

36. mezinárodní matematická olympiáda 13.–25. července 1995 (Toronto)

České družstvo opět vystoupilo vyrovnaně (rozdíl mezi nejlepším a nejhorším výsledkem činí jen 10 bodů). Vzhledem k tomu, že v něm bylo pět loňských účastníků MMO, jsem tajně doufal, že výsledek bude ještě o něco lepší. Nejlepší *Petr Kaňovský*, který jediný získal II. cenu, si polepšil oproti loňsku jen o jeden jediný bod, přitom kdyby si pořádně přečetl zadání 5. úlohy, mohl se teď možná honosit zlatou medailí. Ostatní naši reprezentanti se už museli spokojit s bronzovými medailemi (III. cena). Z nich si oproti loňsku bodově trochu polepšili *Filip Krška* a *Libor Mašíček*, naopak *Robert Šámal*, držitel stříbrných medailí z předchozích dvou olympiád, se tentokrát musel spokojit jen s III. cenou. Vedoucím naší výpravy byl dr. *Karel Horák* z Matematického ústavu AV ČR, pedagogickým vedoucím družstva byl doc. *Jaromír Šimša* z brněnské pobočky ústavu.

Členové mezinárodní jury — vedoucí jednotlivých národních delegací — byli hned po příletu převezeni do poklidného prostředí univerzitního městečka Waterloo zhruba 90 km od Toronta, místa konání 36. MMO. Odtud jsme se před soutěží vzdálili jen na slavnostní zahájení odpoledne 18. července.

Soutěž proběhla ve dvou dnech 19. a 20. července v prostorách Yorské univerzity na severním předměstí Toronta. Jury tak patrně poprvé byla dostatečně vzdálena od soutěžících i během soutěže. Dotazy žáků k textům úloh a naše odpovědi byly přenášeny faxem a doručení bylo na závěr ještě ověřeno telefonem (mezi hlavní sponzory 36. MMO patřila telefonní společnost Northern Telecom [NORTEL] — v žádném případě nespojovat s českým Telecomem, který má zcela jiné představy o službách veřejnosti — např. telefonní spojení v celé torontské aglomeraci je zdarma, platí se jen za meziměstské hovory!).

Další dva dny byly věnovány náročné koordinaci, která byla kanadskými organizátory výborně připravena. Tým koordinátorů pod vedením Edwarda Barbeau měl k dispozici xeroxové kopie všech odevzdaných papírů (maximální spotřeba na úlohu patrně činila 43 stránek v případě řešení 3. úlohy jednoho kanadského studenta, čímž jednoznačně předstihl i našeho největšího psavce Petra Kaňovského), což usnadnilo orientaci i překlad. Navíc mezi koordinátory bylo i několik vynikajících problemistů ze sou sedních USA (např. Stan Rabinowitz či Cecil Rousseau), ale i jeden kanadský Čech, profesor univerzity v nedalekém Hamiltonu Zdislav Kovařík.

Výsledek našich žáků:

	úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	pořadí
Petr Kaňovský		7	7	7	7	0	2	30	II	81.–88.
4. ročník <i>G Brno, tř. kpt. Jaroše</i>										
Filip Krška		7	0	7	7	7	0	28	III	101.–112.
4. ročník <i>G Brno, tř. kpt. Jaroše</i>										
Libor Mašíček		6	0	7	7	7	1	28	III	101.–112.
4. ročník <i>G Brno, tř. kpt. Jaroše</i>										
Martin Nečesal		7	0	6	4	3	0	20	III	181.–190.
4. ročník <i>G Brno, tř. kpt. Jaroše</i>										
David Pavlica		7	0	7	7	2	0	23	III	152.–160.
4. ročník <i>GMK Bílovec</i>										
Robert Šámal		6	0	7	5	7	0	25	III	136.–146.
4. ročník <i>G Praha 5, Zborovská 45</i>										

Pro srovnání uvedme i výsledky slovenských účastníků:

	úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	pořadí
Jan Bábeža		1	7	1	3	0	0	12		
4. ročník <i>G Košice, Poštová</i>										
Ivan Cimrák		7	0	7	7	2	0	23	III	152.–160.
3. ročník <i>G Žilina, Vež. Okružná</i>										
Patrik Horník		7	0	1	7	0	0	15		
4. ročník <i>G Bratislava, Grössl.</i>										
Peter Macák		7	7	7	7	5	0	33	II	60.–64.
4. ročník <i>G J. Hronca, Bratislava</i>										
Vladimír Marko		7	0	6	7	7	0	27	III	113.–130.
2. ročník <i>G J. Hronca, Bratislava</i>										
Martin Pál		7	2	6	6	7	7	35	II	36.–52.
4. ročník <i>G J. Hronca, Bratislava</i>										

Jury tentokrát měla možnost výběru z celkem 28 vesměs zajímavých úloh, jež byly uspořádány úlohovou komisí pořádající země do čtyř volných okruhů (algebra, geometrie, teorie čísel a kombinatorika, posloupnosti). Úlohy byly k dispozici členům jury hned první den příjezdu bez řešení a ještě většina dalšího dne byla věnována individuální práci s úlohami, což přirozeně vedlo k věcnější diskusi a k řadě alternativních řešení jednotlivých úloh. Podařilo se tak nakonec vybrat poměrně vyváženou šestici úloh, v níž je i jedna česká (jejím autorem je doc. Jaromír Šimša).

