

Úlohy domácího kola kategorie A

1. Pro daná kladná čísla $x \neq y$ uvažujme průměry

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}, \quad k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

(Jde o aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický průměr čísel x a y .) Ze všech rozdělení čtveřice a, g, h, k na dvě dvojice r, s a t, u vyberte to rozdělení, při kterém má výraz $V = r + s - t - u$ nejmenší kladnou hodnotu. (J. Šimša)

ŘEŠENÍ. Uvedené kladné průměry splňují známé nerovnosti $h < g < a < k$. Ty plynou např. z vyjádření

$$k^2 - a^2 = \frac{(x-y)^2}{4}, \quad a^2 - g^2 = \frac{(x-y)^2}{4}, \quad g^2 - h^2 = \frac{xy(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

a z podmínky $x \neq y$. (Je to poněkud vyumělkované zdůvodnění, řešitele vyzveme dokazovat každou ze tří nerovností metodou ekvivalentních úprav.)

Označme $V_1 = k + a - g - h$, $V_2 = k + g - a - h$ a $V_3 = k + h - a - g$. Ostatní tři hodnoty výrazu V jsou $-V_1$, $-V_2$ a $-V_3$. Protože

$$V_1 - V_2 = 2(a - g) > 0 \quad \text{a} \quad V_2 - V_3 = 2(g - h) > 0,$$

platí $V_1 > V_2 > V_3$. Dokážeme-li, že $V_3 > 0$, bude V_3 hledaná nejmenší kladná hodnota výrazu V . Nerovnost $V_3 > 0$ je ekvivalentní s nerovností $k - g > a - h$, jejíž obě strany jsou kladné. Můžeme ji proto ekvivalentně umocnit na druhou a pak přepsat do tvaru

$$2kg < k^2 + g^2 - a^2 + 2ah - h^2.$$

Před dalším umocněním vyjádříme pravou stranu této nerovnosti pomocí čísel x a y (a tak zjistíme, že je skutečně kladná). Vyjde nám

$$k^2 + g^2 - a^2 = \frac{(x+y)^2}{4} \quad \text{a} \quad 2ah - h^2 = \frac{2xy(x^2+y^2)}{(x+y)^2}.$$

Proto můžeme poslední nerovnost ekvivalentně umocnit na druhou:

$$4k^2g^2 = 2xy(x^2+y^2) < \frac{(x+y)^4}{16} + xy(x^2+y^2) + \frac{4x^2y^2(x^2+y^2)^2}{(x+y)^4}.$$

Tuto nerovnost lze ekvivalentně upravit na tvar

$$0 < \left\{ \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{2xy(x^2+y^2)}{(x+y)^2} \right\}^2.$$

Výraz v složené závorce je kladný, neboť je roven

$$\frac{(x+y)^4 - 8xy(x^2+y^2)}{4(x+y)^2} = \frac{(x-y)^4}{4(x+y)^2}$$

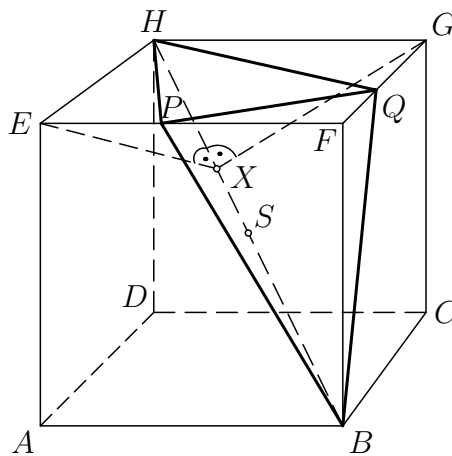
a $x \neq y$. Tím je důkaz hotov. Odpověď: Hledané rozdělení je $\{r, s\} = \{k, h\}$ a $\{t, u\} = \{a, g\}$, neboť nejmenší kladná hodnota výrazu V je rovna $k + h - a - g$.

