

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Pro reálná čísla x a y jsou čísla $x + y$ a $x^2 + y^2$ celá. Je nutně i číslo $x^3 + y^3$ celé?
2. Dokažte, že pro nekonečně mnoho celých čísel D existují dvě nesoudělná kladná celá čísla a , b , pro která je D největším společným dělitelem čísel $5a^2 + b$ a $5b^2 + a$.
3. Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ takový, že $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE| \neq |AD|$, $|EF| = |FA|$ a $|\sphericalangle BDC| + |\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle FDB|$. Dokažte, že

$$|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle EDC| + |\sphericalangle AFE| = 360^\circ.$$

4. Podél kružnice jsou napsána alespoň čtyři reálná čísla. Platí, že v každé trojici sousedních čísel je jedno z nich součtem zbylých dvou. Dokažte, že některá dvě ze všech napsaných čísel mají stejnou absolutní hodnotu.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 13. ledna 2026

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Pro reálná čísla x a y jsou čísla $x + y$ a $x^2 + y^2$ celá. Je nutně i číslo $x^3 + y^3$ celé? (Tomáš Bárta)

ŘEŠENÍ. Pro $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$ a $y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$ platí $x + y = 1$,

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{4} + \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{4} = 2,$$

ale

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^3 = \\ &= \frac{1 + 3 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3}{8} + \frac{1 - 3 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3}{8} = \\ &= \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3}{8} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Tedy za daných podmínek nemusí $x^3 + y^3$ být celým číslem.

KOMENTÁŘ. Přestože je podané řešení úplné, vysvětlíme, jak dvojici x, y najít.

Platí $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$. Protože $x + y$ je celé číslo, je i $(x + y)^3$ celé číslo. To znamená, že $x^3 + y^3$ je celé číslo, právě když $3xy(x + y)$ je celé číslo. Dále $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, odkud vyjádříme $xy = \frac{1}{2}[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)]$. Čísla $(x + y)^2$ a $x^2 + y^2$ jsou celá a pokud budou mít různou paritu, pak bude xy ve tvaru $\frac{1}{2}m$, kde m je liché celé číslo. Platí tak $3xy(x + y) = \frac{3}{2}m(x + y)$, tedy pokud $x + y$ bude liché číslo, pak $3xy(x + y)$ nebude celé číslo, a proto ani $x^3 + y^3$ nebude celé číslo. Stačí tedy najít taková reálná čísla x, y , aby $x + y$ bylo liché číslo a $x^2 + y^2$ sudé číslo. Například volbou $x + y = 1$ a $x^2 + y^2 = 2$ vyřešením kvadratické rovnice po dosazení $y = 1 - x$ dostaneme $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$ a $y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$ z uvedeného řešení.

POZNÁMKA. Je také možné vyjádřit $x^3 + y^3$ pouze pomocí $x + y$ a $x^2 + y^2$. Jelikož $xy = \frac{1}{2}[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)]$, tak po dosazení do $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ a následné úpravě dostaneme

$$x^3 + y^3 = \frac{(x + y)[3(x^2 + y^2) - (x + y)^2]}{2}.$$

Jednoduchým rozbořem parit čísel $x + y$ a $x^2 + y^2$ vidíme, že $x^3 + y^3$ není celé číslo právě tehdy, když je $x + y$ liché a $x^2 + y^2$ sudé číslo.

POZNÁMKA. Dvojice reálných čísel x, y , pro něž jsou čísla $x + y$ a $x^2 + y^2$ celá, ale číslo $x^3 + y^3$ celé není, jsou právě dvojice $\{x, y\} = \{\frac{1}{2}(s + \sqrt{r}), \frac{1}{2}(s - \sqrt{r})\}$, kde s je liché celé číslo a r je nezáporné celé číslo, které při dělení 4 dává zbytek 3.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky z výše popsaných postupů následovně:

- A1. Vyjádření $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$, kde člen $3xy(x + y)$ je zapsán v součinném tvaru: 1 bod.
 B1. Vyjádření součinu $xy = \frac{1}{2}[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)]$: 1 bod.
 B2. Důkaz, že pokud $x + y$ a $x^2 + y^2$ mají různou paritu, pak xy není celé číslo: 3 body.
 C1. Vyjádření součtu $x^3 + y^3$ jen pomocí $x + y$ a $x^2 + y^2$ (tedy bez výskytu xy a podobně): 2 body.
 X1. Správná odpověď bez zdůvodnění: 0 bodů.

