

Ústřední kolo kategorie A

Brno, 16. března 2026



1. Pro kladná reálná čísla x, y, z platí $x^2 + y^2 + z^2 = 75$ a dva ze tří součtů $x + y, y + z, z + x$ jsou aspoň 10. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu zbývajících součtů.
2. Necht T je těžiště ostroúhlého trojúhelníku ABC . Na kratším oblouku BC kružnice jemu opsané je dán bod P . Označme P' patu kolmice z bodu P k úsečce BC . Dále označme X průsečík přímky $P'T$ a rovnoběžky s BC vedené bodem A . Nakonec označme S střed úsečky PX . Dokažte, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|$.
3. Řekneme, že skupina několika lidí je *trojitá*, pokud se každý člen skupiny zná s přesně třemi dalšími členy a skupinu nelze rozdělit do dvou neprázdných částí tak, aby každý jejich člen měl všechny své známé ve své části. Vztah známosti je vzájemný. Určete největší celé číslo $k \geq 3$, pro které existuje kladné celé číslo n takové, že z každé trojité skupiny s alespoň n lidmi lze vybrat alespoň k lidí a posadit je ke kulatému stolu tak, že se každí dva sousedé znají.

Soutěžící má na vypracování úloh 4,5 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

Ústřední kolo kategorie A

Brno, 17. března 2026



4. Necht a, b jsou různá kladná celá čísla taková, že čísla $a^2 + 1$ a $ab + 1$ mají stejné množiny prvočinitelů. Dokažte, že číslo $a^2 + b^2 + 2$ je dělitelné druhou mocninou některého prvočísla.
5. Necht $\mathcal{P} = (a_1, a_2, \dots, a_{2026})$ je libovolné pořadí čísel $1, 2, \dots, 2026$. Řekneme, že index $i \in \{1, 2, \dots, 2026\}$ je *dobrý*, pokud každé z 2026 čísel

$$\begin{aligned}
 & a_i, \\
 & a_i - a_{i+1}, \\
 & a_i - a_{i+1} + a_{i+2}, \\
 & a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - a_{i+3}, \\
 & \vdots \\
 & a_i - a_{i+1} + \dots - a_{i+2023} + a_{i+2024}, \\
 & a_i - a_{i+1} + \dots - a_{i+2023} + a_{i+2024} - a_{i+2025}
 \end{aligned}$$

je nezáporné, kde indexy počítáme modulo 2026, tj. klademe $a_{j+2026} = a_j$ pro každé celé j . Označme $n(\mathcal{P})$ počet dobrých indexů pořadí $\mathcal{P}$. Určete nejmenší možné i největší možné $n(\mathcal{P})$.

6. Necht $ABCDEF$ je šestiúhelník vepsaný do kružnice se středem O , jehož každé dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné. Přímký AB , CD a EF vymezují trojúhelník Δ_1 a přímky BC , DE a FA vymezují trojúhelník Δ_2 . Dokažte, že středy kružnic opsaných trojúhelníkům Δ_1 a Δ_2 jsou souměrně sdružené podle bodu O .

Soutěžící má na vypracování úloh 4,5 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

1. Pro kladná reálná čísla x, y, z platí $x^2 + y^2 + z^2 = 75$ a dva ze tří součtů $x + y, y + z, z + x$ jsou aspoň 10. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu zbývajících součtů.
(Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $x + y \geq 10$ a $x + z \geq 10$. Máme najít nejmenší a největší možnou hodnotu součtu $y + z$. Dokážeme, že nejmenší možná hodnota je $\frac{10}{3}$ a největší možná hodnota je 10. Hodnoty $\frac{10}{3}$ lze dosáhnout volbou $(x, y, z) = (\frac{25}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ a hodnoty 10 lze dosáhnout volbou $(x, y, z) = (5, 5, 5)$. Zbývá tak dokázat, že platí $\frac{10}{3} \leq y + z \leq 10$.

- *Důkaz horního odhadu* $y + z \leq 10$: Sporem předpokládejme $y + z > 10$. Potom

$$\begin{aligned} 300 &= 3 \cdot 10^2 < (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 = \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz + 2zx \leq 4(x^2 + y^2 + z^2) = 4 \cdot 75 = 300, \end{aligned}$$

kde jsme využili nerovnost $2ab \leq a^2 + b^2$, platnou pro libovolná reálná čísla a, b ; tuto nerovnost získáme úpravou nerovnosti $0 \leq (a - b)^2$. Obdrželi jsme tak spor $300 < 300$, tedy největší možná hodnota součtu $y + z$ je skutečně 10.