Dodatek. Jako návodnou je možno použít úlohu 44–B–I–3, což je snazší varianta s výrazem $V = rs - tu$. Důkazové úlohy o nerovnostech najdete ve svazku ŠMM A. Kufner: *Nerovnosti a odhady* (Mladá fronta 1989). Pro zájemce o další málo známé nerovnosti mezi průměry je vhodný článek J. Šimši *Dolní odhady rozdílu průměrů*, *Rozhledy mat.-fyz.* 65 (1986/87), č. 10, str. 403–407.

2. V prostoru je dána krychle $ABCDEFGH$. Uvažujme libovolnou rovinu, která prochází bodem B a dotýká se koule vepsané dané krychli, a označme P, Q její průsečíky s hranami EF, GF . Dokažte, že odchylka rovin BPH a BQH je 60° . (P. Leischner)

ŘEŠENÍ. Při řešení úlohy využijeme následující tvrzení: Jsou-li roviny KLM a KLN tečné ke kouli \mathcal{K} o středu S , pak KLS je rovina souměrnosti těchto dvou tečných rovin. (Tvrzení dokážeme, když si představíme, jak se určí roviny tečné ke kouli \mathcal{K} , které obsahují danou přímku KL : Necht S' je kolmý průmět S na KL , ρ je rovina jdoucí bodem S' kolmo ke KL a kružnice k je řez povrchu koule \mathcal{K} rovinou ρ . Označme T_1 a T_2 body dotyku tečen vedených z bodu S' ke kružnici k . Pak tečné roviny KLM a KLN jsou roviny KLT_1 a KLT_2 a SS' je osa přímk $S'T_1$ a $S'T_2$.)

V naší úloze se roviny BEP, BGQ a BPQ dotýkají koule, jejíž střed S leží na přímce BH .



Proto podle výše uvedeného tvrzení platí:

- (1) BPH je rovina souměrnosti rovin BEP a BPQ ,
- (2) BQH je rovina souměrnosti rovin BGQ a BPQ .

Složení rovinných souměrností podle rovin BPH a BQH (v tomto pořadí) vznikne rotace \mathcal{R} kol jejich průsečnice BH o úhel 2α , kde α je odchylka těchto rovin. (Důkaz: Tato vlastnost se v rovině kolmé k BH převede na známé tvrzení o složení dvou osových souměrností podle přímk svírajících úhel α .)

Naší úlohou je dokázat, že $\alpha = 60^\circ$. Nejdříve vysvětlíme, proč při rotaci \mathcal{R} přejde bod E do bodu G . Z (1) a (2) plyne, že rovina BEP přejde při rotaci \mathcal{R} do roviny BGQ . Protože bod H leží na ose rotace \mathcal{R} , jeho kolmý průmět na rovinu BEP (což je bod E) přejde v rotaci \mathcal{R} do kolmého průmětu bodu H na rovinu BGQ (což je bod G). Bod G je skutečně obrazem bodu E při rotaci \mathcal{R} .

Víme už, že $\alpha = \frac{1}{2}|\sphericalangle EXG|$, kde X je společný kolmý průmět bodů E a G na přímku BH , neboli pata výšky na stranu BH trojúhelníku BEH . Označme a délku hrany krychle. Ze vztahů $|EB| = a\sqrt{2}$, $|EH| = a$, $|BH| = a\sqrt{3}$, $|\sphericalangle BEH| = 90^\circ$ a z dvojího vyjádření obsahu trojúhelníku BEH (tj. $\frac{1}{2}|EB| \cdot |EH| = \frac{1}{2}|BH| \cdot |EX|$) plyne $|EX| = a\sqrt{2/3}$. Proto z rovnoramenného trojúhelníku EXG dostáváme

$$\sin \alpha = \frac{\frac{1}{2} \cdot |EG|}{|EX|} = \frac{a \frac{\sqrt{2}}{2}}{a \sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ takže } \alpha = 60^\circ.$$

Dodejme, že výpočet z posledního odstavce lze obejít následující úvahou: Při rotaci \mathcal{R} přejde bod E do bodu G , takže bod G přejde do bodu D a bod D do bodu E . Proto z roviny EGD usoudíme, že $2\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 360^\circ$, odkud $\alpha = 60^\circ$. (Viz též ročenku 39. ročníku MO, úlohu 3.5 korespondenčního semináře a její řešení na str. 225.)