Nejtěžší úlohou prvního dne byla symetrická nerovnost, kterou z našich studentů vyřešil jedině Petr Kaňovský. Přitom je zajímavé (jak je navíc vidět i z uspořádání úloh prvního dne, neboť jury se tradičně snaží úlohy uspořádat podle hypotetické obtížnosti), že většina členů jury ji považovala za lehčí než 3. úlohu. Ta také spolu s pátou (geometrickou) úlohou získala jednoznačně největší sympatie členů jury. Nejnáročnější úlohou pak byla úloha šestá, za kterou naše družstvo utržilo pouhé tři body (v podstatě za uhodnutý výsledek).

Bohužel jsme letos zbytečně ztráceli body za nedbalou formulaci řešení (2 body Roberta Šámala za to, že ve 4. úloze explicitně neuvedl posloupnost, pro niž je hodnota x_0 maximální, další bod za nezmínění dvou možných poloh bodu P v 1. úloze apod.). A bohužel i za nepozorné přečtení podmínek v 5. úloze jsme zaplatili možná i 12 body (Petr Kaňovský, který po prvním dnu měl maximum, si možná "rval vlasy", když před odevzdáním zjistil, že v daném šestiúhelníku je ještě jeden šedesátistupňový úhel).

O náročnosti úloh dává obvykle dobrou informaci počet bodů nutných pro získání příslušné medaile: První cena se letos udělovala za 37–42 bodů, II. za 29–36 a III. za 19–28 bodů. Zvláštní cenu za elegantní řešení 6. úlohy přiznala jury bulharskému studentu *Nikolaji Nikolovi*. Připomínáme, že zvláštní cenu (která mimochodem byla naposledy udělena na 31. MMO v Pekingu) lze udělit za mimořádně elegantní a ojedinělé řešení, které je úplné a navíc zformulované tak, že je lze prakticky bez dalších úprav rovnou zveřejnit.

Neoficiální pořadí první třetiny zúčastněných zemí (olympiády se zúčastnilo 412 žáků ze 73 zemí):

	ceny			
	I	II	III	body
1. ČLR	4	2		236
2. Rumunsko	4	2		230
3. Rusko	4	2		227
4. Vietnam	2	4		220
5. Maďarsko	3	1	2	210
6. Bulharsko	1	4	1	207
7. Korea	2	3	1	203
8. Írán	2	3	1	202
9. Japonsko	1	3	2	183
10. Velká Británie	2	1	3	180
11. USA		3	3	178
12. Tchajwan		4	1	176
13. Izrael	1	2	2	171

14.	Indie		3	3	165
15.	Německo	1	3	1	162
16.	Polsko		1	5	161
17.–18.	Česká republika		1	5	154
17.–18.	Jugoslávie		2	3	154
19.	Kanada		2	3	153
20.	Hongkong		2	3	151
21.–22.	Slovensko		2	2	145
21.–22.	Austrálie		1	4	145
23.	Ukrajina	1	1	1	140
24.	Maroko		1	4	138
25.	Turecko		1	4	134

Na první místo se opět vrátila lidová Čína, zatímco vloni absolutní Spojené státy se letos překvapivě propadly až na 11. příčku. Díky těžším úlohám nás shodný počet bodů jako vloni posunul o čtyři příčky výše.

Příští, 37. MMO se bude konat v roce 1996 v indickém hlavním městě Nai Dillí (New Delhi).

ÚLOHY

1. Necht A, B, C a D jsou čtyři různé body na přímce v uvedeném pořadí. Kružnice s průměry AC a BD se protínají v bodech X a Y . Přímka XY protíná BC v bodě Z . Necht P je libovolný bod přímky XY různý od bodu Z . Přímka CP protíná kružnici s průměrem AC v bodech C a M a přímka BP protíná kružnici s průměrem BD v bodech B a N . Dokažte, že přímky AM , DN a XY mají společný bod.

(Bulharsko)

2. Necht a, b a c jsou kladná reálná čísla taková, že $abc = 1$. Dokažte, že

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

(Rusko)

3. Určete všechna celá čísla $n > 3$, pro která existuje n bodů $A_1, A_2, \dots, A_n$ v rovině a reálná čísla $r_1, r_2, \dots, r_n$ tak, že jsou splněny následující dvě podmínky:
 - (i) žádné tři z bodů $A_1, A_2, \dots, A_n$ neleží v přímce;
 - (ii) pro každou trojici i, j, k ($1 \leq i < j < k \leq n$) je obsah trojúhelníku $A_i A_j A_k$ roven $r_i + r_j + r_k$.

(Česká republika)

4. Nalezněte maximální hodnotu x_0 , pro kterou existuje posloupnost kladných reálných čísel $x_0, x_1, \dots, x_{1995}$, splňující následující dvě podmínky:
 - (i) $x_0 = x_{1995}$;
 - (ii) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$ pro každé $i = 1, 2, \dots, 1995$.

(Polsko)

5. Necht $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník, pro který platí

$$\begin{aligned} |AB| &= |BC| = |CD|, \\ |DE| &= |EF| = |FA| \end{aligned}$$

a

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle EFA| = 60^\circ.$$

Necht G a H jsou dva body uvnitř daného šestiúhelníku takové, že $|\sphericalangle AGB| = |\sphericalangle DHE| = 120^\circ$. Dokažte, že

$$|AG| + |GB| + |GH| + |DH| + |HE| \geq |CF|.$$

(*Nový Zéland*)

6. Necht p je liché prvočíslo. Nalezněte počet takových podmnožin A množiny $\{1, 2, \dots, 2p\}$, že
- (i) A má právě p prvků;
 - (ii) součet všech prvků množiny A je dělitelný p .

(*Polsko*)

Karel Horák, MÚ AV ČR, Praha