

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Kolik patnáctimístných čísel složených jen z číslic 3 a 8 je dělitelných jedenácti?
2. V trojúhelníku ABC má úhel u vrcholu C velikost 105° . Určete velikosti zbylých dvou vnitřních úhlů, víte-li, že těžnice vedená z vrcholu A protne osu úhlu u vrcholu B v bodě, který leží na ose strany AB .
3. Čtyřstěnu $ABCD$ lze vepsat kouli tak, že se dotýká všech jeho stěn. Určete vzdálenost středu takové koule od hrany AB , jestliže je dáno:

$$|AB| = 2a, |CD| = 2b, |AC| = |AD| = |BC| = |BD| = c.$$

Pro která čísla a, b, c takový čtyřstěn existuje?

4. Najděte všechny mnohočleny f s reálnými koeficienty takové, že pro každé reálné číslo x platí nerovnost

$$f(x) \cdot x \cdot f(1-x) + x^3 + 100 \geq 0. \quad (1)$$

1. Kolik patnáctimístných čísel složených jen z číslic 3 a 8 je dělitelných jedenácti?
(Pavol Černek)

ŘEŠENÍ. Má-li patnáctimístné číslo ve svém zápisu x trojek a $8 - x$ osmiček na místě sudých řádů a zároveň y trojek a $7 - y$ osmiček na místě lichých řádů, je podle známého kritéria toto číslo násobkem jedenácti, právě když je 11 dělitelný součet

$$x \cdot 3 + (8 - x) \cdot 8 - y \cdot 3 - (7 - y) \cdot 8 = 5(y - x) + 8.$$

Protože $0 \leq x \leq 8$ a $0 \leq y \leq 7$, platí $-8 \leq y - x \leq 7$. Probráním všech možných hodnot $y - x$ (nebo úpravou $5(y - x) + 8 = 5(y - x + 6) - 22$) zjistíme, že podmínka $11 \mid 5(y - x) + 8$ platí, právě když $y - x = -6$ nebo $y - x = 5$, takže $y = x - 6$ nebo $y = x + 5$. Protože x trojek rozmístíme na některé z osmi pozic $\binom{8}{x}$ způsoby a podobně y trojek na některé ze sedmi pozic $\binom{7}{y}$ způsoby, je hledaný počet roven

$$\sum_{x=6}^8 \binom{8}{x} \binom{7}{x-6} + \sum_{x=0}^2 \binom{8}{x} \binom{7}{x+5} = 28 + 56 + 21 + 21 + 56 + 28 = 210.$$

JINÉ ŘEŠENÍ. Patnáctimístné číslo se zápisem $c_1 c_2 \dots c_{15}$ dává při dělení jedenácti stejný zbytek jako součet

$$S = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + c_5 - \dots - c_{14} + c_{15}. \quad (1)$$

Je-li $c_i \in \{3, 8\}$ pro každé i , pak vzhledem k tomu, že $8 \equiv -3 \pmod{11}$, dává součet S při dělení jedenácti stejný zbytek jako součet S' o 15 členech

$$S' = \pm 3 \pm 3 \pm 3 \pm \dots \pm 3, \quad (2)$$

ve kterém před i -tou trojkou (pro každé i) stojí stejné znaménko jako v kongruenci $(-1)^{i+1} c_i \equiv \pm 3 \pmod{11}$. Naopak ke každému součtu S' tvaru (2) lze podle posledních kongruencí přiřadit jediný součet S tvaru (1) s ciframi $c_i \in \{3, 8\}$. Hledaný počet patnáctimístných čísel je proto roven počtu všech těch výběrů znamének v (2), při kterých $S' \equiv 0 \pmod{11}$. Protože každý součet S' je lichý násobek tří, který v absolutní hodnotě nepřevyšuje číslo 45, zajímáme se o ty výběry znamének, při kterých $S' = 33$ nebo $S' = -33$. To nastane, právě když je vybráno 13krát plus a 2krát minus, nebo naopak 13krát minus a 2krát plus. Hledaný počet je proto roven $2 \cdot \binom{15}{2} = 210$.