Doporučená literatura. Stereometrii je možné procvičovat podle sbírky *Vybrané úlohy MO, kateg. A* (SPN 1988), úlohy č. 88 až 94.

3. Zjistěte, pro která b je obor hodnot funkce $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + bx$ interval $\langle b, \infty \rangle$.
(P. Černek)

ŘEŠENÍ. Vzhledem ke spojitosti polynomu f a k jeho chování pro $|x| \rightarrow \infty$ je vlastnost popsána v úloze ekvivalentní s požadavkem, aby nerovnost $f(x) \geq b$ platila pro každé reálné číslo x a přitom pro některé x_0 v ní nastala rovnost. (Bude vhodné tuto ekvivalenci řešitelům řádně zdůvodnit, i když jsou pojmy analýzy na SŠ vykládány značně intuitivně.) Všimněme si, že $f(1) = b$, takže druhá část požadavku je zaručena hodnotou $x_0 = 1$. Navíc můžeme provést rozklad

$$\begin{aligned} f(x) - b &= x^4 + x^3 - 2x^2 + bx - b = \\ &= (x-1)x^2(x+2) + b(x-1) = (x-1)(x^3 + 2x^2 + b). \end{aligned}$$

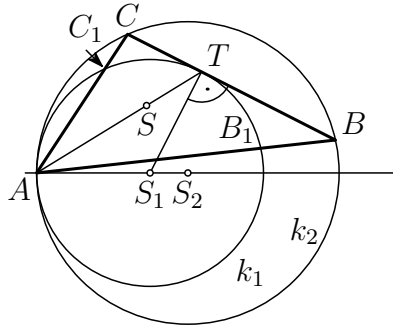
Pro mnohočlen $g(x) := x^3 + 2x^2 + b$ musí platit $g(x) \leq 0$ pro každé $x < 1$ a $g(x) \geq 0$ pro každé $x > 1$. Odtud $g(1) = 0$, což nastane jedině pro $b = -3$. Pak ovšem $g(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 3)$. Protože trojčlen v poslední závorce má záporný diskriminant, v případě $b = -3$ platí $f(x) + 3 = (x-1)^2(x^2 + 3x + 3) > 0$ pro každé $x \neq 1$ (a samozřejmě $f(1) = -3$). Proto je $b = -3$ jediná hledaná hodnota. Dodejme ještě, že číslo x_0 z první věty řešení musí být *násobným* kořenem rovnice $f(x) = b$. Nevšimneme-li si hodnoty $x_0 = 1$, můžeme postupovat jinak: srovnat koeficienty v rovnosti mnohočlenů $f(x) - b = (x - x_0)^2 \cdot (x^2 + px + q)$ a získat tak soustavu rovnic pro neznámá čísla b , x_0 , p a q . Pak je ale nutné vyloučit ta její řešení, pro která $p^2 - 4q > 0$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Pro které pětice reálných čísel a , b , c , d a e je oborem hodnot funkce $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ některý interval $\langle p, +\infty \rangle$ (některý interval $(-\infty, p)$, interval $(-\infty, +\infty)$)? Může mít obor hodnot f ještě jiný tvar? (Ano: $\{e\}$.)

4. V rovině jsou dány kružnice $k_1(S_1, 3\text{ cm})$ a $k_2(S_2, 4\text{ cm})$, které mají vnitřní dotyk v bodě A . Dále je dán bod S uvnitř kružnice k_1 . Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho strana BC byla tětivou kružnice k_2 a zároveň tečnou kružnice k_1 a aby bod S byl středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC . (P. Leischner)

ŘEŠENÍ. Označme T bod dotyku kružnice k_1 se stranou BC hledaného trojúhelníka ABC .