- *Důkaz dolního odhadu* $y + z \geq \frac{10}{3}$: Platí $x + y \geq 10$ a $x + z \geq 10$, proto $y \geq 10 - x$ a $z \geq 10 - x$. Odtud zřejmě plyne $x < 10$, protože v opačném případě by platilo $x^2 + y^2 + z^2 > x^2 \geq 100 > 75$. To znamená, že $10 - x > 0$, a proto $y^2 \geq (10 - x)^2$ a $z^2 \geq (10 - x)^2$. Dostáváme tak

$$75 = x^2 + y^2 + z^2 \geq x^2 + (10 - x)^2 + (10 - x)^2 = 3x^2 - 40x + 200.$$

Úpravou získáme

$$0 \geq 3x^2 - 40x + 125 = (x - 5)(3x - 25).$$

Odtud již nutně $5 \leq x \leq \frac{25}{3}$. Nyní již můžeme určit nejmenší možnou hodnotu $y + z$:

$$y + z \geq (10 - x) + (10 - x) = 20 - 2x \geq 20 - 2 \cdot \frac{25}{3} = \frac{10}{3}.$$

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme $c = \frac{1}{2}(x + y)$, $b = \frac{1}{2}(x + z)$, $a = \frac{1}{2}(y + z)$. Potom $x = b + c - a$, $y = a + c - b$, $z = a + b - c$. Bez újmy na obecnosti nechť $x + y \geq 10$ a $x + z \geq 10$, tedy $b \geq 5$ a $c \geq 5$. Určíme nejmenší a největší možnou hodnotu součtu $y + z = 2a$ odhadem hodnoty a .

Dosazením do první rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 + z^2 - 75 = (b + c - a)^2 + (a + c - b)^2 + (a + b - c)^2 - 75 = \\ &= 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 2ab - 2bc - 2ca - 75 = 3a^2 - 2a(b + c) + 3(b^2 + c^2) - 2bc - 75. \end{aligned}$$

Tuto rovnici vyřešíme jako kvadratickou s neznámou a , dostaneme

$$\begin{aligned} a &= \frac{2(b + c) \pm \sqrt{4(b + c)^2 - 4 \cdot 3(3(b^2 + c^2) - 2bc - 75)}}{2 \cdot 3} = \\ &= \frac{b + c \pm \sqrt{225 - 8(b^2 + c^2) + 8bc}}{3}. \end{aligned}$$

Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem získáme

$$\begin{aligned} a &= \frac{b+c \pm \sqrt{225-8(b^2+c^2)+8bc}}{3} \leq \sqrt{\frac{b^2+c^2+225-8(b^2+c^2)+8bc}{3}} = \\ &= \sqrt{\frac{225-7(b^2+c^2)+8bc}{3}} = \sqrt{\frac{225-3(b^2+c^2)-4(b-c)^2}{3}} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{225-3(b^2+c^2)}{3}} \leq 5, \end{aligned}$$

jelikož podle předpokladů $b, c \geq 5$, a tedy i $b^2, c^2 \geq 25$. To znamená, že $y+z=2a \leq 10$. Rovnost nastane v případě $b=c=5$, tedy stejně jako v prvním řešení je tato hodnota dosažena pro $x=y=z=5$.

Nyní odhadneme hodnotu a zdola. Platí

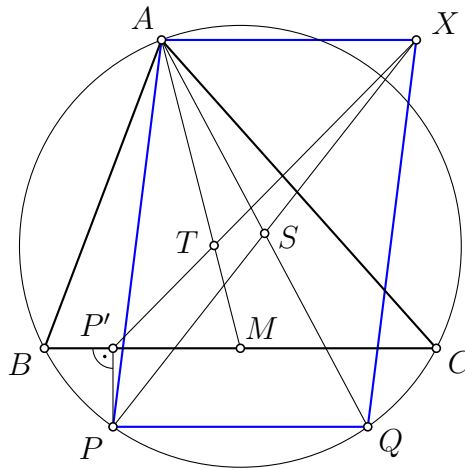
$$\begin{aligned} a &\geq \frac{b+c - \sqrt{225-8(b^2+c^2)+8bc}}{3} = \frac{(b+c) - \sqrt{225-4(b^2+c^2)-4(b-c)^2}}{3} \geq \\ &\geq \frac{(b+c) - \sqrt{225-4(b^2+c^2)}}{3} \geq \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

kde znovu využíváme $b, c \geq 5$ a $b^2, c^2 \geq 25$. To znamená, že $y+z=2a \geq \frac{10}{3}$. Rovnost nastane v případě $b=c=5$, tedy stejně jako v prvním řešení je tato hodnota dosažena pro $x=\frac{25}{3}$ a $y=z=\frac{5}{3}$.

