75. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY (2025/26)

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Rodina dvou dospělých se dvěma nezletilými dětmi vyrazila na lyžovačku. V lyžařském areálu je cena skipasu pro dospělého vyjádřena v celých stovkách korun, dětský skipas je o 600 Kč levnější. Areál nabízí dvě slevy: první je sleva 10 % na skipas pro každého, druhou slevou je rodinná vstupenka, ve které jsou dětské skipasy zlevněny o 20 % a skipasy pro dospělé jsou za plnou cenu.

Nejprve chtěli koupit všechny čtyři skipasy s 10% slevou. Nakonec maminka využila 10% slevu a tatínek s dětmi si koupili rodinnou vstupenku — takto je nákup vyšel levněji. Kolik nejméně mohl stát nezlevněný skipas pro dospělého? (*T. Bárta*)

Možné řešení. Cenu skipasu pro dospělého v Kč označíme x. Cena skipasů pro celou rodinu beze slev je

$$2x + 2(x - 600) = 4x - 1200.$$

Cena skipasů s uplatněnou 10% slevou pro všechny by byla

$$0{,}9 \cdot (4x - 1200) = 3{,}6x - 1080.$$

Cena skipasů v případě, kdy maminka využije 10% slevu a tatínek s dětmi si koupí rodinnou vstupenku, je

$$0{,}9x + x + 0{,}8 \cdot 2(x - 600) = 3{,}5x - 960.$$

Druhá možnost je výhodnější než první, právě když

$$\begin{aligned} 3{,}6x - 1080 &> 3{,}5x - 960,\\ 0{,}1x &> 120,\\ x &> 1200. \end{aligned}$$

Tedy skipas pro dospělého stojí v celých stovkách korun více než 1200 Kč.

Nezlevněný skipas pro dospělého stojí nejméně 1300 Kč.

Poznámka. Cena skipasu pro dospělého je celočíselným násobkem stokorun. Úlohu lze řešit postupným ověřováním možností pro $x = 700, 800, \ldots$

Hodnocení. Po 1 bodu za každé ze tří vyjádření cen skipasů pomocí neznámé x; 2 body za sestavení nerovnice a její dořešení; 1 bod za srozumitelnost a kvalitu komentáře.

Při zkoušení možností zohledněte úplnost komentáře. Náhodně odhalené nezdůvodněné řešení hodnoťte 2 body.

Z9–II–2

Najděte všechna přirozená čísla s následujícími vlastnostmi:

- číslo je čtyřmístné,
- na místě desítek je číslice 5,
- po odstranění posledních dvou číslic vznikne číslo, které je 103krát menší.

(*K. Pechouš*)

Možné řešení. Podle prvních dvou podmínek je číslo tvaru $\overline{ab5c}$, kde a, b, c jsou neznámé číslice ($a \neq 0$). Podle poslední podmínky platí

$$\overline{ab5c} = 103 \cdot \overline{ab}.$$

Tuto rovnost můžeme upravit následovně:

$$\begin{aligned} 100 \cdot \overline{ab} + \overline{5c} &= 100 \cdot \overline{ab} + 3 \cdot \overline{ab}, \\ \overline{5c} &= 3 \cdot \overline{ab} \end{aligned}$$

Tedy trojnásobek čísla $\overline{ab}$ je v rozmezí od 50 do 59. Násobky tří v tomto rozmezí jsou jen 51, 54 a 57. Odpovídající dvojčíslí $\overline{ab}$ jsou 17, 18 a 19.

Všechna čísla s uvedenými vlastnostmi jsou 1751, 1854 a 1957.

Poznámka. Poslední podmínku ze zadání lze zapsat jako

$$1000a + 100b + 50 + c = 103\,(10a + b),$$

což po úpravách dává $50 + c = 3\,(10a + b)$.

Hodnocení. 1 bod za zápis pomocí neznámých; 2 body za úpravy a rozbor možností; po 1 bodu za každý správný výsledek.

Z9–II–3

Přirozené číslo se nazývá *kostičkové*, pokud jeho zápis obsahuje číslici nebo skupinu po sobě jdoucích číslic, jež jsou zápisem třetí mocniny kladného celého čísla. (Např. čísla 279 a 729 jsou kostičková, čísla 297 a 792 nikoli.)

Určete počet všech trojmístných kostičkových čísel tvořených pouze sudými číslicemi.

(*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Nejvýše trojmístná čísla, která jsou třetími mocninami jsou

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ 512,\ 729.$$

V tomto výčtu není žádné vyhovující kostičkové číslo. Vyhovující čísla musí obsahovat dvojčíslí 64 nebo číslici 8 (tyto možnosti se nevylučují). Další použitelné číslice jsou 0, 2, 4, 6.

Abychom nic neopomněli a něco nezahrnuli dvakrát, budeme vyhovující čísla počítat postupně (v každém bodě vylučujeme možnosti započtené dříve):

- Čísel obsahujících číslici 8 na prvním místě je $5 \cdot 5 = 25$ (na zbylých místech mohou být jakékoli sudé číslice).
- Čísel obsahujících číslici 8 na druhém místě je $3 \cdot 5 = 15$ (na prvním místě není 0, ani 8).
- Čísel obsahujících číslici 8 na třetím místě je $3 \cdot 4 = 12$ (na prvním místě není 0, ani 8, na druhém místě není 8).
- Čísla začínající dvojčíslím 64 jsou 4 (na třetím místě není 8).
- Čísla končící dvojčíslím 64 jsou 3 (na prvním místě není 0, ani 8).

