

Úlohy klauzurního kola kategorie A

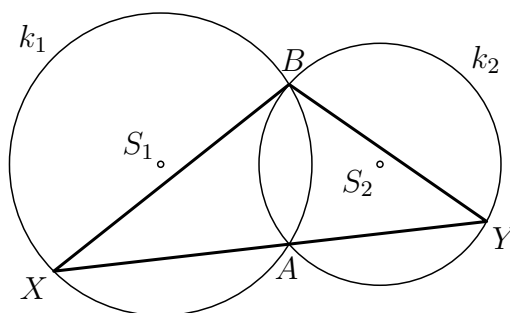
1. V rovině jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, které se protínají ve dvou bodech A a B , přičemž $|S_1S_2| > r_2 \geq r_1$. Sestrojte body $X \in k_1$ a $Y \in k_2$ tak, aby bod A ležel uvnitř úsečky XY a aby trojúhelník BXY měl co největší obsah.
2. Najděte všechny funkce f tvaru $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ s reálnými koeficienty a, b, c a s následující vlastností: Definiční obor a obor hodnot funkce f jsou dvě stejné neprázdné množiny. (Za definiční obor funkce f považujeme množinu *všech* reálných čísel x , pro která má výraz $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ smysl.)
3. Určete kladná reálná čísla $x \neq y$ taková, že všechny čtyři jejich průměry

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}, \quad k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

leží v množině $M = \left\{ \frac{45}{2}, 18\sqrt{2}, 30, 25\sqrt{2}, 40, 10\sqrt{23} \right\}$.

1. V rovině jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, které se protínají ve dvou bodech A a B , přičemž $|S_1S_2| > r_2 \geq r_1$. Sestrojte body $X \in k_1$ a $Y \in k_2$ tak, aby bod A ležel uvnitř úsečky XY a aby trojúhelník BXY měl co největší obsah. (Jaromír Šimša)

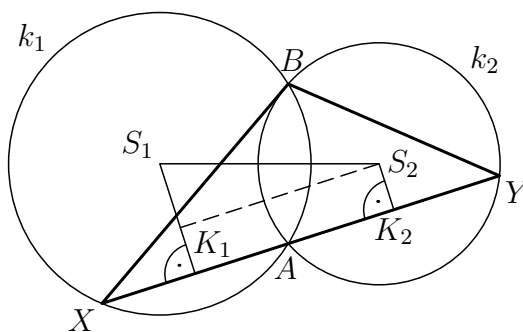
ŘEŠENÍ. Všechny uvažované trojúhelníky BXY jsou navzájem podobné, neboť mají stejný úhel u vrcholu X (obvodový úhel na kružnici k_1 příslušný tětivě AB) i stejný úhel u vrcholu Y (obvodový úhel na kružnici k_2 příslušný tětivě AB). To znamená, že největší obsah má ten trojúhelník BXY , který má např. stranu BX co největší, tj. rovnou průměru kružnice k_1 . Podle Thaletovy věty je tehdy $AB \perp XY$ (takže i BY je průměrem kružnice k_2). Konstrukce bodů X a Y je tím jasná.



JINÉ ŘEŠENÍ. Označme K_1 a K_2 kolmé průměty středů S_1 a S_2 na přímku XY . Pak $|XY| = 2|K_1K_2| \leq 2|S_1S_2|$, přičemž rovnost $|XY| = 2|S_1S_2|$ nastane, právě když $S_1S_2 \parallel K_1K_2$, neboli $AB \perp XY$. Proto pro obsah P trojúhelníku BXY platí odhad

$$P \leq \frac{1}{2} \cdot |XY| \cdot |AB| \leq |S_1S_2| \cdot |AB|,$$

přičemž rovnost $P = |S_1S_2| \cdot |AB|$ nastane, právě když $AB \perp XY$.



Za úplné řešení je 6 bodů.

2. Najděte všechny funkce f tvaru $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ s reálnými koeficienty a, b, c a s následující vlastností: Definiční obor a obor hodnot funkce f jsou dvě stejné neprázdné množiny. (Za definiční obor funkce f považujeme množinu všech reálných čísel x , pro která má výraz $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ smysl.) (Jaromír Šimša)

ŘEŠENÍ. Označme písmeny D a H definiční obor, resp. obor hodnot libovolné funkce f uvedeného tvaru. V případě $a > 0$ by množina D obsahovala některý interval $(-\infty, x_0)$, zatímco všechny prvky H jsou nezáporná čísla. Proto musí platit $a \leq 0$. Ze stejného důvodu v případě $a = 0$ nemůže být číslo b záporné, a zřejmě v tomto případě nemůže být ani $b = 0$ (pak by totiž bylo $f(x) = \sqrt{c}$, což nevyhovuje). Proto v případě $a = 0$ musí platit $b > 0$, tj. $f(x) = \sqrt{bx + c}$. Pak ovšem $H = \langle 0, \infty \rangle$ a z rovnosti $D = \langle 0, \infty \rangle$ plyne $c = 0$. Dostáváme první řešení $f(x) = \sqrt{bx}$, $b > 0$.