2. Necht T je těžiště ostroúhlého trojúhelníku ABC . Na kratším oblouku BC kružnice jemu opsané je dán bod P . Označme P' patu kolmice z bodu P k úsečce BC . Dále označme X průsečík přímky $P'T$ a rovnoběžky s BC vedené bodem A . Nakonec označme S střed úsečky PX . Dokažte, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|$. (Michal Janík)

ŘEŠENÍ. Nejprve vyřešíme případ, kdy je bod P středem kratšího oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC . Přímka AP je tak osou úhlu BAC . Bod P' je v tomto případě středem úsečky BC , takže $P'T$ splývá s těžnicí z vrcholu A . Bod X tak splývá s bodem A a nakonec bod S leží na přímce AP . Protože AP je osou úhlu BAC , platí $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|$.

Ve zbytku řešení předpokládejme, že bod P je různý od středu kratšího oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC . Označme Q bod na kružnici opsané trojúhelníku ABC různý od bodu P takový, že platí $PQ \parallel BC$. Z uvedené rovnoběžnosti plyne, že $BPQC$ je rovnoramenný lichoběžník, a tedy obvodové úhly BAP a QAC mají stejnou velikost. K důkazu požadované rovnosti $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|$ stačí ukázat, že body A , S , Q leží na téže přímce.



Ukážeme, že $APQX$ je rovnoběžník. Platí $AX \parallel BC$ a $BC \parallel PQ$, tedy i $AX \parallel PQ$. Stačí nám tak ukázat, že $|AX| = |PQ|$. Označme M střed úsečky BC . Jelikož body M i P' leží na přímce BC , z rovnoběžnosti AX a BC plyne, že trojúhelníky TAX a TMP' jsou podobné, platí tak

$$\frac{|AX|}{|MP'|} = \frac{|AT|}{|MT|} = 2,$$

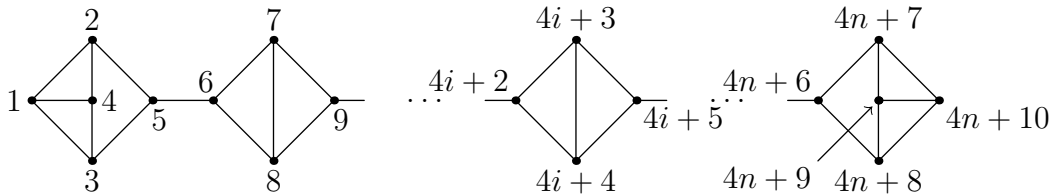
jelikož těžiště trojúhelníku ABC dělí jeho těžnici AM v poměru $2 : 1$.

Protože $BPQC$ je rovnoramenný lichoběžník a je symetrický podle osy úsečky BC , platí $|PQ| = 2 \cdot |MP'|$, a proto $|AX| = 2 \cdot |MP'| = |PQ|$. To spolu s rovnoběžností PQ a AX dává, že $APQX$ je rovnoběžník. Bod S je středem jeho úhlopříčky PX , takže je i průsečíkem jeho úhlopříček, a tedy S leží i na úhlopříčce AQ (dokonce je jejím středem). Proto $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle QAC| = |\sphericalangle SAC|$, jak jsme měli dokázat.

3. Řekneme, že skupina několika lidí je trojitá, pokud se každý člen skupiny zná s přesně třemi dalšími členy a skupinu nelze rozdělit do dvou neprázdných částí tak, aby každý jejich člen měl všechny své známé ve své části. Vztah známosti je vzájemný. Určete největší celé číslo $k \geq 3$, pro které existuje kladné celé číslo n takové, že z každé trojité skupiny s alespoň n lidmi lze vybrat alespoň k lidí a posadit je ke kulatému stolu tak, že se každý dva sousedé znají. (Jozef Rajník)

ŘEŠENÍ. Ukážeme, že řešením je $k = 5$. Skupinu lidí, ve které lze vybrat k lidí a posadit je kolem kulatého stolu tak, aby se každý dva sousedé znali, budeme nazývat k -kulatá.