Za úplné řešení je 6 bodů.

2. V trojúhelníku ABC má úhel u vrcholu C velikost 105° . Určete velikosti zbylých dvou vnitřních úhlů, víte-li, že těžnice vedená z vrcholu A protne osu úhlu u vrcholu B v bodě, který leží na ose strany AB . (Jaromír Šimša)

ŘEŠENÍ. Označme P průsečík těžnice AA_1 s osou o úhlu ABC uvažovaného trojúhelníku. Podle zadání platí $|AP| = |BP|$, takže $|\sphericalangle A_1AB| = \frac{\beta}{2}$, kde $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Označme R a Q kolmé průměty bodů A_1 a C na stranu AB a zvolme jednotku délky $|BR| = 1$. Protože A_1R je střední příčka trojúhelníku CQB , platí $|QR| = 1$, $|A_1R| = \operatorname{tg} \beta$, $|CQ| = 2 \operatorname{tg} \beta$, takže z trojúhelníku ARA_1 plyne

$$|AR| = \frac{|A_1R|}{\operatorname{tg} |\sphericalangle A_1AB|} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}.$$

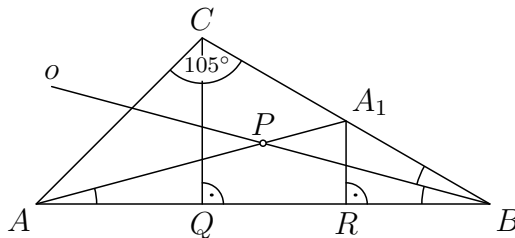
Proto můžeme určit délku

$$|AQ| = |AR| - |QR| = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} - 1 = \frac{1}{\cos \beta},$$

takže z trojúhelníku AQC pro úhel $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ dostáváme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|CQ|}{|AQ|} = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{\frac{1}{\cos \beta}} = 2 \sin \beta.$$

Protože $\alpha + \beta = 75^\circ$, vychází $\operatorname{tg}(75^\circ - \beta) = 2 \sin \beta$. Tato rovnost platí pro $\beta = 30^\circ$, neplatí však pro žádné jiné β z intervalu $I = (0^\circ, 75^\circ)$, neboť její levá strana je na I klesající funkce, zatímco pravá strana funkce rostoucí.



Odpověď: Úhel při vrcholu A je 45° , při vrcholu B 30° .

JINÉ ŘEŠENÍ. Zachovejme označení A_1 , P , α a β z prvního řešení. Znovu si všimneme, že $|\sphericalangle A_1AB| = \frac{\beta}{2}$, a pak zapíšeme sinové věty pro trojúhelníky AA_1C a AA_1B :

$$\frac{|CA_1|}{|AA_1|} = \frac{\sin(\alpha - \frac{\beta}{2})}{\sin 105^\circ} \quad \text{a} \quad \frac{|BA_1|}{|AA_1|} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \beta} = \frac{1}{2 \cos \frac{\beta}{2}}.$$

Protože však $|CA_1| = |BA_1|$, plyne odtud rovnost

$$\frac{\sin(\alpha - \frac{\beta}{2})}{\sin 105^\circ} = \frac{1}{2 \cos \frac{\beta}{2}} \quad \text{neboli} \quad \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos \frac{\beta}{2} = \frac{\cos 15^\circ}{2}.$$

Po dosazení $\alpha = 75^\circ - \beta$ do poslední rovnosti zjistíme podobně jako v prvním řešení, že $\beta = 30^\circ$ je jediná možná hodnota.

Za úplné řešení je 6 bodů.