Nechť B_1 a C_1 značí po řadě průsečíky kružnice k_1 se stranami AB a AC . Kružnice k_1 je obrazem kružnice k_2 ve stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem $\frac{3}{4}$. Platí tedy $|BB_1| = \frac{1}{4}|AB|$ a $|CC_1| = \frac{1}{4}|AC|$. Proto jsou mocnosti bodů B a C ke kružnici k_1 rovny

$$|BT|^2 = |BB_1| \cdot |BA| = \frac{1}{4}|AB|^2 \quad \text{resp.} \quad |CT|^2 = |CC_1| \cdot |CA| = \frac{1}{4}|AC|^2.$$

Odtud plyne $|BT| : |CT| = |AB| : |AC|$. Tato rovnost ale znamená (viz návodnou úlohu), že bod T leží na ose úhlu BAC , tedy na polopřímce AS . Proto je jasná konstrukce: Bod T sestrojíme jako průsečík polopřímky AS s kružnicí k_1 , pak určíme body B, C jako průsečíky kružnice k_2 s tečnou kružnice k_1 v bodě T .

Nyní prozkoumáme, zda sestrojený trojúhelník ABC (vždy jediný, až na možnou záměnu vrcholů B a C) má požadované vlastnosti. Jde o to, zda bod S je skutečně středem vepsané kružnice. Naší konstrukcí je zaručena rovnost poměrů $|BT| : |CT|$ a $|AB| : |AC|$ (viz výše). Proto bod S leží na ose úhlu BAC . Víc pro bod S obecně neplatí. (Uvědomte si, že necháte-li probíhat bod S po pevné úsečce AT , bude výsledkem konstrukce stále týž $\triangle ABC$. Jen jediný bod úsečky AT je středem vepsané kružnice.) Zjistíme proto, kdy bod S také leží na ose úhlu ABC (a je tedy středem kružnice vepsané). Z trojúhelníku ABT vidíme, že to nastane, právě když $|AS| : |TS| = |AB| : |BT|$. Protože $|AB| : |BT| = 2$ (viz výše), dostáváme nutnou i postačující podmínku $|AS| = 2|TS|$, neboli $|AS| = \frac{2}{3}|AT|$. Protože bod T může být libovolný bod k_1 různý od A , docházíme k závěru: Zadaná konstrukční úloha má řešení (a to jedině až na označení bodů B a C), právě když bod S leží na kružnici, která je obrazem kružnice k_1 ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem rovným $\frac{2}{3}$. (Podmínka $S \neq A$ je zaručena zadáním.)

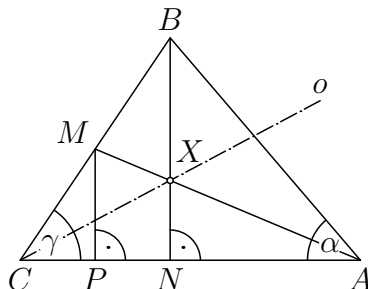
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Dokažte, že osa vnitřního úhlu trojúhelníku dělí jeho protější stranu v poměru přilehlých stran. Přesněji: Bod X strany BC trojúhelníku ABC leží na ose úhlu BAC , právě když $|BX| : |CX| = |BA| : |CA|$. (Důkaz tohoto známého tvrzení je podán např. v knize F. Kuřiny: *Umění vidět v matematice*, SPN 1989.)

Doporučená literatura. Svazky ŠMM S. Horák: *Kružnice* (Mladá fronta 1966) a J. Šedivý: *O podobnosti v geometrii* (Mladá fronta 1963).