Nejprve ukážeme, že žádné $k \geq 6$ nevyhovuje. To uděláme tak, že pro každé nezáporné celé číslo n najdeme trojitou skupinu $4n + 10$ lidí, ve které žádná k -tice s $k \geq 6$ není k -kulatá. Konstrukce je znázorněna na obrázku. Vrcholy grafu odpovídají lidem, hrany odpovídají známostem.

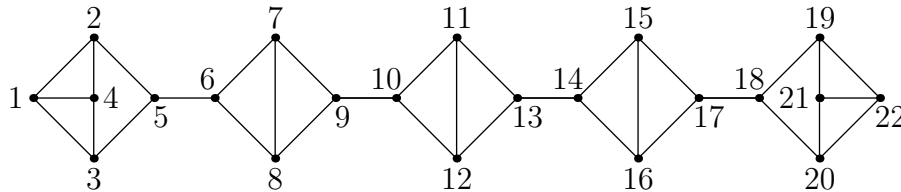


Členy skupiny očíslovujeme od 1 po $4n + 10$ a celou skupinu rozdělíme na $n + 2$ buněk:

- členové 1, 2, 3, 4 a 5 se známostmi $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}$;
- členové $4i + 2, 4i + 3, 4i + 4$ a $4i + 5$ se známostmi $\{4i + 2, 4i + 3\}, \{4i + 2, 4i + 4\}, \{4i + 3, 4i + 4\}, \{4i + 3, 4i + 5\}, \{4i + 4, 4i + 5\}$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- členové $4n + 6, 4n + 7, 4n + 8, 4n + 9$ a $4n + 10$ se známostmi $\{4n + 6, 4n + 7\}, \{4n + 6, 4n + 8\}, \{4n + 7, 4n + 9\}, \{4n + 7, 4n + 10\}, \{4n + 8, 4n + 9\}, \{4n + 8, 4n + 10\}$.

Nadto se znají ještě dvojice $\{4i + 1, 4i + 2\}$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$.

Snadno vidíme, že taková skupina lidí je trojitá. Navíc u kulatého stolu mohou sedět jen členové jedné buňky – pokud by totiž u stolu seděli dva lidé z různých buněk, musela by na každém ze dvou oblouků mezi nimi sedět ta samá dvojice $\{4i + 1, 4i + 2\}$, pro některé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jelikož každá buňka má nejvýše 5 členů, nelze za kulatý stůl usadit více než 5 lidí. Takto sestavená trojitá skupina lidí proto není k -kulatá pro $k \geq 6$. Příklad takové skupiny pro $n = 3$ vidíte na obrázku.

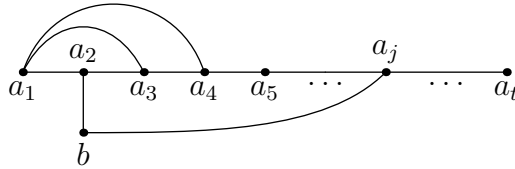


Ve zbytku řešení dokážeme, že každá skupina s alespoň pěti lidmi je 5kulatá. Postupujeme sporem. Předpokládejme, že existuje nějaká alespoň pětičlenná trojitá skupina lidí, která není 5kulatá. Vezměme nejdelší posloupnost $\mathcal{P} = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ různých členů uvažované skupiny, v níž se libovolní dva sousední lidé znají. Jelikož naše skupina není

5kulatá, její člen a_1 nezná žádného člena a_i , kde $i \geq 5$. Také všichni jeho známí musí být v posloupnosti $\mathcal{P}$, jinak bychom mohli posloupnost $\mathcal{P}$ prodloužit. Proto $t \geq 4$ a člen a_1 zná právě členy a_2, a_3, a_4 .

Ukážeme, že $t \geq 5$. Pro spor předpokládejme, že $t = 4$. Jelikož posloupnost $\mathcal{P}$ nelze prodloužit, člen a_4 zná členy a_1, a_2, a_3 . Dostáváme skupinu čtyř lidí, ve které se každý zná s každým, tedy neznají žádného z ostatních členů. Nějací členové mimo tuto čtveřici existují, jelikož uvažujeme alespoň pětičlennou skupinu. Dostali jsme tak rozdělení na dvě neprázdné skupiny, které je ve sporu s vlastností trojitě skupiny ze zadání. Proto platí $t \geq 5$.