Celkem za neúplná řešení udělte $\max(A1 + B1, A1 + B2, C1)$ bodů.

2. *Dokažte, že pro nekonečně mnoho celých čísel D existují dvě nesoudělná kladná celá čísla a, b , pro která je D největším společným dělitelem čísel $5a^2 + b$ a $5b^2 + a$.*
(Tomáš Bárta)

KOMENTÁŘ. Pro přirozená čísla a, b označme $D(a, b)$ jejich největšího společného dělitele. Naším úkolem je dokázat, že množina

$$\Delta = \{D(5a^2 + b, 5b^2 + a) \mid a, b \in \mathbb{N}, D(a, b) = 1\}$$

je nekonečná. V prvním řešení ukážeme, že Δ obsahuje (nekonečnou) rostoucí posloupnost, ve druhém, že ke každému prvočíslu p různému od 5 existuje prvek množiny Δ , který je násobkem p , a ve třetím, že ke každému číslu a , které po dělení 5 dává zbytek 1, existuje prvek množiny Δ , který je násobkem a .

ŘEŠENÍ. V tomto řešení uvedeme příklad nekonečně mnoha dvojic (a, b) nesoudělných čísel, pro která vyjdou hodnoty $D(5a^2 + b, 5b^2 + a)$ navzájem různé. Konkrétně ukážeme, že vyhovují dvojice $(a, b) = (a, 125a^3 - 5a^2 + 1)$, kde a je libovolné přirozené číslo, a že pro ně je $D(5a^2 + b, 5b^2 + a) = 125a^3 + 1$.

Nejprve vyjádříme $D(5a^2 + b, 5b^2 + a)$ jako největšího společného dělitele dvou výrazů, z nichž jeden obsahuje pouze proměnnou a . K tomu využijeme vztah, který se používá při Eukleidově algoritmu: pro libovolná celá čísla u, v, c platí $D(u, v) = D(u, v + c \cdot u)$. Po prvním použití dostaneme

$$\begin{aligned} D(5a^2 + b, 5b^2 + a) &= D(5a^2 + b, 5b^2 + a - 5b \cdot (5a^2 + b)) = \\ &= D(5a^2 + b, -25a^2b + a). \end{aligned}$$

Po druhém použití

$$\begin{aligned} D(5a^2 + b, -25a^2b + a) &= D(5a^2 + b, -25a^2b + a + 25a^2 \cdot (5a^2 + b)) = \\ &= D(5a^2 + b, 125a^4 + a). \end{aligned}$$

Zvolme $b = 125a^3 - 5a^2 + 1$, neboli $5a^2 + b = 125a^3 + 1$. Protože $a \geq 1$, platí $125a^3 - 5a^2 + 1 = 5a^2(25a - 1) + 1 \geq 1$, tedy b je kladné celé číslo. Také zřejmě platí, že čísla a a $125a^3 - 5a^2 + 1$ jsou nesoudělná. Zkoumaný největší společný dělitel má hodnotu

$$D(5a^2 + b, 125a^4 + a) = D(125a^3 + 1, a(125a^3 + 1)) = 125a^3 + 1.$$

Jelikož $125a^3 + 1$ je rostoucí funkce v proměnné a , tak nabývá pro celá nezáporná čísla a nekonečně mnoha hodnot. Takže množina Δ je nekonečná.

JINÉ ŘEŠENÍ. V tomto řešení ukážeme, že množina

$$\Delta = \{D(5a^2 + b, 5b^2 + a) \mid a, b \in \mathbb{N}, D(a, b) = 1\}$$

obsahuje násobky nekonečně mnoha různých prvočísel. Z toho již plyne, že množina Δ je nekonečná – v konečné množině má totiž každý prvek jen konečně mnoho dělitelů, takže konečná množina může obsahovat násobky jen konečně mnoha různých čísel.

