Úlohy domácího kola kategorie C

1. *Přirozené číslo zapsané navzájem různými číslicemi nazveme* pitoreskní*, když každá jeho vnitřní číslice dělí dvojmístné číslo tvořené zleva doprava jejími sousedy. Například* 1324 *je pitoreskní, protože* 3 *dělí* 12 *a* 2 *dělí* 34*. Rozhodněte, zda existuje pitoreskní číslo tvořené všemi číslicemi a)* 1 *až* 8*, b)* 1 *až* 9*.* (Patrik Bak)

Řešení. a) Ano, existuje. Číslo 53174628 je pitoreskní, protože 3 dělí 51, 1 dělí 37, 7 dělí 14, 4 dělí 76, 6 dělí 42 a 2 dělí 68.

b) Zdůvodníme, proč takové pitoreskní číslo neexistuje. Budeme předpokládat, že takové číslo máme a odvodíme jeho vlastnosti, které nás nakonec dovedou ke sporu.

Podíváme se na dělitelnost některými jednocifernými čísly. Nejdříve rozlišíme sudé a liché číslice. Některá sudá číslice je určitě vnitřní a pak je sudá i číslice napravo od ní (dvojmístné číslo tvořené sousedy zleva doprava musí být sudé). Opakováním této úvahy zjišťujeme, že za první sudou vnitřní číslicí už následují pouze sudé číslice (mohlo by se však stát, že první číslice je sudá a oddělená od zbývajících sudých číslic). Speciálně poslední číslice je sudá.

Číslice 5 musí být první číslicí. Kdyby byla vnitřní číslicí, napravo od ní by byla číslice 0 nebo 5, ale zadání nulu nepřipouští a pětka se neopakuje. Z předchozího odstavce nemůže být poslední číslicí. Když je první číslice 5, tedy lichá, musí sudé číslice tvořit souvislý blok „vpravo“ a liché číslice souvislý blok „vlevo“.

Číslice 9 musí být v bloku lichých číslic poslední. Jinak by existovalo dvojmístné číslo tvořené číslicemi 1, 3, 5, 7 a dělitelné 9. O dělitelnosti 9 rozhoduje ciferný součet, ale žádný ze součtů $1+3$, $1+5$, $1+7$, $3+5$, $3+7$, ani $5+7$ není dělitelný 9.

Číslice 7 (stejně jako 1 a 3) je tudíž v bloku lichých číslic uvnitř. Dělí tak nějaké dvojmístné číslo tvořené číslicemi 1, 3, 5, 9. Z čísel 13, 15, 19, 31, 35, 39, 51, 53, 59, 91, 93, 95 jsou pouze 35 a 91 dělitelná 7. Jenže číslice 5 je nutně první a za číslicí 9 už žádná lichá číslice být nemůže. Pro obě čísla 35 a 91 dostáváme spor s pozicí číslice 5, resp. 9, a proto žádné takové pitoreskní číslo neexistuje.

Komentář. Popíšeme ještě, jakým způsobem objevit číslo 53174628 v části a). Stejně jako v části b) dojdeme k tomu, že v bloku lichých číslic musí být číslice 5 první a z posledního odstavce vyplývá, že v tomto bloku je číslice 7 poslední. Číslice 1 a 3 jsou tedy vnitřní a navzájem sousední. O dělitelnosti 3 rozhoduje ciferný součet a ze součtů $1+7$ a $5+1$ je pouze druhý dělitelný 3. Takže jediné přípustné pořadí v rámci bloku lichých číslic je 5317.

Sudý blok číslic musí začít číslicí 4, protože 7 dělí z dvojmístných čísel začínajících číslicí 1 pouze číslo 14. Pak následuje 2 nebo 6, protože 4 dělí 72 a 76. Snadno vyzkoušíme, že variantu 531742 nelze prodloužit ani dvojčíslím 68, ani dvojčíslím 86. Variantu 531746 lze prodloužit pouze dvojčíslím 28. Navíc jsme tak ukázali, že číslo 53174628 je jediné možné.

Jiné řešení části b). Stejně jako v prvním řešení zjistíme, že pitoreskní číslo se skládá z bloku lichých číslic, za kterým následuje blok sudých číslic, a že první číslicí je 5.