Jelikož člen a_4 zná členy a_1, a_3, a_5 , tak členové a_2 a a_4 se neznají. Člen a_2 zná členy a_1, a_3 . Jeho třetího známého označme b . Pokud by platilo $b = a_i$ pro nějaké i , tak $i \geq 5$ a umíme ke kulatému stolu posadit lidi $a_1, a_3, a_4, \dots, a_i, a_2$, kterých je i , čili alespoň 5, a to je spor. Proto se člen b nenachází v posloupnosti $\mathcal{P}$. Všichni známí člena b se však v této posloupnosti musí nacházet, jinak bychom ji uměli prodloužit tím, že a_1 nahradíme b a tímto známým. Tedy člen b má kromě a_2 ještě nějakého známého a_j v posloupnosti $\mathcal{P}$. Členové a_1, a_3 a a_4 již mají všechny tři své známé v posloupnosti $\mathcal{P}$, proto $j \geq 5$. Potom však umíme ke kulatému stolu posadit j členů $b, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_j$, což je spor. Tím jsme ukázali, že každá trojitá skupina s alespoň pěti lidmi je 5kulatá.



4. *Nechť a, b jsou různá kladná celá čísla taková, že čísla $a^2 + 1$ a $ab + 1$ mají stejné množiny prvočinitelů. Dokažte, že číslo $a^2 + b^2 + 2$ je dělitelné druhou mocninou některého prvočísla.* (Dominik Martin Rigász)

ŘEŠENÍ. Nechť p je prvočinitelem čísla $ab + 1$. Jelikož čísla $a^2 + 1$ a $ab + 1$ mají stejnou množinu prvočinitelů, tak $p \mid a^2 + 1$. Pak $p \mid a^2 + 1 - (ab + 1) = a(a - b)$. Ale čísla $a, ab + 1$ jsou zřejmě nesoudělná a $p \mid ab + 1$, nemůže tak platit $p \mid a$, tedy platí $p \mid a - b$. Pokud je tedy nějaké prvočísla p dělitelem $ab + 1$, pak je kromě $a^2 + 1$ dělitelem i $a - b$.

Ukážeme, že existuje prvočísla p takové, že $p^2 \mid ab + 1$. Potom bude platit $p \mid a - b$, tedy $p^2 \mid (a - b)^2$ a dále $p^2 \mid (a - b)^2 + 2(ab + 1) = a^2 + b^2 + 2$, což máme dokázat.

Sporem předpokládejme, že $ab + 1$ je bezčtvercové (tedy není dělitelné druhou mocninou žádného prvočísla). Jak jsme již ukázali dříve, každé prvočísla, které dělí $ab + 1$, dělí i číslo $a - b$. Protože $ab + 1$ je bezčtvercové, platí $ab + 1 \mid a - b$. Současně čísla a, b jsou různá, takže $a - b \neq 0$ a platí $ab + 1 \leq |a - b|$. Odtud dostáváme $ab < ab + 1 \leq |a - b| < \max(a, b) \leq ab$, protože a, b jsou kladná celá čísla, čímž jsme dospěli ke sporu. To znamená, že $ab + 1$ není bezčtvercové, což nám stačilo dokázat.

POZNÁMKA. Dvojicí, která splňuje podmínky ze zadání, je například $(a, b) = (3, 13)$, pro ni platí $a^2 + 1 = 2 \cdot 5$, $ab + 1 = 2^3 \cdot 5$ (a $a^2 + b^2 + 2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$). Dalšími dvojicemi splňujícími podmínky úlohy jsou například $(31, 993)$ a $(13, 523)$, pro ně mají čísla $a^2 + 1$ a $ab + 1$ tři různé prvočinitele.