Uvažujme libovolné prvočíslu $p \neq 5$. Najdeme dvojici (a, b) nesoudělných čísel, pro kterou platí $p \mid D(5a^2 + b, 5b^2 + a)$. Jelikož prvočísel je nekonečně mnoho, bude tím úkol vyřešen.

Zaměřme se na takové dvojice (a, b) , ve kterých platí $b = a + p$. Potom

$$5a^2 + b = (5a^2 + a) + p \quad \text{a} \quad 5b^2 + a = 5(a + p)^2 + a = (5a^2 + a) + p(10a + 5p).$$

Aby prvočíslo p dělilo obě čísla $5a^2 + b$ i $5b^2 + a$, stačí zajistit, že $p \mid 5a^2 + a = a(5a + 1)$, tedy, že a nebo $5a + 1$ jsou násobkem p .

- Pokud zvolíme a jako násobek prvočísla p , bude i $b = a + p$ násobkem p a čísla a, b tak nebudou nesoudělná.
- Ukážeme, že pokud zvolíme a tak, že $p \mid 5a + 1$, pak čísla a, b jsou nesoudělná: Předpokládejme, že existuje prvočíslo q , které dělí a i $b = a + p$, tedy dělí i $b - a = p$. Jelikož q je prvočíslo, pak nutně $q = p$. Avšak $p \mid 5a + 1$ a zároveň platí $q \mid a$, takže i $p \mid a$. Platí tak $p \mid 5a + 1 - 5 \cdot a = 1$, což je ve sporu s tím, že p je prvočíslo. Proto jsou čísla a, b nesoudělná.

Zůstává pro nekonečně mnoho prvočísel p najít a tak, že $p \mid 5a + 1$. Má platit $kp = 5a + 1$ pro vhodné celé číslo k , tedy hledáme a ve tvaru $a = \frac{1}{5}(kp - 1)$. Rozlišíme čtyři případy podle zbytku prvočísla p po dělení číslem 5:

- Pokud $p \equiv 1 \pmod{5}$, stačí zvolit $k = 1$, pak $a = \frac{1}{5}(p - 1)$ je celé.
- Pokud $p \equiv 2 \pmod{5}$, zvolíme $k = 3$ (neboť $3 \cdot 2 = 6 \equiv 1$), pak $a = \frac{1}{5}(3p - 1)$ je celé.
- Pokud $p \equiv 3 \pmod{5}$, zvolíme $k = 2$ (neboť $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1$), pak $a = \frac{1}{5}(2p - 1)$ je celé.
- Pokud $p \equiv 4 \pmod{5}$, zvolíme $k = 4$ (neboť $4 \cdot 4 = 16 \equiv 1$), pak $a = \frac{1}{5}(4p - 1)$ je celé.

V každém případě je číselník dělitelný 5 a kladný, takže a je kladné celé číslo a platí $5a + 1 = kp$, tedy $p \mid 5a + 1$.

Pro každé prvočíslo $p \neq 5$ jsme tak našli dvojici (a, b) nesoudělných čísel, pro kterou platí $p \mid D(5a^2 + b, 5b^2 + a)$. Odtud plyne, že Δ je nekonečná.

POZNÁMKA. Konec druhého řešení lze zkrátit, použijeme-li známé tvrzení (tzv. Dirichletovu větu o aritmetických posloupnostech*, že prvočísel každého z tvarů $p = 5k + 1$, $p = 5k + 2$, $p = 5k + 3$, $p = 5k + 4$ je nekonečně mnoho. Potom místo rozlišení čtyř případů stačí uvážít libovolný jeden z nich.

JINÉ ŘEŠENÍ. Ukážeme ještě variaci na druhé řešení, kde místo uvažování prvočísel ukážeme, že Δ obsahuje násobek každého čísla tvaru $5k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Uvažme dvojice $(a, b) = (a, 6a + 1)$. Tato čísla jsou zřejmě nesoudělná. Potom

$$5a^2 + b = 5a^2 + 6a + 1 = (5a + 1)(a + 1)$$

a

$$5b^2 + a = 5(6a + 1)^2 + a = 5(36a^2 + 12a + 1) + a = 180a^2 + 61a + 5 = (5a + 1)(36a + 5).$$

To znamená, že $D(5a^2 + b, 5b^2 + a)$ je násobkem čísla $5a + 1$. Jelikož čísel tvaru $5a + 1$ je nekonečně mnoho, lze řešení dokončit stejně jako v prvním odstavci předchozího řešení.

