III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Přirozené číslo nazveme *vlnité*, pokud je zapsáno právě dvěma různými číslicemi, které se pravidelně střídají. (Např. čísla 4343 a 43434 jsou vlnitá, čísla 4334 a 43134 nikoli.)

Určete všechny dvojice pětimístných vlnitých čísel takových, že jejich součet je 64645, jejich rozdíl je vlnité číslo a v zápisech čísel a jejich rozdílu je použito šest navzájem různých číslic. (*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Zadání můžeme zapsat ve formě algebrogramu s navzájem různými číslicemi a, b, c, d, e, f:

$$\begin{array}{rccccc} & a & b & a & b & a \\ + & c & d & c & d & c \\ \hline & 6 & 4 & 6 & 4 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rccccc} & a & b & a & b & a \\ - & c & d & c & d & c \\ \hline & e & f & e & f & e \end{array}$$

Hledaná čísla jsou pětimístná, tedy číslice a a c jsou nenulové. Číslice a a c jsou navzájem různé, tedy také číslice e je nenulová. Rozdílem je kladné číslo, tedy

$$a > c.$$

Výsledkem rozdílu je vlnité číslo, tedy při rozdílech číslic nedochází k přechodům přes desítku (kdyby tomu tak bylo, pak by se lišily číslice na místech jednotek a stovek). Proto je rozdíl pětimístné číslo a platí

$$b > d.$$

Výsledkem součtu je pětimístné číslo, tedy u součtu číslic a a c nedochází k přechodu přes desítku. Číslice ve výsledku na místech jednotek a stovek se liší, tedy u součtu číslic b a d k přechodu přes desítku dochází. Z číslic v zápise součtu plyne

$$a + c = 5, \quad b + d = 14.$$

Všem uvedeným podmínkám vyhovují následující dvojice číslic a, c a b, d; pro každou dvojici dopočítáme jejich rozdíl:

a	4	3
c	1	2
e	3	1

b	9	8
d	5	6
f	4	2

Aby v zápisech hledaných čísel a jejich rozdílu byly navzájem různé číslice, lze kombinovat buď první možnost z první tabulky s druhou ze druhé, nebo druhou možnost z první tabulky s první ze druhé. Všechny dvojice vyhovujících čísel jsou:

$$48484,\ 16161 \quad \text{a} \quad 39393,\ 25252.$$

Hodnocení. 2 body za vhodný zápis a formulaci vztahů mezi číslicemi; po 1 bodu za každou vyhovující dvojici čísel; 2 body za úplnost rozboru možností a kvalitu komentáře.

Z9–III–2

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a bod E tak, že platí:

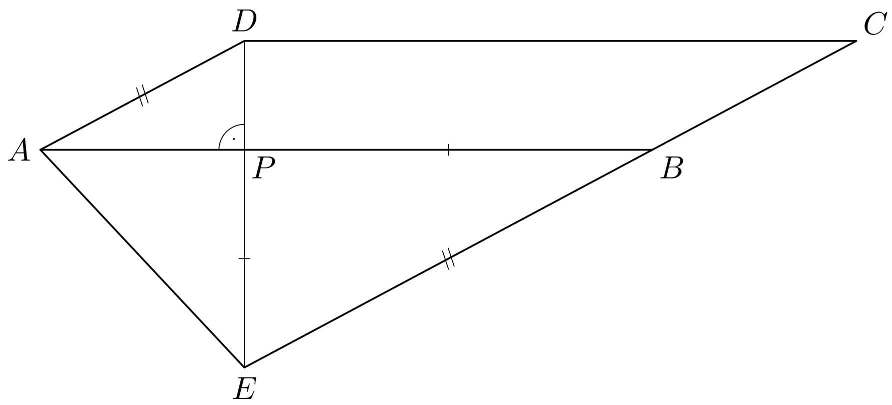
- délka strany AD je 17 cm,
- bod E je průsečíkem polopřímky CB a kolmice k přímce AB jdoucí bodem D,
- délka úsečky DE je 24 cm,
- obsahy rovnoběžníku $ABCD$ a trojúhelníku ABE jsou stejné.