5. Necht $\mathcal{P} = (a_1, a_2, \dots, a_{2026})$ je libovolné pořadí čísel $1, 2, \dots, 2026$. Řekneme, že index $i \in \{1, 2, \dots, 2026\}$ je dobrý, pokud každé z 2026 čísel

$$\begin{aligned} & a_i, \\ & a_i - a_{i+1}, \\ & a_i - a_{i+1} + a_{i+2}, \\ & a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - a_{i+3}, \\ & \vdots \\ & a_i - a_{i+1} + \dots - a_{i+2023} + a_{i+2024}, \\ & a_i - a_{i+1} + \dots - a_{i+2023} + a_{i+2024} - a_{i+2025} \end{aligned}$$

je nezáporné, kde indexy počítáme modulo 2026, tj. klademe $a_{j+2026} = a_j$ pro každé celé j . Označme $n(\mathcal{P})$ počet dobrých indexů pořadí $\mathcal{P}$. Určete nejmenší možné i největší možné $n(\mathcal{P})$. (Jakub Krivošík)

ŘEŠENÍ. Ukážeme, že největší možná hodnota $n(\mathcal{P})$ je 1013 a nejmenší možná hodnota $n(\mathcal{P})$ je 1.

Součet všech čísel je $1 + 2 + \dots + 2026 = \frac{1}{2} \cdot 2026 \cdot 2027 = 1013 \cdot 2027$, což je liché číslo. To znamená, že součet všech čísel se sudými indexy je různý od součtu všech čísel s lichými indexy, a tedy jeden z těchto součtů je menší. Při dokazování odhadů budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že menší součet mají čísla na sudých pozicích.

Nejprve určíme největší možnou hodnotu $n(\mathcal{P})$. Žádný sudý index i , nemůže být dobrý, protože

$$\begin{aligned} & a_i - a_{i+1} + \dots + a_{i+2024} - a_{i+2025} = \\ & = a_i + a_{i+2} + \dots + a_{i+2024} - (a_{i+1} + a_{i+3} + \dots + a_{i+2025}) < 0. \end{aligned}$$

To znamená, že $n(\mathcal{P}) \leq 1013$. Ukážeme, že hodnoty 1013 lze dosáhnout například volbou $a_1 = 2026, a_2 = 2025, \dots, a_{2026} = 1$. Samotný člen a_{2i+1} je zřejmě nezáporný. Každý člen se sudým indexem je o 1 menší než ten předcházející, takže každý součet tvaru

$$\underbrace{a_{2i+1} - a_{2i+2}}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{a_{2j+1} - a_{2j+2}}_{\geq 0}$$

je nezáporný. To znamená, že i každý součet tvaru

$$a_{2i+1} - a_{2i+2} + \dots + a_{2j+1} - a_{2j+2} + a_{2j+3},$$

je nezáporný, protože přičtením kladného čísla a_{2j+3} se nezápornost zachová. Všech 1013 lichých indexů je proto dobrých, takže největší možná hodnota $n(\mathcal{P})$ je 1013.

Nyní ukážeme, že nejmenší možná hodnota $n(\mathcal{P})$ je 1. Označme $b_i = a_{2i-1} - a_{2i}$. Z definice b_i musí platit $b_1 + b_2 + \dots + b_{1013} > 0$. Index tvaru $2j+1$ je dobrý, pokud každé z 2026 čísel

$$\begin{aligned} & a_{2j+1}, \quad b_{j+1}, \quad b_{j+1} + a_{2j+3}, \quad b_{j+1} + b_{j+2}, \quad \dots, \\ & b_{j+1} + \dots + b_{j+1012} + a_{2j+2025}, \quad b_{j+1} + \dots + b_{j+1013}, \end{aligned}$$

bude nezáporné, kde indexy u a počítáme modulo 2026 a u b modulo 1013. To nastane, když každé z 1013 čísel

$$b_{j+1}, \quad b_{j+1} + b_{j+2}, \quad \dots, \quad b_{j+1} + b_{j+2} + \dots + b_{1013} + b_1 + \dots + b_j$$

je nezáporné, jelikož přičtením kladného čísla se nezápornost zachová.

Nechť m je nejmenší index, pro který je součet $b_1 + b_2 + \dots + b_m$ minimální. Pokud by byl tento součet nezáporný, tak by byl index 1 dobrý a platilo by požadované $n(\mathcal{P}) \geq 1$. Předpokládejme, že je součet $b_1 + b_2 + \dots + b_m$ záporný. Ukážeme, že index $2m + 1$ je dobrý.

Pokud by pro nějaké celé číslo k splňující $m+1 \leq k \leq 1013$ platilo $b_{m+1} + \dots + b_k < 0$, pak

$$b_1 + b_2 + \dots + b_m + b_{m+1} + \dots + b_k < b_1 + b_2 + \dots + b_m,$$

což je ve sporu s definicí m . Pro každé k splňující $m+1 \leq k \leq 1013$ tak platí $b_{m+1} + \dots + b_k \geq 0$.