* O této větě se můžete dozvědět více např. [zde](#).

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

V neúplných řešeních, která postupují podobně jako první uvedené vzorové řešení (tj. vyjadřují $D(5a^2 + b, 5b^2 + a)$ přesně, typicky pomocí Eukleidova algoritmu) udělte částečné body následovně:

- A1. Vyjádření $D(5a^2 + b, 5b^2 + a) = D(5a^2 + b, P(a))$, kde $P(a)$ závisí pouze na a (např. $P(a) = 125a^4 + a$): 3 body.
- A2. Popis nekonečně mnoha nesoudělných dvojic (a, b) , pro které vyjdou různé hodnoty $D(5a^2 + b, 5b^2 + a)$, včetně zdůvodnění (např. $(a, b) = (a, 125a^3 - 5a^2 + 1)$): 6 bodů.
- X1. Chybějící zdůvodnění, že zkonstruovaná čísla a, b jsou nesoudělná: -1 bod.

Celkově udělte $\max(A1, A2 + X1)$ bodů.

V neúplných řešeních, která postupují podobně jako druhé a třetí vzorové řešení (tj. ukazují, že množina Δ obsahuje násobky nekonečně mnoha různých čísel d) udělte částečné body následovně:

- B1. Důkaz, že pokud $d \mid 5a^2 + b$ a $d \mid 5b^2 + a$, pak $d \mid (a - b)(5a + 5b - 1)$: 1 bod.
- B2. Důkaz, že pokud $d \mid 5a^2 + b$ a $d \mid 5b^2 + a$, pak $d \mid Q(a)$, kde $Q(a)$ závisí jen na a (např. $Q(a) = 125a^4 + a$): 2 body.
- B3. Důkaz, že množina Δ obsahuje násobky nekonečně mnoho čísel d (např. uvážením dvojic $(a, b) = (\frac{1}{5}(p - 1), \frac{1}{5}(p - 1) + p)$, kde $p = 5k + 1$ je prvočíslo, nebo uvážením dvojic $(a, b) = (a, 6a + 1)$): 4 body.
- C1. Dokončení řešení za předpokladu, že Δ obsahuje násobky nekonečně mnoha čísel d : 2 body.

Celkově udělte $\max(B1, B2, B3) + C1$ bodů.

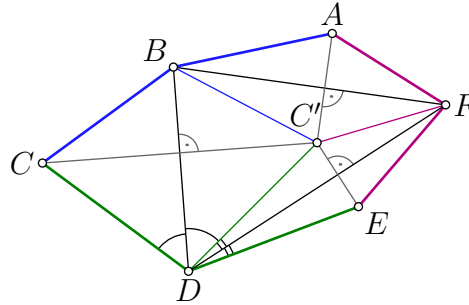
Částečné body získané z různých schémat nelze kombinovat.

3. Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ takový, že $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE| \neq |AD|$, $|EF| = |FA|$ a $|\sphericalangle BDC| + |\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle FDB|$. Dokažte, že

$$|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle EDC| + |\sphericalangle AFE| = 360^\circ.$$

(Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Z předpokladu úlohy o velikostech úhlů $|\sphericalangle BDC| + |\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle FDB|$ dostáváme, že obraz polopřímky DC v osové souměrnosti podle BD je totožný s obrazem polopřímky DE v osové souměrnosti podle DF (obr. 1). Odtud spolu s předpokladem $|CD| = |DE|$ plyne, že obraz C' bodu C v osové souměrnosti podle BD je totožný s obrazem bodu E v osové souměrnosti podle DF , přičemž platí $|DC'| = |DC| = |DE| \neq |DA|$. Jelikož $|DC'| \neq |DA|$, body A a C' jsou různé. Z vlastností osové souměrnosti platí $|BC'| = |BC| = |BA|$ a $|C'F| = |EF| = |FA|$. Jelikož body A, C' jsou různé, plyne odtud, že jsou souměrně sdružené podle přímky BF .



