2025

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Řekneme, že trojice reálných čísel a, b, c je* dobrá, *pokud platí*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \quad \text{a} \quad a + b + c = 1.$$

a) Najděte příklad dobré trojice.
b) Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b},$$

kde trojice a, b, c je dobrá. (Jaromír Šimša)

Řešení. a) Vyhovuje například trojice $(a, b, c) = (-1/3, 2/3, 2/3)$, protože

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{a} \quad a + b + c = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Poznámka. Analýzou podmínek ze zadání lze ukázat, že existuje nekonečně mnoho dobrých trojic. Trojice (a, b, c) je dobrá, právě když bod o těchto souřadnicích leží na kružnici, která je průnikem kulové plochy $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ a roviny $a + b + c = 1$.

Komentář. Přestože je podané řešení části a) úplné, vysvětlíme, jak příklad dobré trojice najít. Z první rovnice dostáváme, že dobrá trojice tvaru (a, a, a) zřejmě neexistuje. Hledejme proto dobrou trojici ve tvaru (a, b, b). Potom první zadaná rovnost má tvar

$$0 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b},$$

takže je splněna právě tehdy, když $-2a = b = c \neq 0$. Druhá zadaná rovnost má tvar

$$1 = a + b + c = a + (-2a) + (-2a) = -3a,$$

takže platí pro $a = -1/3$, čemuž odpovídá $b = c = 2/3$. Příkladem dobré trojice je proto $(a, b, c) = (-1/3, 2/3, 2/3)$.

b) Úpravou první rovnosti dostaneme

$$0 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc},$$

odtud plyne $ab + bc + ca = 0$. Zlomky ze zadaného výrazu pak upravíme takto

$$\frac{ab}{c} = \frac{-bc - ca}{c} = -b - a, \qquad \frac{bc}{a} = \frac{-ca - ab}{a} = -c - b, \qquad \frac{ca}{b} = \frac{-ab - bc}{b} = -a - c.$$

Jejich sečtením a užitím rovnosti $a + b + c = 1$ získáme

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = (-b - a) + (-c - b) + (-a - c) = -2(a + b + c) = -2.$$

Číslo -2 je tak jediná možná hodnota zadaného výrazu. Tuto hodnotu dostaneme například volbou dobré trojice $(a, b, c) = (-1/3, 2/3, 2/3)$ z části a).

JINÉ ŘEŠENÍ. Ukážeme jiný způsob, jak řešit část b). Stejně jako v prvním řešení odvodíme rovnost $ab + bc + ca = 0$. Umocněním této rovnosti dostaneme

$$0 = (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2,$$

takže platí

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = -2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 = -2abc(a + b + c).$$

Upravíme zadaný výraz

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc} = \frac{-2abc(a + b + c)}{abc} = -2(a + b + c) = -2.$$

POZNÁMKA. Existuje více způsobů, jak řešit část b). Například je možné vyhnout se odvození rovnosti $ab + bc + ca = 0$, a to úpravou zadaného vztahu

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a + b}{ab} + \frac{1}{c} = 0,$$

takže po vynásobení ab dostaneme

$$\frac{ab}{c} = -a - b.$$

Podobně upravíme i ostatní členy a řešení dokončíme jako ve výše uvedeném řešení.

V řešeních části a) udělte body následovně:

A1. Uvedení správné trojice (i bez ověření podmínek): 2 body.

A2. Správný myšlenkový postup, který však vede k nesprávnému výsledku z důvodu numerické chyby: 1 bod.

Celkově za část a) dejte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2})$ bodů.

V řešeních části b) udělte body následovně:

B1. Úplné řešení: 4 body.

B2. Odvození $ab + bc + ca = 0$ z $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$: 1 bod.

B3. Odvození alespoň jedné rovnosti tvaru $\frac{ab}{c} = -a - b$: 2 body.

B4. Uvedení odpovědi -2 bez zdůvodnění: 1 bod.

Celkově za část b) udělte $\max(\mathrm{B1}, \mathrm{B2}, \mathrm{B3}, \mathrm{B4})$ bodů.