3. Čtyřstěnu $ABCD$ lze vepsat kouli tak, že se dotýká všech jeho stěn. Určete vzdálenost středu takové koule od hrany AB , jestliže je dáno:

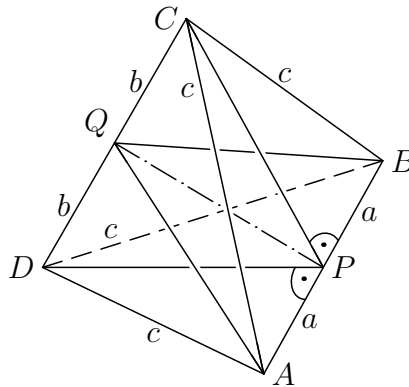
$$|AB| = 2a, \quad |CD| = 2b, \quad |AC| = |AD| = |BC| = |BD| = c.$$

Pro která čísla a, b, c takový čtyřstěn existuje?

(Pavel Leischner)

ŘEŠENÍ. Označme P a Q středy hran AB a CD zkoumaného čtyřstěnu. Z rovnoramenných trojúhelníků ABC a ABD plyne $CP \perp AB$ a $DP \perp AB$, takže stěny ACD a BCD jsou souměrně sdružené podle roviny DPC (obr. 1). Podobně stěny CAB a DAB jsou souměrně sdružené podle roviny ABQ . Proto střed S vepsané kulové plochy leží na průsečnici rovin DPC a ABQ , tedy na úsečce PQ . Navíc body dotyku této kulové plochy se stěnami čtyřstěnu leží na úsečkách AQ, BQ, CP a DP . Označme x velikost úsečky $|SP|$ a znázorníme oba rovnoramenné trojúhelníky ABQ a CDP s hlavní kružnicí vepsané kulové plochy v téže rovině (obr. 2). Platí

$$|AQ| = |BQ| = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad |CP| = |DP| = \sqrt{c^2 - a^2}, \quad |PQ| = \sqrt{c^2 - a^2 - b^2}.$$



Obr. 1

Z dvojic podobných pravoúhlých trojúhelníků dostaneme dvojí vyjádření pro poloměr ρ zmíněné kružnice (a vepsané kulové plochy):

$$\rho = \frac{|CQ| \cdot |SP|}{|CP|} = \frac{b \cdot x}{\sqrt{c^2 - a^2}} \quad \text{a} \quad \rho = \frac{|BP| \cdot |SQ|}{|BQ|} = \frac{a \cdot (\sqrt{c^2 - a^2 - b^2} - x)}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

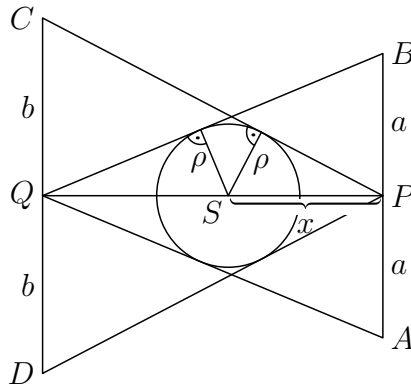
Srovnáním obou vyjádření dostaneme lineární rovnici pro neznámou x s řešením

$$x = \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{a\sqrt{c^2 - a^2} + b\sqrt{c^2 - b^2}} \quad (*)$$

a dosazením do první z předchozích rovností vyjde

$$\rho = \frac{ab\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{a\sqrt{c^2 - a^2} + b\sqrt{c^2 - b^2}},$$

což je hledaný poloměr kulové plochy vepsané danému čtyřstěnu $ABCD$.



Obr. 2

JINÉ ŘEŠENÍ. Využijeme toho, že pro objem V_{ABCD} , povrch S_{ABCD} a poloměr ρ vepsané kulové plochy čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\rho S_{ABCD}, \quad (1)$$

přičemž v daném případě je

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= 2S_{ABC} + 2S_{CDA} = \\ &= 2(a\sqrt{c^2 - a^2} + b\sqrt{c^2 - b^2}). \end{aligned}$$

Podobně jako v prvním řešení z vlastností daného čtyřstěnu zjistíme, že hrana AB je kolmá na rovinu CDP , takže objem V_{ABCD} spočteme jako dvojnásobný objem jehlanu $CDPB$ s podstavou CDP a výškou velikosti a . Je tedy

$$V_{ABCD} = \frac{2}{3}ab|PQ| = \frac{2}{3}ab\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}.$$