Obr. 1

Jelikož bod C' je souměrně sdružený s body A, C, E po řadě podle přímek BF, BD, DF a šestiúhelník $ABCDEF$ je konvexní, bod C' leží uvnitř trojúhelníku BDF . Platí tak

$$|\sphericalangle BC'D| + |\sphericalangle FC'B| + |\sphericalangle DC'F| = 360^\circ.$$

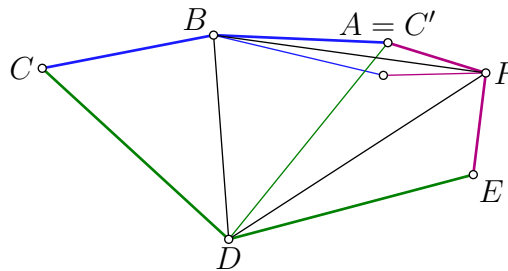
Z osových souměrností dále dostáváme

$$|\sphericalangle DCB| + |\sphericalangle BAF| + |\sphericalangle FED| = |\sphericalangle BC'D| + |\sphericalangle FC'B| + |\sphericalangle DC'F| = 360^\circ.$$

Součet vnitřních úhlů šestiúhelníku $ABCDEF$ je 720° , a proto

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle EDC| + |\sphericalangle AFE| &= 720^\circ - (|\sphericalangle DCB| + |\sphericalangle BAF| + |\sphericalangle FED|) = \\ &= 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ, \end{aligned}$$

jak jsme měli dokázat.



Obr. 2

POZNÁMKA. Podmínka $|AD| \neq |CD| = |DE|$ je nezbytná. V případě $|AD| = |CD| = |DE|$ bude C' totožný s bodem A a platilo by $|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle FED| + |\sphericalangle DCB|$ místo $|\sphericalangle FED| + |\sphericalangle BAF| + |\sphericalangle DCB| = 360^\circ$. Lze tak ukázat, že dokazované tvrzení $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle EDC| + |\sphericalangle AFE| = 360^\circ$ v tomto případě nemusí platit, viz obr. 2.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky z výše popsaného postupu následovně:

- A1. Uvedení, že obraz přímky CD v osově souměrnosti podle BD je totožný s obrazem přímky DE v osově souměrnosti podle DF : 1 bod.
- A2. Zdůvodnění, že obraz bodu C v osově souměrnosti podle BD je totožný s obrazem bodu E v osově souměrnosti podle DF : 2 body.
- B1. Důkaz, že jsou body A a C' osově souměrné podle BF : 2 body.
- X1. Chybějící zdůvodnění, že jsou body A a C' různé: -1 bod.
- C1. Dokončení řešení za předpokladu A2, B1: 2 body.

Celkově za neúplná řešení udělte $\max(A1, A2) + \max(B1 + X1, 0) + C1$ bodů.

4. *Podél kružnice jsou napsána alespoň čtyři reálná čísla. Platí, že v každé trojici sousedních čísel je jedno z nich součtem zbylých dvou. Dokažte, že některá dvě ze všech napsaných čísel mají stejnou absolutní hodnotu.* (Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Necht v trojici sousedních čísel a, b, m má číslo m největší absolutní hodnotu, tj. platí $|m| = \max(|a|, |b|, |m|)$, ukážeme, že pak $|m| = |a| + |b|$. Pokud je v trojici čísel a, b, m jedno číslo součtem zbylých dvou, pak v trojici $-a, -b, -m$ bude mít tuto vlastnost i číslo k němu opačné, proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že číslo m je nezáporné. Necht platí $a = b + m$, potom číslo b musí být nekladné a číslo a nezáporné (jinak by nebylo m největší z nich), platí tak $m = a - b$, tedy i $|m| = |a| + |b|$. Totéž platí i v případě $b = a + m$. Konečně necht $m = a + b$, jelikož m je největší z čísel, musí být obě čísla a, b nezáporná a i v tomto případě platí $|m| = |a| + |b|$.