Ukážeme, že napravo od číslice 1 je nejvýše jedna lichá číslice. Kdyby tam byly alespoň dvě liché číslice, označme je zleva X, Y, znamenalo by to, že $X > 1$ dělí dvojmístné číslo $\overline{1Y}$. To se stát nemůže, protože 13, 17 i 19 jsou prvočísla.

Označme první tři číslice zleva 5, A, B. Z předchozího odstavce víme, že $A \neq 1$. Dvojmístné číslo $\overline{5B}$ tak nemůže být 53 ani 59, protože jde o prvočísla. Nemůže to být ani 51, protože by za číslicí 1 byly ještě další dvě liché číslice. Zbývá pouze $B = 7$ a $A = 3$. Za trojčíslím 537 má následovat 1 nebo 9, ovšem ani jedno z čísel 31, 39 není dělitelné 7. Hledané pitoreskní číslo tedy neexistuje.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozhodněte, co je pravda: a) Každý dělitel sudého čísla je sudý. b) Každý dělitel lichého čísla je lichý. c) Sudé číslo dělí pouze sudá čísla. d) Liché číslo dělí pouze lichá čísla. [a) Ne, 6 má dělitele 3. b) Ano. c) Ano. d) Ne, 3 dělí 6.]

N2. Najděte všechna čtyřmístná pitoreskní čísla složená z číslic 5, 6, 7, 8. [Je to jen 5768.]

N3. Zapište všechny číslice 1 až 9 do devítimístného čísla tak, aby každá dvojice po sobě jdoucích číslic (zleva doprava) tvořila násobek sedmi nebo třinácti. [Pokud si vypíšeme dvojmístné násobky sedmi a třinácti, zjistíme, že zápis žádného z nich kromě 77 nekončí sedmičkou. Proto musí hledané číslo sedmičkou začínat a jediné přípustné pokračování je 784. Pokud zvolíme jako další číslici 9, následuje jedině 135 a poslední dvě číslice lze doplnit pouze v pořadí 26, což dává řešení 784913526. Lze ukázat, že kdybychom za trojčíslím 784 pokračovali číslicí 2, žádné další řešení nedostaneme.]

D1. Rozestavte po obvodu kruhu co nejvíce různých číslic tak, aby každá sousední dvojice tvořila ve vhodném pořadí násobek sedmi. [Umíme rozestavit pět číslic např. v pořadí $1, 2, 4, 8, 9$. Více než pět číslic rozestavit nelze. Vypsáním násobků sedmi se přesvědčíme, že každé dvě sousední číslice musí náležet do stejné množiny z těchto tří: $\{9, 1, 4, 2, 8\}, \{3, 5, 6\}, \{7, 0\}$.]

2. *Uvažujme přirozená čísla a, b, c taková, že čísla a, b, c, $a+b$, $b+c$, $c+a$ jsou navzájem různá a součet tří největších z nich je 75. Určete největší možnou hodnotu součtu $a+b+c$.* (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Vezmeme-li jakákoliv tři z uvedených čísel, jejich součet bude podle zadání nejvýše 75. Platí tak $(a+b)+(b+c)+(c+a) \leqq 75$, tedy $2a+2b+2c \leqq 75$. Po vydělení dvěma a uvážení celočíselnosti zjišťujeme, že $a+b+c \leqq 37$.

Hodnota 37 je dosažitelná například pro $a=19$, $b=17$, $c=1$. Šestice čísel je pak 1, 17, 18, 19, 20, 36 a součet tří největších je skutečně $19+20+36=75$.

KOMENTÁŘ. Řešení je sepsáno stručně a není vidět, jak jsme na něj přišli. Popíšeme proto přirozenější úvahy vyplývající ze zadání.

Intuice by nám mohla (mylně) napovědět, že největší jsou čísla $a+b$, $b+c$, $c+a$. Jejich součet je $2a+2b+2c$, což nemůže být liché číslo 75. Proto je nutně mezi třemi největšími čísly aspoň jedno z čísel a, b, c.

Role písmen a, b, c jsou zaměnitelné,* proto můžeme předpokládat $a > b > c$. Protože $a+b > a$ a rovněž $c+a > a$, jsou třemi největšími čísly a, $a+b$, $c+a$, což znamená, že $3a+b+c=75$. Součet $a+b+c$ vyjádříme pomocí předchozího výrazu jako $3a+b+c-2a=75-2a$, z čehož plyne, že si přejeme co nejmenší hodnotu a. Výraz $75-2a$ (tedy $a+b+c$) totiž nabude největší možné hodnoty, právě když a bude nejmenší.

