

Ústřední kolo kategorie A

Jevíčko, 25. dubna 1995



1. Je dán čtyřstěn $ABCD$, pro nějž platí

$$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBD| + |\sphericalangle DBA| = 180^\circ.$$

Dokažte, že $|CD| \geq |AB|$.

2. Určete kladná reálná čísla x a y , víte-li, že průměry

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}, \quad k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

jsou přirozená čísla, jejichž součet se rovná 66.

3. V rovině je dáno pět různých bodů a pět různých přímek. Dokažte, že z nich lze vybrat dva různé body a dvě různé přímky tak, aby žádný z obou vybraných bodů neležel na žádné z obou vybraných přímek.

Ústřední kolo kategorie A

Jevíčko, 26. dubna 1995



4. Rozhodněte, zda existuje 10 000 desetimístných čísel dělitelných sedmi, která jsou zapsána stejnou skupinou deseti číslic v různých pořadích.
5. Na kružnici k o středu S jsou dány body A a B tak, že tětiva AB je z bodu S vidět pod úhlem 90° . Kružnice k_1, k_2 se dotýkají zevnitř kružnice k po řadě v bodech A, B a navíc se navzájem vně dotýkají v bodě Z . Kružnice k_3 ležící uvnitř úhlu ASB se dotýká (zevnitř) kružnice k v bodě C a (vně) kružnic k_1, k_2 po řadě v bodech X, Y . Dokažte, že úsečku XY je z bodu C vidět pod úhlem 45° .
6. Pro která reálná čísla p má rovnice

$$x^3 - 2p(p+1)x^2 + (p^4 + 4p^3 - 1)x - 3p^3 = 0$$

tři různé kořeny, jež jsou délkami stran některého pravoúhlého trojúhelníku?

1. Je dán čtyřstěn $ABCD$, pro nějž platí

$$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBD| + |\sphericalangle DBA| = 180^\circ.$$

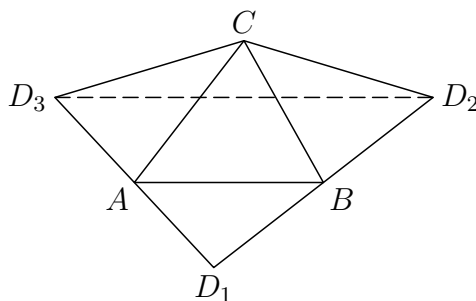
Dokažte, že $|CD| \geq |AB|$.

(Pavel Leischner)

ŘEŠENÍ. Na obrázku 1 je sít daného čtyřstěnu, vzniklá otočením stěn ABD , BCD a CAD kolem hran stěny ABC do její roviny. Rovnosti ze zadání úlohy znamenají, že jak body D_1 , A a D_3 , tak i body D_1 , B a D_2 leží v přímce. Proto je úsečka AB střední příčkou trojúhelníku $D_1D_2D_3$, což spolu s trojúhelníkovou nerovností pro trojici bodů D_2 , C a D_3 vede k odhadu

$$2|AB| = |D_2D_3| \leq |D_2C| + |CD_3| = 2|CD|.$$

Tím je nerovnost $|CD| \geq |AB|$ dokázána.



Obr. 1

2. Určete kladná reálná čísla x a y , víte-li, že průměry

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}, \quad k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

jsou přirozená čísla, jejichž součet se rovná 66.

(Jaromír Šimša)

ŘEŠENÍ. Protože číslo 66 není dělitelné čtyřmi, nemůže platit $a = g = h = k$, takže jak dobře víme, platí $h < g < a < k$. Označme c největší společný dělitel čísel a, g . Pak $a = ca_1$ a $g = cg_1$, přičemž $g_1 < a_1$ jsou nesoudělná přirozená čísla. Protože $h = \frac{g^2}{a} = \frac{cg_1^2}{a_1}$, je číslo c dělitelné číslem a_1 , tedy $c = da_1$ pro vhodné přirozené číslo d . Dostáváme tak vyjádření průměrů pomocí čísel d, a_1, g_1 :

$$h = dg_1^2, \quad g = da_1g_1, \quad a = da_1^2, \quad k = \sqrt{2a^2 - g^2} = da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}.$$

Protože druhá odmocnina z přirozeného čísla je buď přirozené, nebo iracionální číslo, musí být číslo $\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}$ přirozené (a to větší než a_1 , neboť $g_1 < a_1$). Proto je levá strana rovnosti

$$dg_1^2 + da_1g_1 + da_1^2 + da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2} = 66 \tag{1}$$

větší než $2a_1^2$ (vzhledem k nerovnosti $d \geq 1$ stačí uvažovat jen třetí a čtvrtý sčítanec). Odtud plyne $2a_1^2 < 66$, neboli $a_1 \leq 5$. Snadno se zjistí, která z deseti odmocnin

$$\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}, \quad \text{kde } 1 \leq g_1 < a_1 \leq 5,$$

je rovna přirozenému číslu: taková je jediná odmocnina $\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1^2}$ pro $a_1 = 5$ a $g_1 = 1$. Dosazením do (1) zjistíme, že $d = 1$. Průměry $(h, g, a, k) = (1, 5, 25, 35)$ má dvojice kořenů rovnice $t^2 - 50t + 25 = 0$, tedy dvojice čísel $\{x, y\} = \{25 + 10\sqrt{6}, 25 - 10\sqrt{6}\}$.