5. Uvažujme trojúhelník ABC s ostrými úhly α, γ u vrcholů A, C a s následující vlastností: těžnice z vrcholu A a výška z vrcholu B se protínají v bodě, který leží na ose úhlu při vrcholu C . Dokažte, že pak platí $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}^2 \gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. (J. Šimša)

ŘEŠENÍ. Necht AM je těžnice, BN je výška, bod X jejich průsečík a bod P střed úsečky CN ve zkoumaném trojúhelníku.



Má-li pro jednoduchost úsečka CN délku 1, pak $|BN| = \operatorname{tg} \gamma$, $|NA| = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha}$, $|XN| = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, $|MP| = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma$ (střední příčka v trojúhelníku CNB) a $|PA| = |PN| + |NA| = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha}$. Z podobnosti trojúhelníků MPA a XNA plyne úměra

$$\frac{|MP|}{|PA|} = \frac{|XN|}{|NA|}, \text{ neboli } \frac{\frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma}{\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha}},$$

odkud

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \gamma - 2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2})}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}.$$

Srovnáním s textem úlohy vidíme, že stačí dokázat identitu

$$\frac{\operatorname{tg} \gamma - 2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \text{ zřejmě ekvivalentní s } \operatorname{tg} \gamma = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}.$$

To je ale známý vzorec pro tangens dvojnásobného úhlu.

Doporučená literatura. Vztahy mezi prvky trojúhelníka možno procvičovat podle svazku ŠMM S. Horák: *Nerovnosti v trojúhelníku* (Mladá fronta 1986).

6. Určete největší možný počet 1 994-ciferných přirozených čísel, která se navzájem liší pořadím číslic. (J. Šimša)

ŘEŠENÍ. Dokážeme nejdříve, že počet všech N -ciferných čísel, které lze sestavit z p_0 nul, p_1 jedniček, \dots , p_9 devítek, kde $\sum_{i=0}^9 p_i = N$, je roven hodnotě

$$\frac{(N-1)!(N-p_0)}{p_0!p_1!\cdots p_9!} \quad (*)$$

Skutečně, je-li $p_0 = 0$, je zmíněný počet roven počtu všech pořadí uvedených cifer, což je podle vzorce pro počet pořadí s opakováním rovno hodnotě $\frac{N!}{p_1!\cdots p_9!}$. To je ale (*) pro $p_0 = 0$ (připomínáme, že $0! = 1$). Je-li $p_0 > 0$, je nutné od celkového počtu pořadí daných cifer (včetně p_0 nul) odečíst počet těch z nich, které začínají cifrou nula, tj. odečíst počet všech pořadí $p_0 - 1$ nul, p_1 jedniček, \dots , p_9 devítek. Úpravou rozdílu $\frac{N!}{p_0!p_1!\cdots p_9!} - \frac{(N-1)!}{(p_0-1)!p_1!\cdots p_9!}$ dostaneme (*).

Nyní vysvětlíme, že při pevném přirozeném N je hodnota (*) největší, pokud se počty p_i navzájem "co nejméně liší", tj. jsou rovny podílu $\frac{N}{10}$ (zaokrouhlenému nahoru nebo dolů, nejde-li o celé číslo). Zapišme proto dělení $N : 10$ se zbytkem: $N = 10q + r$, kde q a r jsou celá nezáporná čísla, přičemž $r < 10$. Až do konce budou tato čísla N , q a r pevná. (V zadání úlohy $N = 1\,994$, takže $q = 199$ a $r = 4$. Dáme však přednost obecnému popisu.)