Zároveň a musí být dostatečně velké, aby patřilo mezi tři největší čísla, speciálně je větší než $b+c$. Proto $75=3a+b+c < 3a+a=4a$ a z nerovnice $4a > 75$ dopočteme $a \geqq 19$. Z předchozího odstavce víme, že chceme zvolit $a=19$, dopočteme $b+c=75-3\cdot 19=18$ a vhodně zvolíme b, c.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Číslo x je jednomístné, číslo y dvojmístné a číslo z trojmístné. Uspořádejte podle velikosti čísla a) $y+z+z$, $z+x+x$, $x+z+z$, b) $2x+y$, $2y+z$, $2z+y$, $2y+x$. [a) Pokud jsou dva sčítance u dvou součtů shodné, o pořadí rozhoduje třetí sčítanec. Protože $x<y<z$, platí i $z+x+x < x+z+z < y+z+z$. b) Výrazy si lze například opět zapsat jako součet tří sčítanců a dále postupovat jako v části a). Vyjde $2x+y < 2y+x < 2y+z < 2z+y$.]

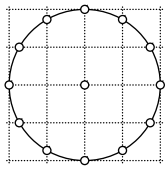
N2. Pro přirozená čísla x, y platí, že hodnota výrazu $3x+5y$ je menší než 2025 a hodnota $5x+3y$ je menší než 2026. Jaká je největší možná hodnota součtu $x+y$? [Všimneme si, že součet daných dvou výrazů je násobkem $x+y$, tj. $(3x+5y)+(5x+3y)=8(x+y)$. Víme, že jde o celá čísla, takže $3x+5y \leqq 2024$ a $5x+3y \leqq 2025$, následně platí $8(x+y) \leqq 2024+2025=4049$ a $x+y \leqq 506\frac{1}{8}$, tedy $x+y \leqq 506$. Je 506 největší *možná* hodnota součtu? Ano, např. pro $x=y=253$ obě podmínky ze zadání platí.]

D1. Kolik různých výsledků můžeme dostat, sečteme-li každá dvě z daných pěti různých přirozených čísel? Pro každý možný počet uveďte příklad takové pětice čísel. [B–52–S–3]

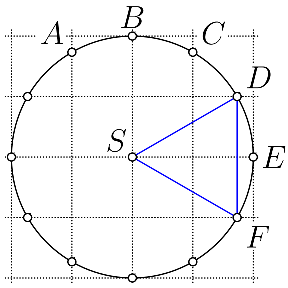
D2. Na tabuli je napsáno pět navzájem různých kladných čísel. Určete, kolika nejvýše způsoby se z nich dá sestavit dvojice, jejíž součet se rovná některému z pěti čísel napsaných na tabuli. [B–66–S–1]

* Zaměnitelnost rolí nám umožňuje v mnoha úlohách hned od začátku předpokládat uspořádání $a \geqq b \geqq c$, což nám často pomůže zjednodušit úvahy a zápisy.

3. *V síti tvořené čtverci o straně* 1 *je dána kružnice se středem v mřížovém bodě a s poloměrem* 2. *Tato kružnice protíná přímky sítě dohromady ve* 12 *bodech. Dokažte, že těchto* 12 *průsečíků tvoří vrcholy pravidelného* 12*úhelníku.* (Josef Tkadlec)



Řešení. Označme body S, A, B, C, D, E, F podle obrázku. Úsečky SD a SF jsou souměrně sdružené podle vodorovné osy SE, takže úsečka DF je k této ose kolmá, tedy svislá. Body D, F leží na vodorovných rovnoběžkách, jejichž vzdálenost je 2, a proto je i $|DF| = 2$. Podle zadání je $|SD| = |SF| = 2$, takže vyznačený trojúhelník SDF je rovnostranný.



Úhel DSF má tak velikost 60° a jeho polovina DSE má velikost 30°. Podobně se zdůvodní, že i úhel BSC má velikost 30°. Místo trojúhelníku SDF stačí uvažovat trojúhelník SAC a místo vodorovné osy SE svislou osu SB. Velikost úhlu CSD už snadno spočteme tak, že od pravého úhlu BSE odečteme velikosti úhlů BSC a DSE. Zjistili jsme, že $|\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle CSD| = |\sphericalangle DSE| = 30°$.