3. V rovině je dáno pět různých bodů a pět různých přímek. Dokažte, že z nich lze vybrat dva různé body a dvě různé přímky tak, aby žádný z obou vybraných bodů neležel na žádné z obou vybraných přímek. (Petr Hliněný)

ŘEŠENÍ. Označme dané body $A_1, A_2, \dots, A_5$, dané přímky $p_1, p_2, \dots, p_5$ a rozlišme dva případy:

- (I) *Na každé dané přímce leží nejvýše dva dané body.* Kdyby $A_i \in p_j \cap p_k$ pro některé indexy i a $j \neq k$, platilo by $A_x \in p_j \cup p_k$ pro nejvýše tři hodnoty x (včetně $x = i$), takže by zbylé dva dané body spolu s přímkami p_j, p_k tvořily vhodný výběr. V opačném případě by každým bodem A_i procházela nejvýše jedna přímka p_j ; pak by dokonce některé tři přímky p_j neprocházely ani bodem A_1 , ani bodem A_2 .
- (II) *Na některé dané přímce leží aspoň tři dané body.* Necht' například body A_1, A_2 a A_3 leží na přímce p_1 . Protože každá přímka p_j ($j > 1$) prochází nejvýše jedním z bodů A_1, A_2, A_3 (jinak by bylo $p_j = p_1$), můžeme jí přiřadit dvouprvkovou množinu $M_j \subset \{A_1, A_2, A_3\}$ takovou, že $p_j \cap M_j = \emptyset$. Avšak tříprvková množina má pouze tři různé dvouprvkové podmnožiny, takže některé dvě ze čtyř množin M_2, M_3, M_4 a M_5 jsou stejné. Při vhodném očíslování bodů a přímek tedy platí $M_2 = M_3 = \{A_1, A_2\}$. To znamená, že je možné vybrat body A_1, A_2 a přímky p_2, p_3 .

4. *Rozhodněte, zda existuje 10 000 desetimístných čísel dělitelných sedmi, která jsou zapsána stejnou skupinou deseti číslic v různých pořadích.* (Jaromír Šimša)

ŘEŠENÍ. Všechna desetimístná čísla rozdělme do skupin tak, aby dvě čísla padla do téže skupiny, právě když jsou zapsána stejným souborem deseti cifer. Podle vzorce pro počet kombinací s opakováním existuje právě $\binom{19}{9}$ různých neuspořádaných souborů deseti číslic. Protože je mezi nimi i soubor deseti nul, je počet zmíněných skupin, do kterých jsme rozdělili všechna desetimístná čísla, roven číslu

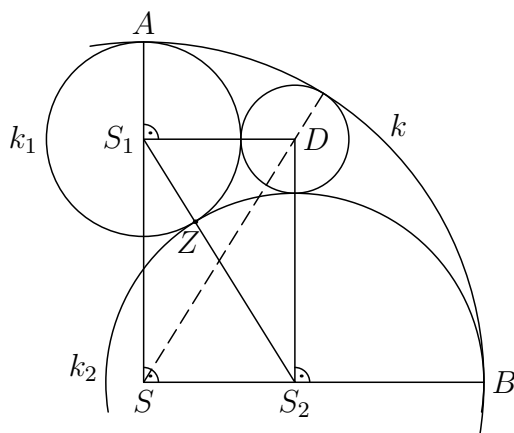
$$\binom{19}{9} - 1 = \frac{19 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9} - 1 = 19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 2 - 1 = 92\,377 < 10^5.$$

Počet desetimístných násobků sedmi je však zřejmě větší než 10^9 . Proto se v některé ze zmíněných skupin vyskytuje více než $10^{9-5} = 10^4$ čísel dělitelných sedmi. Tvrzení ze zadání úlohy tedy platí.