Nejdříve si všimneme jmenovatele zlomku (*). Dokážeme, že nejmenší hodnota jmenovatele je rovna $((q+1)!)^r (q!)^{10-r}$. Skutečně, v součinu

$$(1 \cdot 2 \cdots p_0) \cdot (1 \cdot 2 \cdots p_1) \cdots (1 \cdot 2 \cdots p_9)$$

je právě $\sum_{i=0}^9 p_i = N$ činitelů, z toho nejvýše 10 čísel 1, nejvýše 10 čísel 2, atd. až nejvýše 10 čísel q . Je tam proto také alespoň $N - 10q = r$ čísel, jež nejsou menší než $q + 1$. Seřadíme-li tedy těchto N činitelů od nejmenšího po největší, bude prvních deset ≥ 1 , druhých deset ≥ 2 , \dots , q -tých deset $\geq q$ a zbývajících r bude $\geq q + 1$. Celý součin tedy není menší než

$$1^{10} \cdot 2^{10} \cdots q^{10} \cdot (q+1)^r = ((q+1)!)^r (q!)^{10-r}.$$

Přitom toto minimum se dosáhne, právě když je mezi čísly p_i právě r hodnot $q+1$ a právě $10-r$ hodnot q .

S ohledem na právě dokázané tvrzení o minimu jmenovatele (*) nyní ukážeme, že zlomek (*) nemůže být maximální na žádné deseticí p_0, \dots, p_9 , ve které $p_0 < q$. Vezměme tedy libovolnou deseticí p_0, \dots, p_9 , ve které $p_0 < q$. Protože $\sum_{i=0}^9 p_i = 10q + r > p_0 + 9q$, můžeme vybrat index $i > 0$ tak, aby $p_i \geq q + 1$. Ukážeme, že hodnota (*) se zvětší, zaměníme-li v naší deseticí čísla p_0 a p_i po řadě čísla $p_0 + 1$ a $p_i - 1$, zatímco ostatní čísla p_j nezměníme (to odpovídá změně, kdy v původní sestavě cifer jednu cifru "i" zaměníme cifrou "0"). Srovnáme-li zápis (*) pro původní a pozměněnou deseticí, nahlédneme, že hodnota (*) se naší změnou zvětší, právě když

$$\frac{N-p_0}{p_i} < \frac{N-p_0-1}{p_0+1} \quad \text{neboli} \quad p_i > \frac{(N-p_0)(p_0+1)}{N-p_0-1}.$$

Protože $p_i \geq p_0 + 2$, stačí jen dokázat, že platí

$$p_0 + 2 > \frac{(N - p_0)(p_0 + 1)}{N - p_0 - 1}.$$

Ekvivalentní úpravou dostaneme nerovnost $p_0 < \frac{N}{2} - 1$. Ta se v naší situaci už snadno zdůvodní: Protože $N \geq 10q \geq 10$ ($q \neq 0$, neboť $p_0 < q$) a protože nerovnost $\frac{x}{10} < \frac{x}{2} - 1$ je zřejmě splněna pro každé $x > 10$, platí $p_0 < q \leq \frac{N}{10} < \frac{N}{2} - 1$.

Shrňme předchozí úvahu: Při hledání největší hodnoty (*) se můžeme omezit jen na ty desetice p_0, \dots, p_9 , ve kterých $p_0 \geq q$. Pro ně však podle tvrzení o nejmenší hodnotě jmenovatele (*) platí

$$\frac{(N - 1)!(N - p_0)}{p_0! p_1! \cdots p_9!} \leq \frac{(N - 1)!(N - q)}{p_0! p_1! \cdots p_9!} \leq \frac{(N - 1)!(N - q)}{((q + 1)!)^r (q!)^{10-r}}.$$

Uvědomíme-li si, kdy v posledních dvou nerovnostech nastává rovnost, dostáváme konečný výsledek: *Největší hodnota (*) je rovna*

$$\frac{(N - 1)!(N - q)}{((q + 1)!)^r (q!)^{10-r}} \left(= \frac{1993! \cdot 1795}{(200!)^4 (199!)^6} \text{ v zadaném případě} \right)$$

a dosáhne se tehdy a jen tehdy, když je mezi čísly p_i právě r hodnot $q + 1$, právě $10 - r$ hodnot q a přitom $p_0 = q$.

Doporučená literatura. (1) A. Vrba: *Kombinatorika* (Mladá fronta, edice ŠMM, 1980), (2) N. J. Vilenkin: *Kombinatorika* (SNTL, 1977).