Kružnice i čtvercová síť jsou osově souměrné podle vodorovné osy SE i podle svislé osy SB, a proto všechny další středové úhly příslušné sousedním vrcholům 12úhelníku mají velikost 30° a 12úhelník je tedy pravidelný.

Poznámka. Asi ve všech řešeních bude klíčové zdůvodnit, že jeden ze středových úhlů má velikost 30°. Pomocí symetrie nebo otáčení lze snadno ukázat například rovnosti $|AB| = |BC| = |DE| = |EF|$, ale to samo o sobě ještě nestačí, aby byl 12úhelník pravidelný. Jakmile přidáme zdůvodnění, že $|\sphericalangle ASB| = 30°$, jsme v podstatě hotovi.

Poznámka. Patrně nejznámější definice pravidelného n-úhelníku říká, že všechny jeho vnitřní úhly jsou shodné a všechny jeho strany jsou shodné. My jsme ukázali, že máme 12 bodů na kružnici rozmístěných tak, že středový úhel příslušný dvěma sousedním bodům je pokaždé 30°. To znamená, že trojúhelníky ASB, BSC, CSD, DSE atd. jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky (podle věty *sus*, protože dvě strany tvoří poloměry kružnice a úhel jimi sevřený je 30°). Ze shodnosti vyplývají rovnosti $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$ atd. a také každý vnitřní úhel vyjde jako součet dvou úhlů o velikosti 75°, např. $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABS| + |\sphericalangle SBC| = \frac{1}{2}(180° - 30°) + \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75° + 75°$.

Úloha je svým způsobem náročná v tom, abychom zdůvodnili, co „ještě je potřeba“ (viz první poznámka) a dovolili si se zdůvodňováním přestat v momentě, kdy „už je to zřejmé“ – jako například ve vzorovém řešení, protože 12 bodů „rovnoměrně“ rozmístěných na kružnici přijímáme jako jednu z možných definic pravidelného 12úhelníku (odpovídá též ciferníku).

Návodné a doplňující úlohy:

N1. V rovnoramenném trojúhelníku KLM je $|\sphericalangle LKM| = 75°$. Na jeho základně LM jsou zvoleny body X, Y tak, že $|\sphericalangle LKX| = 20°$ a $|\sphericalangle YKM| = 20°$. Pomocí vhodné věty o shodnosti trojúhelníků zdůvodněte, že $|LX| = |MY|$. [Rovnoramenný trojúhelník má vnitřní úhly při základně shodné, a tak pro trojúhelníky KLX a KMY je $|\sphericalangle KLX| = |\sphericalangle KMY|$, dále $|KL| = |KM|$ a dle zadání $|\sphericalangle LKX| = |\sphericalangle MKY|$. Jsou tedy shodné podle věty *usu*, a proto $|LX| = |MY|$.]

N2. Najděte pravoúhlý trojúhelník, v němž je poměr velikostí dvou vnitřních úhlů i poměr délek dvou stran roven $1 : 2$. [Trojúhelník s úhly 90°, 45°, 45° nemá strany ve správném poměru. Připadá v úvahu už jen trojúhelník s úhly 90°, 60°, 30°. Označme jeho přeponu AB a prodlužme jeho kratší odvěsnu BC do bodu D tak, že C je středem BD. Trojúhelníky ABC a ADC jsou shodné podle věty *sus*, trojúhelník ABD je rovnostranný, a tak je $2|BC| = |BD| = |AB|$. Hledaný trojúhelník je „polovinou rovnostranného trojúhelníku“.]

N3. Vzdálenost bodu T od středu S kružnice k se rovná průměru kružnice. Bodem T vedeme tečny TA, TB, které se kružnice dotýkají v bodech A, B. Určete vnitřní úhly trojúhelníků TSB a ASB. [Pravoúhlý trojúhelník TSB má poměr stran $|BS| : |TS| = 1 : 2$. Podobně jako v řešení předešlé úlohy jej můžeme doplnit na rovnostranný trojúhelník TSC, kde B je středem SC. Pak $|\sphericalangle TSB| = 60°$ a $|\sphericalangle BTS| = 30°$ a rovnoramenný trojúhelník ASB má vnitřní úhly 120°, 30°, 30°.]