Vypočtěte délku strany AB. (*M. Macko*)

Možné řešení. Ze druhé podmínky plyne, že body D a E leží v opačných polorovinách určených přímkou AB. Průsečík úseček AB a DE označíme P.

Protože $ABCD$ je rovnoběžník, jsou přímky BC a AD rovnoběžné. Bod E leží na polopřímce CB, proto také přímky BE a AD jsou rovnoběžné. Odtud plyne, že trojúhelníky APD a BPE jsou podobné (např. podle střídavých úhlů u odpovídajících vrcholů).

Rovnoběžník $ABCD$ a trojúhelník ABE mají stejný obsah a společnou stranu AB. Proto jsou délky odpovídajících výšek PD a PE v poměru $1 : 2$, a to je také koeficient podobnosti trojúhelníků APD a BPE.



Délka úsečky DE je 24 cm a poměr délek úseček PD a PE je $1 : 2$. Odtud plyne, že délky těchto úseček jsou $|DP| = 8\,\text{cm}$ a $|PE| = 16\,\text{cm}$.

Délka úsečky AD je 17 cm a trojúhelník APD je pravoúhlý. Podle Pythagorovy věty platí

$$|AP|^2 = |AD|^2 - |DP|^2 = 17^2 - 8^2 = 225\,(\text{cm}^2).$$

Tedy délka úsečky AP je 15 cm. Odtud a z podobnosti trojúhelníků APD a BPE plyne $|PB| = 2 \cdot |AP| = 30\,\text{cm}$.

Délka strany AB je

$$|AB| = |AP| + |PB| = 45\,\text{cm}.$$

Hodnocení. 1 bod za poznatek o polohách bodů D a E, příp. náčrtek; 1 bod za podobnost trojúhelníků APD a BPE; 1 bod za koeficient této podobnosti; po 1 bodu za velikosti úseček DP, AP a AB.

Z9–III–3

Adrián je třikrát mladší než Karel a Karel je o deset let mladší než Emil. Až bude Adriánovi tolik let, kolik je nyní Karlovi, bude jeden z této trojice dvakrát starší než jiný.

Kolik let může být Adriánovi, Karlovi a Emilovi? Určete všechny možnosti.

(*M. Petrová*)

Možné řešení. Označme současné věky účinkujících počátečními písmeny jejich jmen. Podle zadání je nejmladší Adrián, nejstarší Emil a platí $A = 1/3K$ a $K = E - 10$. Věky Karla a Emila vyjádřené pomocí věku nejmladšího jsou

$$K = 3A \quad \text{a} \quad E = 3A + 10.$$

Adriánovi bude tolik, kolik je nyní Karlovi, za $K - A = 2A$ let. Za tuto dobu budou věky Adriána, Karla a Emila následující:

$$A' = 3A, \quad K' = 5A, \quad E' = 5A + 10.$$

Musíme diskutovat tyto tři možnosti:

a) Karel bude dvakrát starší než Adrián:

$$K' = 2A' \iff 5A = 6A \iff A = 0.$$

Tento výsledek formálně vyhovuje, ale věcně smysl nedává ($A = K = 0$).

b) Emil bude dvakrát starší než Karel:

$$E' = 2K' \iff 5A + 10 = 10A \iff A = 2.$$

Odtud dále plyne $K = 6$ a $E = 16$.

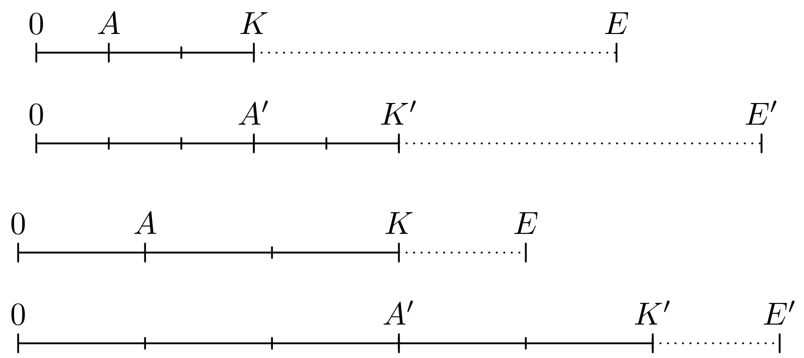
c) Emil bude dvakrát starší než Adrián:

$$E' = 2A' \iff 5A + 10 = 6A \iff A = 10.$$

Odtud dále plyne $K = 30$ a $E = 40$.