Necht m je takové z čísel podél kružnice, které má největší absolutní hodnotu. Označme a, b jeho sousední čísla a c druhé sousední číslo s b . V trojici sousedních čísel (a, m, b) podle prvního odstavce platí $|m| = |a| + |b|$, v trojici sousedních čísel (m, b, c) platí $|m| = |b| + |c|$. Tedy $|a| + |b| = |m| = |b| + |c|$, odkud již vidíme, že $|a| = |c|$, jak jsme měli dokázat.

JINÉ ŘEŠENÍ. Úlohu dokážeme sporem. Předpokládejme, že lze čísla napsat tak, že žádná dvě nemají stejnou absolutní hodnotu. Podívejme se na trojice sousedních čísel ve směru hodinových ručiček. Trojici (a, b, c) nazveme typu L, pokud platí $a = b + c$, typu S, pokud platí $b = a + c$, a typu P, pokud platí $c = a + b$. Vezměme libovolnou čtveřici sousedních čísel (a, b, c, d) a zkoumejme případy podle toho, jakého typu jsou trojice (a, b, c) a (b, c, d) .

- (a, b, c) je typu S, tedy $b = a + c$.
 - Pokud by byla $(b, c, d) = (a + c, c, d)$ typu L, pak $a + c = c + d$, takže $a = d$, což je ve sporu s předpokladem.
 - Pokud by byla $(b, c, d) = (a + c, c, d)$ typu S, pak $c = a + c + d$, tedy $a = -d$, takže i v tomto případě dostáváme spor.
 - Pokud by byla $(b, c, d) = (a + c, c, d)$ typu P, pak $d = a + 2c$, což není ve sporu s předpokladem.
- (a, b, c) je typu P, tedy $c = a + b$.
 - Pokud by byla $(b, c, d) = (b, a + b, d)$ typu L, pak $b = a + b + d$, tedy $a = -d$, což je ve sporu s předpokladem.
 - Pokud by byla $(b, c, d) = (b, a + b, d)$ typu S, tedy $a + b = b + d$, tak $a = d$, takže i v tomto případě dostáváme spor.
 - Pokud by byla $(b, c, d) = (b, a + b, d)$ typu P, pak $d = a + 2b$, což není ve sporu s předpokladem.

Nyní zkoumejme typy trojic podél celé kružnice. Pokud je nějaká trojice typu S, tak buď získáme spor výše uvedeným postupem, nebo trojice napravo je typu P. Pokud je nějaká trojice typu P, pak buď je napravo trojice typu P, nebo dostaneme spor. Jelikož jsou čísla napsána podél kruhu, platí, že pokud se někde vyskytuje trojice typu P, tak nedostaneme spor jedině v případě, kdy jsou všechny trojice typu P. Ze symetrie vzhledem ke směru pohybu po kružnici vidíme, že pokud je někde trojice typu L, tak buď nalevo je trojice typu L, nebo dostaneme spor. Takže analogicky dostaneme, že pokud se někde

vyskytuje trojice typu L, tak nedostaneme spor jedině v případě, že jsou všechny trojice typu L.

Zbývá tak vyřešit dva případy: všechny trojice jsou typu P nebo všechny trojice jsou typu L. Necht jsou všechny typu P (druhý případ se vyřeší zcela analogicky). Pokud se mezi čísla vyskytuje 0, podíváme se na trojici $(0, x, y)$, kde x, y jsou čísla napravo od 0. Jelikož trojice je typu P, tak $y = x + 0$, takže se opět dostaneme do sporu s předpokladem.

Předpokládejme tedy, že jsou všechny trojice sousedních čísel typu P a současně jsou všechna čísla nenulová. Ukážeme, že tato možnost také vede ke sporu. Označme dvě sousední čísla a, b , tuto dvojici nazveme počáteční. Potom následuje $a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, \dots$ a matematickou indukcí se snadno dokáže, že číslo o i napravo od počáteční dvojice je rovno $F_i \cdot a + F_{i+1} \cdot b$, kde F_i jsou Fibonacciho čísla tj. čísla splňující $F_0 = 0, F_1 = 1$ a $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$, pro $i \geq 1$.

