43. Mezinárodní matematická olympiáda Velká Británie 2002

V letošním roce se v termínu 19.–30. července konala 43. Mezinárodní matematická olympiáda (MMO). Soutěž uspořádal United Kingdom Mathematics Trust ve Skotsku v městě Glasgow na University of Strathclyde.

V posledních ročnících MMO byl téměř vždy vytvořen nový rekord v počtu zúčastněných zemí. Nejinak tomu bylo i letos, kdy se soutěže zúčastnilo 84 zemí, což je o jednu více než loni. Každou zemi reprezentuje vždy nejvýše šest soutěžících; letos jich bylo celkem 485.

Výběr soutěžících za Českou republiku byl proveden v Kostelci nad Černými Lesy na závěrečném soutěžním soustředění prvních devíti vítězů celostátního kola. Vybraní soutěžící se ještě následně zúčastnili trojutkání v polském Zwardoni mezi Českou republikou, Slovenskem a Polskem, kde byla simulována situace, která bývá při soutěži na MMO. Po této přípravě odjela do Skotska tato šestice soutěžících: *Josef Cibulka z gymnázia Štěpánská v Praze, Jaroslav Hájek z gymnázia M. Koperníka v Bílovci, Vítězslav Kala z gymnázia na tř. kpt. Jaroše v Brně, Jan Moláček z gymnázia J. K. Tyla v Hradci Králové, Tomáš Protivínský z gymnázia na tř. kpt. Jaroše v Brně a Martin Tancer z gymnázia Ch. Dopplera v Praze.* Vedoucím české delegace byl *doc. RNDr. Jaromír Šimša, Csc. z Masarykovy Univerzity v Brně*, zástupcem vedoucího byl *RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D. z Pedagogické fakulty UK v Praze.* Vedoucí delegace přicestoval do Skotska 19.7., ostatní čeští účastníci pak 22.7.

Druhý den po příletu soutěžících do Glasgowa se konalo v Barony Hall (v katedrále upravené na společenský sál) slavnostní zahájení. Další dva dny, tj. 24. a 25.7., proběhla vlastní soutěž ve výstavním komplexu nedaleko Glasgow Science Centre. Každý z těchto dnů řešili soutěžící trojici úloh po dobu 4,5 hodiny. Za každou úlohu mohli získat maximálně 7 bodů.

Podle pravidel MMO je vždy asi polovině účastníků udělena medaile, z toho asi jedné šestině zlatá, dvěma šestinám stříbrná a třem šestinám bronzová medaile. Zlaté medaile tak byly letos uděleny za 29–42 bodů, stříbrné medaile za 23–28 bodů a bronzové medaile za 14–22 bodů. Plný počet bodů získali dva čínští a jeden ruský soutěžící. Z našich účastníků dva získali stříbrnou medaili, a to *Jaroslav Hájek za 24 bodů* a *Josef Cibulka za 23 bodů*, a tři bronzovou medaili, a to *Jan Moláček za 20 bodů, Martin Tancer za 19 bodů* a *Tomáš Protivínský za 16 bodů.* Poslednímu našemu účastníku, *Vítězslavu Kalovi*, unikla bronzová medaile o jeden bod a nezískal ani čestné uznání udělované za vyřešení aspoň jedné úlohy za plný počet bodů. Česká republika se v neoficiálním pořadí zemí umístila na 28. místě, což je značné zlepšení oproti několika předchozím letům. Slavnostní vyhlášení výsledků proběhlo předposlední den pobytu v Clyde Auditorium, Scottish Exhibition and Conference Centre.

Neoficiální pořadí prvních třiceti zemí a jejich bodový zisk na 43. MMO je následující: 1. Čína (212 b.), 2. Rusko (204 b.), 3. USA (171 b.), 4. Bulharsko (167 b.), 5. Vietnam (166 b.), 6. Korea (163 b.), 7. Taiwan (161 b.), 8. Rumunsko (157 b.), 9. Indie (156 b.), 10. Německo (144 b.), 11. Írán (143 b.), 12.–13. Kanada, Maďarsko (142 b.), 14.-15. Bělorusko, Turecko (135 b.), 16.–17. Japonsko, Kazachstán (133 b.), 18. Izrael (130 b.), 19. Francie (127 b.), 20. Ukrajina (124 b.), 21.–23. Brazílie, Polsko, Thajsko (123 b.), 24. Hong Kong

(120 b.), 25. Slovensko (119 b.), 26. Austrálie (117 b.), 27. Velká Británie (116 b.), 28. Česká republika (115 b.), 29. Jugoslávie (114 b.), 30. Singapore (112 b), ...

Vedle soutěžního klání připravili pořadatelé pro soutěžící a jejich vedoucí bohatý doprovodný program. Všichni společně měli možnost plout celý den na parní kolesové lodi Waverley od ústí řeky Clyde zpět do města Glasgow a pozorovat krásnou skotskou krajinu. Škoda, že tento zážitek kalilo obvyklé deštivé počasí. Soutěžící si dále mohli vybrat dvě ze šesti nabízených výletních míst; naši účastníci si jeden den zvolili výlet do města Edinburgh (26.7.) a druhý den výlet na Lake District v Anglii (27.7.). Vedoucí delegací pak navštívili město Edinburgh (24.7.).

Pro úplnost uvádíme ještě znění všech šesti soutěžních úloh na 43. MMO.

Úloha 1

Nechť n je přirozené číslo a nechť T je množina všech bodů (x, y) v rovině, kde x a y jsou celá nezáporná čísla a $x + y < n$. Každý bod z množiny T je obarven buď červeně, nebo modře. Je-li bod (x, y) červený, jsou červené i všechny body $(x', y') \in T$, pro které platí $x' \leq x$ a $y' \leq y$. Definujme X-množinu jako množinu n modrých bodů majících různé x-ové souřadnice a Y-množinu jako množinu n modrých bodů majících různé y-ové souřadnice. Dokažte, že počet X-množin je roven počtu Y-množin.

(*Kolumbie*)

Úloha 2

Nechť BC je průměr kružnice Γ se středem O. Bod A leží na kružnici Γ tak, že $0° < |\angle AOB| < 120°$. Nechť D je střed toho oblouku AB, na kterém neleží bod C. Přímka vedená bodem O rovnoběžně s DA protne přímku AC v bodě J. Osa úsečky OA protne kružnici Γ v bodech E a F. Dokažte, že bod J je střed kružnice vepsané trojúhelníku CEF.

(*Korea*)

Úloha 3

Najděte všechny dvojice přirozených čísel $m, n \geq 3$ takové, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel a, pro která je

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

celé číslo.

(*Rumunsko*)

Úloha 4

Nechť n je přirozené číslo větší než 1. Všechny kladné dělitele čísla n označme $d_1, d_2, \ldots, d_k$, kde

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

Položme $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k$.

(a) Dokažte, že $D < n^2$.

(b) Určete všechna n, pro která je číslo D dělitelem čísla n^2.

(*Rumunsko*)

Úloha 5

Nechť $\mathbf{R}$ značí množinu všech reálných čísel. Najděte všechny funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takové, že

$$(f(x) + f(z))\,(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

pro libovolná $x, y, z, t \in \mathbf{R}$.

(*Indie*)

Úloha 6

V rovině jsou dány kružnice $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ o poloměru 1, kde $n \geq 3$. Jejich středy označme po řadě $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Předpokládejme, že žádná přímka nemá společný bod s více než dvěma z daných kružnic. Dokažte, že

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{|\,O_i O_j\,|} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

(*Ukrajina*)

Jaroslav Zhouf