2. *Kladné celé číslo nazveme* mozaikové*, pokud má mezi čísly* 1*,* 2*,* 3*,* 4*,* 5*,* 6 *alespoň čtyři dělitele. Rozhodněte, zda lze z libovolných tří mozaikových čísel vybrat dvě, jejichž součet je mozaikový.* (Dominik Martin Rigász)

Řešení. Nechť n je libovolné mozaikové číslo. Je jistě dělitelné číslem 1. Aby mělo alespoň čtyři dělitele v množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, má v ní alespoň tři další dělitele.

Pokud by n nebylo dělitelné číslem 2, pak nemůže být dělitelné ani čísly 4 a 6. V tomto případě by jeho jedinými možnými děliteli z množiny M byla čísla 1, 3, 5. To jsou však jen tři dělitele z množiny M, což je ve sporu s definicí mozaikového čísla, které je musí mít alespoň čtyři. Každé mozaikové číslo musí být proto dělitelné čísly 1 a 2.

Kromě 1 a 2 musí mít n ještě alespoň dva jiné dělitele z množiny M. Uvážíme dva případy:

- Nechť 3 je dělitelem n. Jelikož i 2 je dělitelem n, tak i 6 je dělitelem n. Odtud plyne, že n má v množině M alespoň čtyři dělitele, a to 1, 2, 3, 6.
- Nechť 3 není dělitelem n. Pak ani 6 není dělitelem n. Zbývající možné dělitele z množiny M jsou 4, 5. Aby mělo n alespoň čtyři dělitele v množině M, je dělitelné oběma čísly. V tomto případě má n v množině M právě 4 dělitele, a to 1, 2, 4, 5.

To znamená, že každé mozaikové číslo je dělitelné čtveřicí 1, 2, 3, 6 nebo čtveřicí 1, 2, 4, 5.

Máme-li tři libovolná mozaiková čísla, pak najdeme alespoň dvě, která obě sdílejí dělitele 1, 2, 3, 6 nebo najdeme alespoň dvě, která obě sdílejí dělitele 1, 2, 4, 5 (používáme zde Dirichletův princip).

Uvažujme součet takových dvou mozaikových čísel. Protože obě čísla jsou dělitelná každým číslem z příslušné čtveřice (1, 2, 3, 6 nebo 1, 2, 4, 5), jejich součet musí být rovněž dělitelný každým číslem z této čtveřice. To znamená, že součet této dvojice má jistě alespoň čtyři dělitele z množiny M, a proto je podle zadání mozaikový.

Jiné řešení. Ukážeme, že každé kladné celé číslo je mozaikové právě tehdy, když je dělitelné číslem 6 nebo číslem 20.

Pokud $6 \mid n$, pak je číslo n dělitelné čísly 1, 2, 3 i 6. Pokud $20 \mid n$, pak je n dělitelné čísly 1, 2, 4 a 5. Tedy v obou případech je číslo n mozaikové.

Naopak, ať je n mozaikové. Pokud $6 \nmid n$, pak alespoň jedno z čísel 2, 3 nedělí n. Pokud $2 \nmid n$, tak ani $4 \nmid n$. Zůstávají možné dělitele $1, 3, 5, 6$, ale jelikož $6 \nmid n$, číslo n nemá čtyři různé dělitele mezi čísly $1, \ldots, 6$, což je ve sporu s tím, že je mozaikové. Tedy $2 \mid n$. Jelikož $6 \nmid n$, musí platit $3 \nmid n$. A jelikož $6 \nmid n$ a $3 \nmid n$, aby mělo n alespoň čtyři dělitele mezi $1, \ldots, 6$, musí ho dělit čísla $1, 2, 4, 5$, takže $20 \mid n$.