Označme n počet čísel podél kružnice. Jelikož jsou čísla podél kružnice, číslo o $n - 1$ napravo od počáteční dvojice je číslo a a číslo o n napravo od počáteční dvojice je číslo b . Platí proto

$$\begin{aligned} a &= F_{n-1} \cdot a + F_n \cdot b \\ b &= F_n \cdot a + F_{n+1} \cdot b = F_n \cdot a + (F_{n-1} + F_n)b. \end{aligned} \tag{1}$$

Tyto rovnice upravíme na tvar

$$\begin{aligned} a(F_{n-1} - 1) &= -F_n \cdot b, \\ b(F_{n-1} - 1 + F_n) &= -F_n \cdot a. \end{aligned}$$

Po vynásobení rovností a po následném dělení nenulovým číslem ab dostáváme

$$(F_{n-1} - 1 + F_n)(F_{n-1} - 1) = F_n^2.$$

Jelikož $n \geq 4$, je $F_{n-1} - 1 \geq 1$. Necht d je největší společný dělitel čísel $F_{n-1} - 1, F_n$ a k, ℓ jsou nesoudělná čísla, pro která platí $F_{n-1} - 1 = d \cdot k$ a $F_n = d \cdot \ell$. Potom

$$\begin{aligned} (d \cdot k + d \cdot \ell)d \cdot k &= (d \cdot \ell)^2, \\ (k + \ell)k &= \ell^2. \end{aligned}$$

Jelikož k dělí levou stranu rovnosti, musí dělit i její pravou stranu. Čísla k a ℓ jsou nesoudělná a proto nutně $k = 1$. Takže platí

$$\ell + 1 = \ell^2, \quad \text{čili} \quad 1 = \ell(\ell - 1).$$

Tedy číslo 1 má být součinem dvou po sobě jdoucích celých čísel. To je spor s předpokladem, že všechna čísla podél kružnice jsou nenulová. Podobně bychom dostali spor i v případě, kdy jsou všechny trojice typu L.

Takže ve všech případech jsme dostali spor s předpokladem, že lze čísla napsat tak, že žádná dvě nemají stejnou absolutní hodnotu, proto vždy mají některá dvě čísla stejnou absolutní hodnotu.

KOMENTÁŘ. Ukážeme jiný způsob, jak dokázat, že rovnost

$$(F_{n-1} - 1 + F_n)(F_{n-1} - 1) = F_n^2$$

neplatí pro $n \geq 4$. Po úpravách dostaneme

$$F_n^2 - F_n(F_{n-1} - 1) - (F_{n-1} - 1)^2 = 0.$$

Číslo F_n je tedy kořenem kvadratické rovnice

$$x^2 - x(F_{n-1} - 1) - (F_{n-1} - 1)^2 = 0.$$

Užitím známého vzorce platí pro kořeny této rovnice

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{(F_{n-1} - 1) \pm \sqrt{(F_{n-1} - 1)^2 + 4(F_{n-1} - 1)^2}}{2} = \frac{(F_{n-1} - 1) \pm \sqrt{5(F_{n-1} - 1)^2}}{2} = \\ &= (F_{n-1} - 1) \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

přičemž pro $n \geq 4$ je $F_{n-1} - 1 \geq 1$. Vzhledem k tomu, že Fibonacciho posloupnost obsahuje jen celá čísla, jsou oba kořeny této kvadratické rovnice iracionální. Odtud plyne, že pro žádné přirozené $n \geq 4$ nemůže platit $F_n^2 - F_n(F_{n-1} - 1) - (F_{n-1} - 1)^2 = 0$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky z výše popsaných postupů následovně:

- A1. Vyřešení všech případů až na ten, kdy jsou všechny trojice typu P (nebo typu L): 2 body.
- A2. Převod případu, kdy jsou všechny trojice typu P (nebo typu L) na soustavu dvou rovnic, např. (1): 1 bod.
- A3. Důkaz, že soustava v A2 nemá řešení: 3 body.

Celkově za neúplná řešení udělte $A1 + A2 + A3$ bodů.