D1. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu AB v jejím středu S. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCS je shodná s kružnicí k. [C–51–S–2]

D2. V rovině je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| = a < b = |BC|$. Na jeho straně BC existuje bod K a na straně CD bod L tak, že daný obdélník je úsečkami AK, KL a LA rozdělen na čtyři navzájem podobné trojúhelníky. Určete hodnotu poměru $a : b$. [C–53–II–1]

4. *Najděte všechna čtyřmístná čísla $n = \overline{abcd}$, pro která platí*

$$\overline{ab} + \overline{cd} = \sqrt{n}, \qquad \overline{cd} - \overline{ab} = 5.$$

(Mária Dományová)

ŘEŠENÍ. Označme dvojmístná čísla $\overline{ab} = x$ a $\overline{cd} = y$. Podmínky ze zadání pak můžeme přepsat jako soustavu rovnic pro x a y. Ze zadání platí $n = \overline{abcd} = 100 \cdot x + y$, takže řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= \sqrt{100x + y},\\ y - x &= 5. \end{aligned}$$

Vyjádřením $y = x + 5$ ze druhé rovnice a dosazením do první rovnice po umocnění na druhou vznikne kvadratická rovnice

$$\begin{aligned} 2x + 5 &= \sqrt{101x + 5},\\ (2x + 5)^2 &= 101x + 5,\\ 4x^2 + 20x + 25 &= 101x + 5,\\ 4x^2 - 81x + 20 &= 0. \end{aligned}$$

Tu můžeme řešit dle známého vzorce, nebo si všimneme, že platí $4x^2 - 81x + 20 = (4x - 1)(x - 20)$. Celočíselné řešení tak získáme pouze pro $x = 20$. Potom $y = 25$ a $n = 2025$. Snadno ověříme, že toto n splňuje obě rovnosti ze zadání.

JINÉ ŘEŠENÍ. Budeme sledovat poslední číslici uvedených výrazů. Například rovnost $\overline{cd} - \overline{ab} = 5$ říká, že pro $b = 2$ je $d = 7$ apod.

Rovnost $\overline{ab} + \overline{cd} = \sqrt{n}$ přepišme jako $\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)^2 = \overline{abcd}$. Poslední číslice na pravé straně je d. Na levé straně je to poslední číslice výrazu $(b+d)^2$. Udělejme si tedy tabulku, do jejíhož 1. řádku doplníme všechny možné hodnoty b, do 2. řádku vyplníme příslušné d vyhovující rovnosti $\overline{cd} - \overline{ab} = 5$ a do 3. řádku vyplníme poslední číslici výrazu $(b+d)^2$.

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
$(b+d)^2$	5	9	1	1	9	5	9	1	1	9

Aby mohla platit rovnost $\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)^2 = \overline{abcd}$, hledáme takové číslice b, d, pro které se 2. a 3. řádek shodují. To nastane pro $b = 0$, $d = 5$ a $b = 4$, $d = 9$. V obou případech je $d > b$ a z rovnosti $\overline{cd} - \overline{ab} = 5$ plyne, že $c = a$. Hledaná n jsou tedy tvaru $\overline{a0a5}$ nebo $\overline{a4a9}$ a těchto 18 čísel můžeme jedno po druhém vyzkoušet.

Zkoušení možností lze zredukovat dalšími úvahami. Například:

- Číslo n je čtyřciferné, menší než 10 000, a proto $\sqrt{n} < 100$. Už víme, že $c = a$, takže $\overline{ab} + \overline{ad} = \sqrt{n} < 100$ znamená, že $a \leqq 4$.
- „Známý“ fakt, že končí-li druhá mocnina pětkou, končí už nutně dvojčíslím 25, nás může motivovat vyšetřit předposlední číslici hledaných čísel. Má platit rovnost $\left(\overline{ab} + \overline{ad}\right)^2 = \overline{abad}$. V případě $b = 0$, $d = 5$ máme uvnitř závorky číslo končící pětkou, zapišme jej jako $10k + 5$. Jeho druhá mocnina $100k^2 + 100k + 25$ končí dvojčíslím 25, takže nutně $a = 2$ a z čísel tvaru $\overline{a0a5}$ stačí vyzkoušet pouze číslo 2025.
- Součet a rozdíl dvou čísel mají stejnou paritu, proto $\sqrt{n}$ a tedy i n je liché číslo. Číslice d je tak lichá a b sudá a tabulka tak mohla být poloviční.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete dvě čísla, jejichž součet je roven 20 a rozdíl je roven 25. [Hledáme čísla x a y. Podmínky ze zadání zapíšeme jako rovnice $x + y = 20$, $x - y = 25$. Stačí vyjádřit x pomocí y, např. $x = y + 25$ a dosadit do zbývající rovnice $(y + 25) + y = 20$, což dá $2y = -5$, tj. $y = -2{,}5$. Dopočteme $x = 22{,}5$.]