V případě $a < 0$ je grafem funkce $y = ax^2 + bx + c$ parabola „obrácená“ dolů, tj. v záporném směru osy y . Odtud plyne, že neprázdna množina H musí být tvaru $H = \langle 0, M \rangle$ pro některé $M \geq 0$. Z rovnosti $D = \langle 0, M \rangle$ plyne, že čísla 0 a M jsou kořeny rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, takže $c = 0$, $b = -aM$ a $f(x) = \sqrt{ax(x - M)}$ (platí to i v případě $M = 0$, kdy kořen 0 je násobný). Obor hodnot takové funkce je ale interval $\langle 0, f(\frac{M}{2}) \rangle$ (víme, že $x = \frac{M}{2}$ je souřadnice vrcholu, tj. „nejvyššího“ bodu paraboly), proto dostáváme podmínku $f(\frac{M}{2}) = M$:

$$\sqrt{a \cdot \frac{M}{2} \cdot \left(\frac{M}{2} - M\right)} = M, \quad \text{neboli} \quad M \cdot \sqrt{-\frac{a}{4}} = M.$$

Poslední rovnost platí, právě když $M = 0$ nebo $a = -4$. Našli jsme zbývající řešení $f(x) = \sqrt{ax^2}$ ($a < 0$) a $f(x) = \sqrt{-4x^2 + bx}$ ($b > 0$).

Odpověď: Hledané funkce jsou trojího druhu: $f(x) = \sqrt{bx}$ ($b > 0$), $f(x) = \sqrt{ax^2}$ ($a < 0$) a $f(x) = \sqrt{-4x^2 + bx}$ ($b > 0$).

Za úplné řešení je 6 bodů; za rozbor případů $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$ po řadě 1, 1, 4 body.

3. Určete kladná reálná čísla $x \neq y$ taková, že všechny čtyři jejich průměry

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}, \quad k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\text{leží v množině } M = \left\{ \frac{45}{2}, 18\sqrt{2}, 30, 25\sqrt{2}, 40, 10\sqrt{23} \right\}. \quad (\text{Jaromír Šimša})$$

ŘEŠENÍ. Víme, že $h < g < a < k$. Protože prvky M jsou vypsány v pořadí od nejmenšího po největší, musí nastat některý z těchto případů:

$$(i) \ g = 18\sqrt{2}, \quad (ii) \ a = 40, \quad (iii) \ g = 30 \text{ a } a = 25\sqrt{2}.$$

V každém z nich je už další postup snadný:

$$(i) \text{ Z } g = 18\sqrt{2} \text{ plyne } h = \frac{45}{2}. \text{ Protože } xy = g^2 = 648, \text{ dostáváme}$$

$$a = \frac{x+y}{2} = \frac{g^2}{h} = \frac{2 \cdot 648}{45}.$$

Poslední číslo nepatří do M , takže případ (i) nemůže nastat.

$$(ii) \text{ Z } a = 40 \text{ plyne } k = 10\sqrt{23}, \text{ takže}$$

$$x+y = 2a = 80$$

a

$$x^2 + y^2 = 2k^2 = 4\,600.$$

Odtud $2xy = 80^2 - 4\,600 = 1\,800$, čili $xy = 900$ a $g = \sqrt{900} = 30 \in M$. Konečně $h = \frac{2 \cdot 900}{80} = \frac{45}{2} \in M$. Čísla x a y jsou kořeny rovnice $t^2 - 80t + 900 = 0$, tedy $\{x, y\} = \{40 \pm 10\sqrt{7}\}$.

(iii) Platí

$$xy = g^2 = 900$$

a

$$x+y = 2a = 50\sqrt{2},$$

odkud $h = \frac{2 \cdot 900}{50\sqrt{2}} = 18\sqrt{2} \in M$. Dále

$$x^2 + y^2 = (50\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 900 = 3\,200,$$

takže $k = \sqrt{1\,600} = 40 \in M$. Čísla x a y jsou kořeny rovnice $t^2 - 50\sqrt{2}t + 900 = 0$, tedy $\{x, y\} = \{25\sqrt{2} \pm 5\sqrt{14}\}$.

$$\text{Odpověď: } \{x, y\} = \{40 \pm 10\sqrt{7}\}, \{x, y\} = \{25\sqrt{2} \pm 5\sqrt{14}\}.$$

Za úplné řešení je 6 bodů.