Dále ukážeme, že platí $b_{m+1} + \dots + b_{1013} + b_1 + \dots + b_k \geq 0$ pro každé celé číslo k splňující $1 \leq k \leq m$. Platí

$$b_{m+1} + \dots + b_{1013} + b_1 + \dots + b_k \geq b_{m+1} + \dots + b_{1013} + b_1 + \dots + b_m > 0,$$

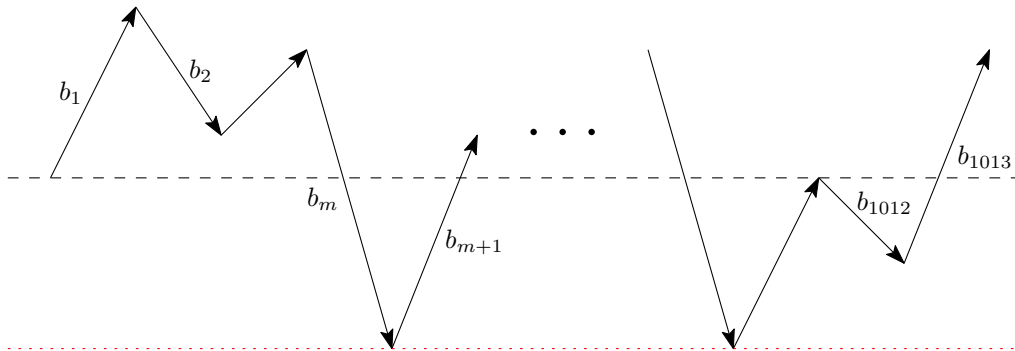
kde jsme využili, že pro každé k platí $b_1 + \dots + b_k \geq b_1 + \dots + b_m$.

Ukázali jsme tak, že každé z čísel

$$b_{m+1}, \quad b_{m+1} + b_{m+2}, \quad \dots, \quad b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_{1013} + b_1 + \dots + b_m$$

je nezáporné. Index $2m + 1$ je proto dobrý a i v tomto případě platí $n(\mathcal{P}) \geq 1$. Hodnoty $n(\mathcal{P}) = 1$ lze dosáhnout volbou $a_1 = 2026, a_2 = 1, a_3 = 2, \dots, a_{2026} = 2025$, kde pro každé $i \in \{2, 3, \dots, 2026\}$ je $a_i - a_{i+1} = -1$, tj. i není dobrý index. Jediným dobrým indexem tak může být 1. Takže nejmenší možná hodnota $n(\mathcal{P})$ je 1.

KOMENTÁŘ. Řešení si můžeme představit i graficky. Budeme dělat kroky o b_i nahoru, je-li $b_i \geq 0$, nebo o $|b_i|$ dolů, je-li $b_i < 0$. Platí $b_1 + b_2 + \dots + b_{1013} > 0$, proto hodnota na konci je nad černou čárkovanou čarou. Index m označuje první krok, který nás dostane na nejnižší hodnotu (červená tečkovaná čára). Cílem je ukázat, že pokud začneme s b_{m+1} (místo b_1) a po b_{1013} budeme pokračovat s $b_1, \dots, b_m$, tak tato posloupnost nikdy neklesne pod počáteční hodnotu.



6. Necht $ABCDEF$ je šestiúhelník vepsaný do kružnice se středem O , jehož každé dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné. Přímký AB , CD a EF vymezují trojúhelník Δ_1 a přímký BC , DE a FA vymezují trojúhelník Δ_2 . Dokažte, že středy kružnic opsaných trojúhelníkům Δ_1 a Δ_2 jsou souměrně sdružené podle bodu O . (Michal Janík)

ŘEŠENÍ. Necht O_1 a O_2 jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům Δ_1 a Δ_2 . Označme p_1 , p_2 a p kolmice k AB procházející po řadě body O_1 , O_2 a O . Ukážeme, že přímký p_1 a p_2 jsou souměrně sdružené podle přímký p .