N2. Zápis trojmístného čísla začíná číslicí 4. Když ji smažeme a napíšeme na konec, dostaneme trojmístné číslo rovné třem čtvrtinám původního čísla. Určete původní číslo. [Hodnotu zbývajícího dvojčíslí označíme x. Původní číslo lze vyjádřit jako $400 + x$, po přemístění čtyřky je to $10x + 4$. Rovnice $10x + 4 = \frac{3}{4}(400 + x)$ má řešení $x = 32$ a původní číslo bylo 432.]

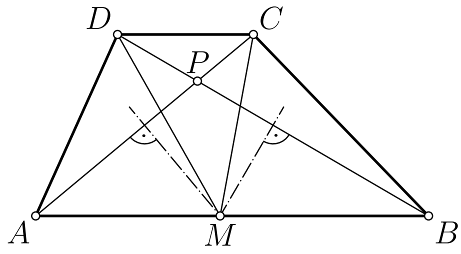
N3. Najděte všechny trojice (ne nutně různých) číslic a, b, c, pro něž pětimístná čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ jsou v poměru $63 : 36$. [C–63–II–1]

D1. Najděte všechna přirozená čísla s vlastností: Když toto číslo vynásobíme číslem o 1 větším a k výsledku připíšeme zprava 25, dostaneme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla. [Popsaná operace číslu k přiřadí číslo $100k(k+1)+25$. To je druhou mocninou přirozeného čísla vždy, neboť $100k(k + 1) + 25 = 100k^2 + 100k + 25 = (10k + 5)^2$.]

D2. Existují dvoumístná čísla $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ taková, že $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$? [Neexistují. Kdyby čísla existovala, platilo by pro ně $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} > \overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{cd} > \overline{ab} \cdot \overline{cd}$, což je spor.]

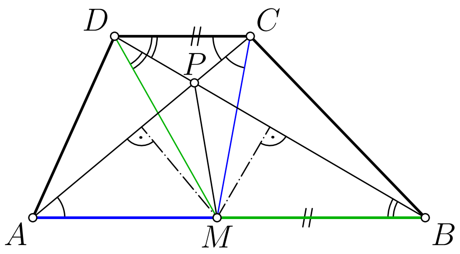
D3. Ze tří různých nenulových číslic jsme sestavili všech šest možných trojciferných čísel. Tato čísla jsme seřadili od největšího po nejmenší. Zjistili jsme, že čtvrté číslo v této řadě je aritmetickým průměrem prvního a pátého čísla. Ze kterých číslic byla čísla sestavena? [C–47–II–1]

D4. Najděte největší pětimístné přirozené číslo, které je dělitelné číslem 101 a které se čte zepředu stejně jako zezadu. [B–52–S–1]



5. *Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě P a jejich osy se protínají v bodě M. Předpokládejme, že M leží na základně AB. Dokažte, že P je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDM.*
(Jaroslav Švrček)

ŘEŠENÍ. Z rovnoběžnosti $AB \parallel CD$ vyplývá, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DCA|$. Protože M je na ose úsečky AC, je trojúhelník ACM rovnoramenný, což znamená, že $|\sphericalangle MAC| = |\sphericalangle MCA|$. Navíc M leží na straně AB, takže úhly BAC a MAC splývají. Celkem tak dostáváme rovnost $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle MCA|$, takže bod P leží na ose úhlu DCM.



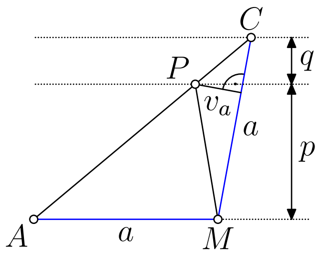
Analogicky se zdůvodní, že bod P leží na ose úhlu CDM. Stačí použít rovnosti $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CDB|$ (rovnoběžnost $AB \parallel CD$) a $|\sphericalangle MBD| = |\sphericalangle MDB|$ (rovnoramenný trojúhelník BDM) a fakt, že M leží na straně AB.