Dosazením do vztahu (1) vyjde

$$\rho = \frac{ab\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{a\sqrt{c^2 - a^2} + b\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

To je hledaná vzdálenost. Nyní vysvětlíme, proč takový čtyřstěn existuje, právě když jsou čísla a , b a c kladná a splňují nerovnost $c^2 > a^2 + b^2$. Poslední nerovnost je nutná, neboť dle našich výpočtů $|PQ| = \sqrt{c^2 - a^2 - b^2}$. Obráceně, je-li uvedená nerovnost splněna, můžeme popsat, jak čtyřstěn $ABCD$ sestrojít:

- (1) Sestrojíme úsečku PQ délky $\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}$.
- (2) Sestrojíme úsečku AB délky $2a$ tak, aby byla kolmá na PQ a aby bod P byl její střed.
- (3) Sestrojíme úsečku CD délky $2b$ tak, aby byla kolmá na rovinu ABQ a aby bod Q byl její střed.

Z Pythagorovy věty plyne, že hrany AC , BC , AD a BD sestrojeného čtyřstěnu mají skutečně délku c . Číslo x určené vzorcem (*) je zřejmě kladné a menší než $|PQ|$, neboť

$$|PQ| - x = \sqrt{c^2 - a^2 - b^2} - x = \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{a\sqrt{c^2 - a^2} + b\sqrt{c^2 - b^2}} > 0.$$

Proto uvnitř úsečky PQ existuje bod S tak, že $|SP| = x$. Díky tomu, jak byl vzorec (*) odvozen, má bod S od přímk AQ , BQ , CP a DP stejnou vzdálenost. Ta je i vzdáleností bodu S od rovin čtyřstěnu $ABCD$. Proto lze tomuto čtyřstěnu skutečně vepsat kouli.

Za úplné řešení je 6 bodů.

4. Najděte všechny mnohočleny f s reálnými koeficienty takové, že pro každé reálné číslo x platí nerovnost

$$f(x) \cdot x \cdot f(1-x) + x^3 + 100 \geq 0. \quad (1)$$

(Petr Hliněný)

ŘEŠENÍ. Necht n je stupeň hledaného mnohočlenu f (zřejmě $f \neq 0$) a necht ax^n je jeho vedoucí člen (tj. $f(x) = ax^n + g(x)$, kde g je mnohočlen stupně $\leq n-1$, příp. $g \equiv 0$). Vedoucí člen mnohočlenu $f(x) \cdot x \cdot f(1-x)$ je pak roven $(-1)^n a^2 x^{2n+1}$. Podle zadání však levá strana dané nerovnice nemůže být mnohočlenem lichého stupně. Proto nutně platí $2n+1=3$ a zároveň $(-1)^n a^2 = -1$, takže $n=1$ a $a = \pm 1$. Mnohočlen f je proto tvaru $f(x) = x + b$ nebo $f(x) = -x + b$, kde b je vhodná konstanta. Pro $f(x) = x + b$ je levá strana dané nerovnice rovna trojčlenu $x^2 + (b^2 + b)x + 100$, který je nezáporný pro každé x , právě když $|b^2 + b| \leq 20$, tj. $b \in \langle -5, 4 \rangle$. Pro $f(x) = -x + b$ vychází trojčlen $x^2 + (b^2 - b)x + 100$ a podmínka $|b^2 - b| \leq 20$, tj. $b \in \langle -4, 5 \rangle$.

Odpověď: Hledané mnohočleny jsou $f(x) = x + b$, kde b je libovolné číslo z intervalu $\langle -5, 4 \rangle$, a $f(x) = -x + b$, kde b je libovolné číslo z intervalu $\langle -4, 5 \rangle$.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 4 body za objasnění, pro $n=1$, a po 1 bodu za každý nalezený interval.