To znamená, že mezi třemi mozaikovými čísly budou alespoň dvě čísla násobky 6 (pak je i jejich součet násobkem 6) nebo budou alespoň dvě čísla násobky 20 (pak je i jejich součet násobkem 20). V obou případech je součet mozaikový.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky z výše popsaných postupů následovně:

A1. Pozorování, že každé mozaikové číslo musí být dělitelné číslem 2: 1 bod

A2. Důkaz, že mozaikové číslo musí mít dělitele 1, 2, 3, 6 (tj. je dělitelné 6) nebo dělitele 1, 2, 4, 5 (tj. je dělitelné 20): 4 body

B1. Dokončení řešení za předpokladu A2: 2 body

Celkově za neúplná řešení udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}) + \mathrm{B1}$ bodů.

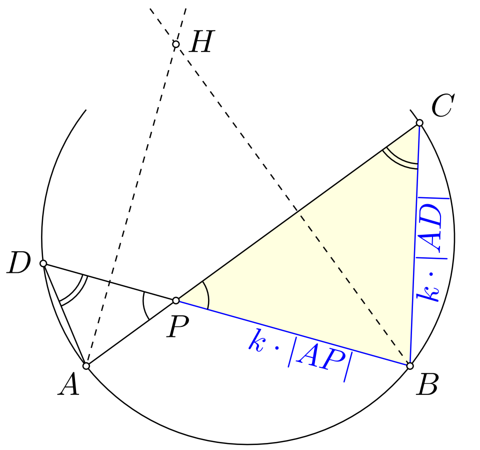
3. *V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík úhlopříček. Dále označme H průsečík výšek trojúhelníku APB. Předpokládejme, že platí $|AP| + |PB| = |AD| + |BC|$. Dokažte, že $|HC| = |HD|$.* (Josef Tkadlec, Michal Janík)

Řešení. Ukážeme, že platí $|AP| = |AD|$ a $|BP| = |BC|$. Jelikož čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, pro obvodové úhly příslušné oblouku AB platí $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$. Dále platí $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle BPC|$. Odtud dostáváme, že trojúhelníky APD a BPC jsou podobné podle věty *uu*. Existuje tak konstanta $k > 0$, že $|PB| = k \cdot |AP|$ a $|BC| = k \cdot |AD|$. Z předpokladu máme

$$\begin{aligned} |AP| + |PB| &= |AD| + |BC|, \\ |AP| + k \cdot |AP| &= |AD| + k \cdot |AD|, \\ (1 + k) \cdot |AP| &= (1 + k) \cdot |AD|, \\ |AP| &= |AD|. \end{aligned}$$

A jelikož $|AP| = |AD|$, tak z rovnosti $|AP| + |PB| = |AD| + |BC|$ dostáváme, že platí i $|PB| = |BC|$. Takže trojúhelníky APD a BPC jsou rovnoramenné se základnami po řadě PD a PC.

Trojúhelník APD je rovnoramenný, proto osa základny PD splývá s výškou ke straně PB v trojúhelníku ABP. Tedy bod H leží na ose úsečky PD, a platí tak $|HD| = |HP|$. Analogicky dostaneme, že platí $|HC| = |HP|$, tedy platí $|HC| = |HP| = |HD|$, jak jsme chtěli ukázat.



Poznámka. Lze ukázat, že H je středem oblouku CD neobsahujícího A, B kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$, tedy tzv. „Švrčkovým bodem“ trojúhelníků DAC a DBC vzhledem k A a B. Plyne to z faktu, že H leží na osách úhlů DAC a DBC. Jelikož H je středem zmíněného oblouku CD, platí $|HC| = |HD|$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky z výše popsaných postupů následovně:

A1. Uvedení, že trojúhelníky APD a BPC jsou podobné: 1 bod

A2. Důkaz, že alespoň jeden z trojúhelníků APD a BPC je rovnoramenný: 3 body

B1. Důkaz rovnosti $|HC| = |HP|$ nebo $|HD| = |HP|$ za předpokladu rovnoramennosti trojúhelníků APD a BPC: 2 body

B2. Důkaz, že H je středem oblouku CD kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$ neobsahujícího A, B, za předpokladu rovnoramennosti trojúhelníků APD a BPC: 2 body

Celkově za neúplná řešení udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}) + \max(\mathrm{B1}, \mathrm{B2})$ bodů.