Bod P leží na dvou osách vnitřních úhlů trojúhelníku CDM. Je tak středem jeho kružnice vepsané.

JINÉ ŘEŠENÍ. Ke klíčovému poznatku, že P leží na ose úhlu CDM, můžeme dospět také dvojím vyjádřením obsahu rovnoramenného trojúhelníku AMC, který budeme značit $[AMC]$. Označme a délku jeho ramene a uvažujme P jako libovolný bod základny AC. Výšku trojúhelníku AMC na stranu AM rozdělme na části p, q podle obrázku. Označme ještě v_a výšku trojúhelníku MCP na stranu MC. Potom pro obsah trojúhelníku AMC platí

$$\tfrac{1}{2}a(p+q) = [AMC] = [AMP] + [MCP] = \tfrac{1}{2}ap + \tfrac{1}{2}av_a,$$

z čehož plyne, že $q = v_a$.



Analogicky se zdůvodní, že $q = v_b$, kde v_b značí výšku trojúhelníku MDP na stranu MD. Celkově tím získáváme, že $q = v_a = v_b$, tedy že vzdálenosti bodu P od stran trojúhelníku CDM jsou stejné a P je tudíž středem jeho kružnice vepsané.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro každý bod na ose úsečky platí, že je od obou krajních bodů úsečky stejně vzdálen. Vyřešte pomocí tohoto poznatku úlohu: Mějme trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, přičemž $|\sphericalangle ABC| = 25°$. Osa strany AB protíná odvěsnu BC v bodě K. Určete velikost úhlu KAC. [Bod K leží na ose úsečky AB a platí tedy $|AK| = |BK|$. Trojúhelník AKB je pak rovnoramenný a má shodné vnitřní úhly $|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle KBA| = 25°$. Hledaný úhel je $|\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle KAB| = (90° - |\sphericalangle ABC|) - 25° = 40°$.]

N2. V trojúhelníku ABC narýsujeme osu vnitřního úhlu u vrcholu A a její průsečík se stranou BC označíme D. Na straně AB najdeme takový bod M, že $MD \parallel AC$. Dokažte, že pak úsečky AM a DM mají stejnou délku. [Přímka AD je osou úhlu u vrcholu A, takže $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle MAD|$. Kromě toho úhly CAD a MDA jsou střídavé, protože $MD \parallel AC$. Trojúhelník AMD je tudíž rovnoramenný a $|AM| = |DM|$.]

N3. V rovnoramenném trojúhelníku ABC je $|AB| = |AC|$ a na rameni AB je bod D takový, že $|AD| = |DC| = |CB|$. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. [Rovnoramennost budeme překládat do rovnosti úhlů. Označme $|\sphericalangle BAC| = x$. Nejdříve využijeme rovnoramenný trojúhelník ADC, abychom zjistili, že $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DCA| = x$ a vnější úhel BDC je jejich součtem, tj. $|\sphericalangle BDC| = 2x$. Poté využijeme rovnoramenný trojúhelník BDC a zjistíme, že $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle DBC| = 2x$. Nakonec využijeme rovnoramenný trojúhelník ABC a zjistíme, že $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABC| = 2x$. Z téhož trojúhelníku sestavíme rovnici $x + 2x + 2x = 180°$ a vypočteme úhly 36°, 72°, 72°.]

N4. V lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \| CD$, se osy vnitřních uhlů při vrcholech C a D protínají na úsečce AB. Dokažte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$. [C–73–II–2]

D1. V rovnoběžníku $ABCD$ platí, že osa úhlu ABC prochází středem L strany CD. Dokažte, že $AL \perp BL$. [C–71–S–2]

D2. Uvažujme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se shodnými úhly při vrcholech A a B. Nechť se osy jeho stran BC a AD protínají v bodě M, který leží na straně AB. Dokažte, že $|AC| = |BD|$. [Trojúhelníky MBC a MDA jsou rovnoramenné a díky shodnosti úhlů při vrcholech A a B dokonce podobné. Trojúhelníky MBD a MCA se tak shodují nejen ve dvou stranách ($|MB| = |MC|$ a $|MD| = |MA|$), ale i v úhlech u vrcholu M, protože jde o vnější úhly u hlavních vrcholů *podobných* rovnoramenných trojúhelníků. Shodují se tedy i třetí strany trojúhelníků MBD a MCA, což jsou úhlopříčky BD a CA.]