Adriánovi, Karlovi a Emilovi může být buď 2, 6 a 16 let, nebo 10, 30 a 40 let.

Poznámka. Předchozí úvahy pro případ b), resp. c) lze znázornit následovně:



Hodnocení. 1 bod za rozbor či znázornění vztahů ze zadání; 1 bod za rozdělení možností; po 1 bodu za každý vyhovující výsledek; 2 body za srozumitelnost úprav a kvalitu komentáře.

Z9–III–4

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že bod D leží na ose úsečky BC a vzdálenost bodu A od přímky CD je stejná jako vzdálenost bodu C od přímky AD.

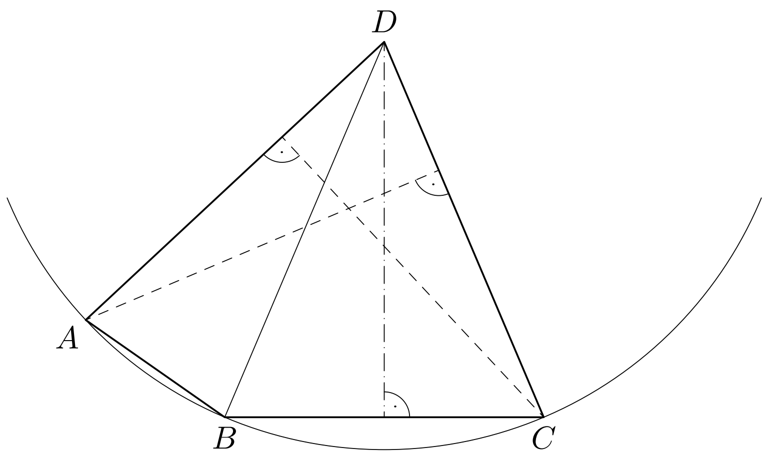
Dokažte, že čtyřúhelníku $ABCD$ nelze opsat kružnici. (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Bod D leží na ose úsečky BC, tedy úsečky BD a CD jsou shodné (všechny body na ose úsečky mají od jejích krajních bodů stejnou vzdálenost).

Vzdálenost bodu A od přímky CD odpovídá velikosti výšky trojúhelníku ACD na stranu CD, vzdálenost bodu C od přímky AD odpovídá velikosti výšky téhož trojúhelníku na stranu AD. Tyto vzdálenosti jsou stejné, tedy úsečky AD a CD jsou shodné (obsah trojúhelníku je polovinou součinu velikostí strany a odpovídající výšky).

Dohromady dostáváme, že úsečky AD, BD a CD jsou navzájem shodné. Body A, B a C proto leží na kružnici se středem D.

Kružnice opsaná čtyřúhelníku $ABCD$ je kružnicí opsanou každému trojúhelníku určeného třemi z jeho čtyř vrcholů. Ale kružnice opsaná trojúhelníku ABC neprochází bodem D, neboť ten je jejím středem. Proto čtyřúhelníku $ABCD$ nelze opsat kružnici.



Poznámka. Místo kružnic samotných se lze zaměřit na jejich středy: Pokud lze čtyřúhelníku $ABCD$ opsat kružnici, pak její střed splývá se středem kružnice opsané každému trojúhelníku určeného třemi z jeho čtyř vrcholů. Střed kružnice opsané trojúhelníku BCD leží na ose úsečky BC mimo vrchol D, střed kružnice opsané trojúhelníku ABC je v bodě D. Proto čtyřúhelníku $ABCD$ nelze opsat kružnici.

Hodnocení. 1 bod za shodnost úseček BD a CD; 2 body za shodnost úseček AD a CD; 1 bod za poznatek, že D je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC; 2 body za kvalitu komentáře.