5. Na kružnici k o středu S jsou dány body A a B tak, že tětiva AB je z bodu S vidět pod úhlem 90° . Kružnice k_1, k_2 se dotýkají zevnitř kružnice k po řadě v bodech A, B a navíc se navzájem vně dotýkají v bodě Z . Kružnice k_3 ležící uvnitř úhlu ASB se dotýká (zevnitř) kružnice k v bodě C a (vně) kružnic k_1, k_2 po řadě v bodech X, Y . Dokažte, že úsečku XY je z bodu C vidět pod úhlem 45° . (Miroslav Engliš)

ŘEŠENÍ. Necht $k(S, r)$ a $k_i(S_i, r_i)$ jsou zmíněné kružnice. Trojúhelník SS_1S_2 se stranami délek

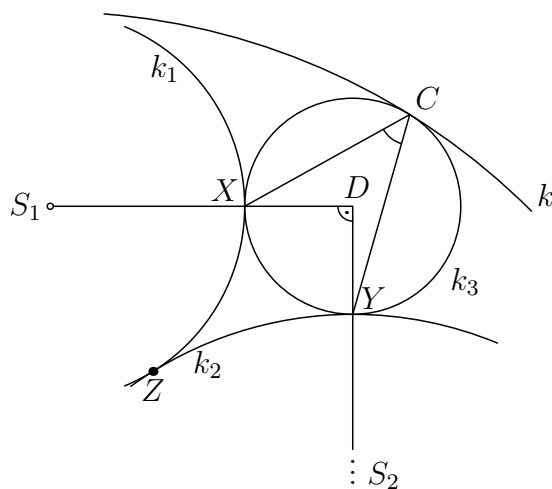
$$|SS_1| = r - r_1, \quad |SS_2| = r - r_2, \quad |S_1S_2| = r_1 + r_2 \quad (1)$$



Obr. 1

má podle zadání pravý úhel při vrcholu S . Na obr. 1 je tento trojúhelník doplněn na pravouhelník SS_1DS_2 . Nový bod D má podle (1) od bodů S_1, S_2, S vzdálenosti

$$|DS_1| = r - r_2, \quad |DS_2| = r - r_1, \quad |DS| = r_1 + r_2. \quad (2)$$



Obr. 2

Z trojúhelníkové nerovnosti $|S_1S_2| < |SS_1| + |SS_2|$ vzhledem k (1) okamžitě plyne $r_1 + r_2 < r$. Proto je možné uvažovat o kružnici se středem D a poloměrem rovným $r - r_1 - r_2$ (neoznačená kružnice na obr. 1 ležící v úhlu ASB). Tato kružnice má podle (1) všechny vlastnosti kružnice k_3 z textu úlohy: dotýká se zevnitř kružnice k a vně kružnic k_1, k_2 . Protože kružnice k_3 je pro dané kružnice k, k_1 a k_2 zřejmě jediná, platí $S_3 = D$ a $r_3 = r - r_1 - r_2$. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu to znamená (obr. 2), že

$$|\sphericalangle XCY| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle S_1DS_2| = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ.$$

Tím je důkaz hotov.

6. Pro která reálná čísla p má rovnice

$$x^3 - 2p(p+1)x^2 + (p^4 + 4p^3 - 1)x - 3p^3 = 0 \quad (1)$$

tři různé kořeny, jež jsou délkami stran některého pravoúhlého trojúhelníku?

(Jaromír Šimša)

ŘEŠENÍ. Pro kladné kořeny a, b, c , $0 < a < b < c$, rovnice (1) musí platit Pythagorova věta $a^2 + b^2 = c^2$ a Viètovy vzorce

$$a + b + c = 2p(p+1), \quad ab + bc + ac = p^4 + 4p^3 - 1, \quad abc = 3p^3. \quad (2)$$

Dostáváme tak

$$\begin{aligned} 2c^2 &= a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = \\ &= 4p^2(p+1)^2 - 2(p^4 + 4p^3 - 1) = 2(p^2 + 1)^2, \end{aligned}$$

tj. $c = p^2 + 1$. Proto ze vzorců (2) dále plyne

$$\begin{aligned} a + b &= 2p(p+1) - c = p^2 + 2p - 1, \\ ab &= p^4 + 4p^3 - 1 - c(a+b) = 2p^3 - 2p. \end{aligned}$$

Čísla a, b jsou tedy kořeny kvadratické rovnice

$$u^2 - (p^2 + 2p - 1)u + 2p^3 - 2p = 0,$$

což jsou (po snadném výpočtu) čísla $2p$ a $p^2 - 1$. Odtud plyne nutná podmínka $p > 1$. Čísla $2p, p^2 - 1, p^2 + 1$ jsou kořeny (1), právě když splňují třetí Viètův vzorec

$$2p(p^2 - 1)(p^2 + 1) = 3p^3, \quad \text{neboli} \quad p(2p^2 + 1)(p^2 - 2) = 0.$$

S ohledem na $p > 1$ tak dostáváme jediné řešení $p = \sqrt{2}$, kdy kořeny (1) jsou tři čísla 1, $2\sqrt{2}$ a 3.