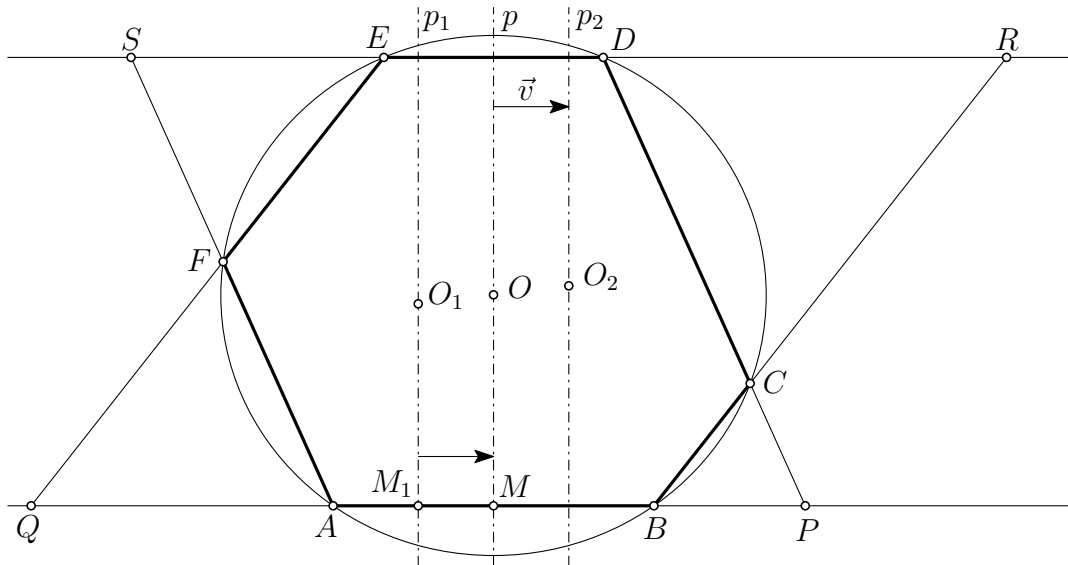
Označme P a Q průsečíky přímký AB po řadě s přímkou CD a přímkou EF . Podobně označme R a S průsečíky přímký DE po řadě s přímkou BC a přímkou FA . Přímký p_1 je osou úsečky PQ , jelikož je kolmá k tětivě PQ a prochází středem kružnice opsané trojúhelníku Δ_1 . Podobně p_2 je osou úsečky RS . Dále p je společnou osou úseček AB a DE , jelikož tyto úsečky jsou rovnoběžnými tětivami zadané kružnice se středem O a p je k těmto úsečkám kolmá.

Pomocí vektorů dokážeme, že přímký p_1 a p_2 jsou souměrně sdružené podle p . Označme M_1 střed úsečky PQ a M střed úsečky AB . Protože přímký p_1 a p jsou po řadě osami úseček PQ a AB , bod M_1 leží na p_1 a bod M leží na p . Potom $\overrightarrow{M_1M}$ je vektor posunutí zobrazujícího přímký p_1 na p , který je současně kolmý k přímce p . Tento vektor můžeme vyjádřit následovně

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M} &= \overrightarrow{M_1P} - \overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{QP}}{2} - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP}) = \\ &= \frac{\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}}{2} - \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{BP} \right) = \frac{\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{BP}}{2}.\end{aligned}$$

Analogicky vyjádříme vektor posunutí zobrazujícího p na p_2 , který je kolmý na p , a to

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{DR} - \overrightarrow{SE}}{2}.$$



Abychom ukázali, že p_1 a p_2 jsou souměrně sdružené podle p , potřebujeme dokázat, že $\vec{v}$ má stejnou velikost a orientaci jako $\overrightarrow{M_1M}$. Stačí nám tak ukázat, že platí $\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{DR} - \overrightarrow{SE}$. Všimněme si, že $APDS$ a $QBRE$ jsou rovnoběžníky. Platí tak

$$\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{ER} - \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{DR} - \overrightarrow{SE},$$

jak jsme chtěli dokázat. Přímký p_1 a p_2 jsou tedy souměrně sdružené podle přímky p .

Jelikož jsou p_1 a p_2 souměrně sdružené podle přímky p , jsou sdružené i podle bodu O , který na přímce p leží. Necht q_1 , q_2 a q jsou kolmice k BC procházející po řadě body O_1 , O_2 a O . Analogicky dokážeme, že přímky q_1 a q_2 jsou souměrně sdružené podle bodu O . Jelikož O_1 je průsečík přímek p_1 , q_1 a O_2 je průsečík přímek p_2 , q_2 , jsou i body O_1 a O_2 souměrně sdružené podle bodu O .