Vyhovujících kostičkových čísel je $25 + 15 + 12 + 4 + 3 = 59$.

Poznámka. Postupný rozbor možností lze organizovat různě (např. podle číslice na prvním místě). Je také možné všechna vyhovující čísla vypisovat.

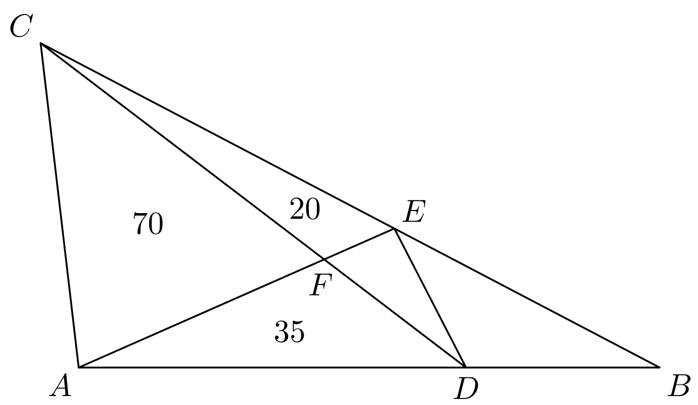
Hodnocení. 1 bod za výčet trojmístných třetích mocnin; 1 bod za poznatek, že vyhovující čísla musí obsahovat 64 nebo 8; 3 body za systematický rozbor či výpis možností; 1 bod za výsledek.

Z9–II–4

V trojúhelníku ABC je na straně AB bod D, na straně BC je bod E a bod F je průsečíkem úseček AE a CD. Obsah trojúhelníků ADF, AFC a CFE je po řadě $35\,\mathrm{cm}^2$, $70\,\mathrm{cm}^2$ a $20\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsahy trojúhelníků DEF a BED. (*I. Jančigová*)

Možné řešení. Znázornění situace včetně známých obsahů může vypadat takto:



Je zde mnoho dvojic trojúhelníků se stejnými výškami ze společného vrcholu (viz např. trojúhelníky ACF a AFD). Pro každou takovou dvojici trojúhelníků platí, že poměr jejich obsahů je stejný jako poměr délek stran proti společnému vrcholu. Tento poznatek využijeme opakovaně a odtud odvodíme hledané obsahy.

Úsečku CD rozdělenou bodem F sdílí trojúhelníky ACF a AFD, které mají společný vrchol A, a tedy stejnou výšku z tohoto vrcholu. Proto platí

$$|CF| : |FD| = S_{ACF} : S_{AFD}.$$

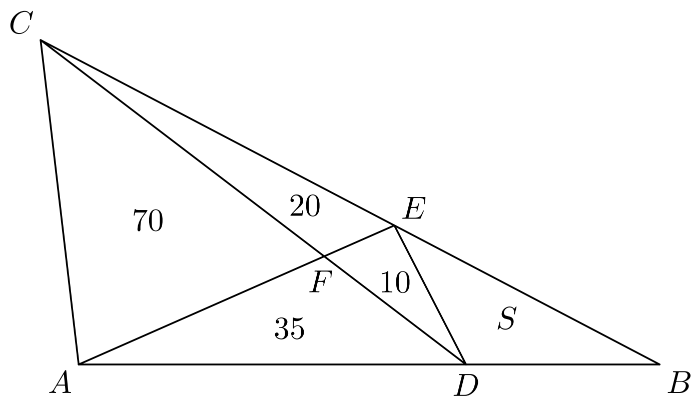
Tutéž trojici kolineárních bodů sdílí také trojúhelníky ECF a EFD, tedy platí

$$|CF| : |FD| = S_{ECF} : S_{EFD}.$$

Porovnáním předchozích dvou rovností dostáváme úměru mezi obsahy trojúhelníků, odkud po dosazení a úpravě vyjádříme neznámý obsah:

$$\begin{aligned} S_{ACF} : S_{AFD} &= S_{ECF} : S_{EFD}, \\ 70 : 35 &= 20 : S_{EFD}, \\ S_{EFD} &= 20 \cdot 35 : 70 = 10. \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníku DEF je $10\,\mathrm{cm}^2$.



Úsečku BC rozdělenou bodem E sdílí trojúhelníky DBE a DEC a také trojúhelníky ABE a AEC. Tedy platí

$$|BE| : |EC| = S_{DBE} : S_{DEC} = S_{ABE} : S_{AEC}.$$

Po dosazení a úpravě vyjádříme neznámý obsah (který zkráceně značíme S):

$$\begin{aligned} S : 30 &= (S + 45) : 90, \\ 90\,S &= 30\,(S + 45), \\ 60\,S &= 30 \cdot 45, \\ S &= 45 : 2 = 22{,}5. \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníku BED je $22{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

Poznámka. Popsané vlastnosti lze použít různě. Např. úvaha ve druhé části úlohy vztažená k dělení úsečky AB bodem D dává

$$|AD| : |DB| = S_{CAD} : S_{CBD} = S_{EAD} : S_{EDB},$$

což po dosazení a úpravě vede k témuž výsledku jako výše:

$$\begin{aligned} 105 : (S + 30) &= 45 : S, \\ 105S &= 45(S + 30), \\ 60S &= 45 \cdot 30, \\ S &= 45 : 2 = 22{,}5. \end{aligned}$$

Hodnocení. 2 body za obsah trojúhelníku DEF; 3 body za obsah trojúhelníku BED; 1 bod za srozumitelnost úprav a kvalitu komentáře.