D3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB a D, E středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům APC, CPB. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC je průsečíkem výšek trojúhelníku CDE. [C–58–II–2]

6. *Na pekáči je* 21 *buchet,* 10 *z nich je plněných povidly, zbylých* 11 *tvarohem. Můžeme položit* 10 *otázek. V každé otázce ukážeme na dvě buchty a kuchař nám řekne, jestli mají stejnou náplň, nebo každá jinou. Je možné ptát se tak, abychom o alespoň jedné buchtě s jistotou zjistili, čím je plněná?* (Josef Tkadlec, Felix Schröder)

ŘEŠENÍ. Ano, je to možné. Označme jednu buchtu za *vyvolenou* a zbývajících 20 buchet rozdělme do dvojic, na které se postupně ptáme.

Buchty, na které jsme dostali odpověď „jinou", úplně vyřadíme. Tím ubude stejně povidlových buchet jako tvarohových. Zůstalo nám tedy k povidlových a $k+1$ tvarohových buchet (celkem $2k+1$ buchet).

Uvažujeme už pouze k odpovědí „stejnou". Mezi $2k$ buchtami, na které jsme se ptali, je nutně sudý počet povidlových a sudý počet tvarohových. Vyvolená buchta je tedy toho typu, od kterého je mezi $2k+1$ buchtami lichý počet kusů.

Konkrétně je-li k (počet povidlových buchet) liché, je mezi $2k+1$ buchtami lichý počet povidlových, a tedy vyvolená buchta je povidlová. Pokud je k sudé, je $k+1$ (počet tvarohových) liché, pak je mezi $2k+1$ buchtami lichý počet tvarohových, a tedy vyvolená buchta je tvarohová.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Ze 4 buchet na talíři je 1 tvarohová, zbylé 3 jsou povidlové. Na kolik nejméně otázek zjistíme od našeho kuchaře, která je tvarohová? [Jsou potřeba dvě otázky. Pokud je první odpověď „stejné", ukázali jsme na povidlové buchty a zbylé dvě jsou různé. Zeptáme se na jednu povidlovou buchtu znovu a jednu z různých buchet. Pokud je první odpověď „různé", jsme ve stejné situaci jako v předchozím případě – zbylé dvě buchty jsou povidlové.]

N2. Náš kuchař připravil tvarohové a povidlové buchty, 4 jednoho typu, 7 druhého typu. Položili jsme mu 5 otázek na 10 různých buchet a pokaždé zazněla táž odpověď. Jedenáctou buchtu jsme se rozhodli sníst a byla povidlová. Kterých buchet bylo více? [Povidlových. Nemohlo zaznít 5 odpovědí „různá", protože to bychom museli mít každého typu alespoň 5 buchet. Zazněly tedy jenom odpovědi „stejná". Za každou odpověď „stejná" odložíme buď dvě povidlové buchty, nebo dvě tvarohové buchty. Celkem odložíme 10 z 11 buchet, takže buchty jednoho typu jsme odložili všechny – musel to být sudý počet 4 buchet, protože je odkládáme po dvou. Jedenáctá (snězená) buchta tak musela být jedna ze 7 buchet.]

D1. Mach hraje následující hru. Na začátku je na stole k hromádek, na nichž je postupně $1, 2, 3, \dots, k$ žetonů. V každém tahu vybere libovolné dvě hromádky a odstraní z obou stejný počet žetonů. Jeho cílem je, aby na stole zůstal jediný žeton. Může se mu to podařit a) pro k = 10, b) pro k = 11? [C–72–I–4]

D2. Na tabuli byla napsána čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. V každém kroku jsme dvě čísla smazali a nahradili druhou mocninou jejich rozdílu. Pokud po nejvýše 7 krocích zůstala na tabuli všechna čísla stejná, mohla to být čísla a) lichá, b) sudá? [C–72–S–3]

D3. V jednom poli šachovnice 8×8 je napsáno „+" a v ostatních polích „−". V jednom kroku můžeme změnit na opačná zároveň všechna čtyři znaménka v kterémkoli čtverci 2×2 na šachovnici. Rozhodněte, zda po určitém počtu kroků může být na šachovnici obou znamének stejný počet. [C–64–II–2]