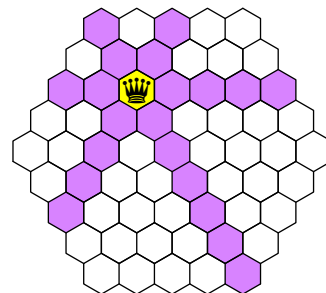


## Úlohy krajského kola kategorie B

1. Každé hraně čtyřstěnu přiřadíme kladné reálné číslo tak, aby některé dvě stěny měly stejný *součet* čísel svých tří hran a zbývající dvě stěny měly stejný *součin* čísel svých tří hran. Kolik nejvýše z šesti čísel přiřazených hranám může být různých?

2. Hrací plán na obrázku se skládá z 61 shodných pravidelných šestiúhelníků. Na každém poli plánu může stát nejvýše jedna dáma. Dáma ohrožuje pole, jejichž středy leží na osách stran šestiúhelníku, na kterém stojí (na obrázku jsou vybarvena). Kolik nejvýše dam lze na plán umístit tak, aby se žádné dvě neohrožovaly?



3. Do půlkružnice s průměrem  $AB$  je vepsán čtyřúhelník  $ABCD$ . Dokažte, že střed spojnice středů jeho úhlopříček je stejně vzdálený od bodu  $C$  jako od bodu  $D$ .

4. Dělitel  $d$  přirozeného čísla  $n > 1$  se nazývá *odpinknutelný*, pokud součin všech ostatních kladných dělitelů čísla  $n$  je druhou mocninou přirozeného čísla.

- Je pravda, že každé přirozené číslo  $n > 1$  má odpinknutelného dělitele?
- Je pravda, že každé přirozené číslo  $d > 1$  je odpinknutelným dělitelem některého přirozeného čísla?

Krajské kolo kategorie B se koná

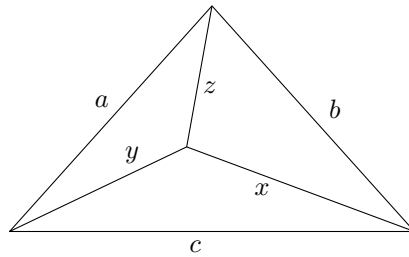
**v úterý 31. března 2026**

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Každé hraně čtyřstěnu přiřadíme kladné reálné číslo tak, aby některé dvě stěny měly stejný součet čísel svých tří hran a zbývající dvě stěny měly stejný součin čísel svých tří hran. Kolik nejvýše z šesti čísel přiřazených hranám může být různých?

(Tomáš Bárta)

**ŘEŠENÍ.** Dokážeme, že odpověď je 4. Každé dvě stěny čtyřstěnu mají jednu společnou hranu a naopak každá hrana je obsažena ve dvou stěnách. Označme čísla přiřazená hranám čtyřstěnu  $a, b, c, x, y$  a  $z$  jako na obrázku tak, že  $a$  přísluší hraně společné stěnám se stejným součtem, zatímco  $x$  přísluší protější hraně, kterou sdílí stěny se stejným součinem.



Stěny se stejným součtem mají tedy hrany s čísly  $(a, b, c)$  a  $(a, y, z)$ . Ze shodnosti součtů dostáváme

$$b + c = y + z. \quad (1)$$

Stěny se stejným součinem mají společnou hranu  $x$  a jejich zbývající hrany jsou  $(b, z)$  a  $(c, y)$ , neboli

$$bz = cy. \quad (2)$$

Z rovnice (1) vyjádříme  $c = y + z - b$  a dosadíme do (2)

$$\begin{aligned} bz &= (y + z - b)y, \\ 0 &= y^2 + zy - by - bz, \\ 0 &= (y - b)(y + z). \end{aligned} \quad (3)$$

Protože obě čísla  $y, z$  jsou kladná, je  $y + z > 0$ , a musí tak platit  $y = b$ . Dosazením do (1) dostaneme  $z = c$ . Uspořádaná šestice přiřazených čísel je tedy ve tvaru

$$(a, b, c, x, y, z) = (a, b, c, x, b, c).$$

Snadno ověříme, že každá taková šestice splňuje podmínky zadání a všechna čtyři čísla  $a, b, c, x$  můžeme volit libovolně, lze je tedy zvolit navzájem různá. Nejvýše tedy mohou být různá čtyři čísla.

**POZNÁMKA.** Nevšimneme-li si hned přímé úpravy rovnice (3) na součinnový tvar, není nic ztraceno. Neznámé  $b$  a  $z$  vystupují ve výrazu na pravé straně jen v první mocnině, takže můžeme například vytknout  $b$

$$\begin{aligned} 0 &= y^2 + zy - by - bz, \\ b(y + z) &= y^2 + zy = y(y + z). \end{aligned}$$

Pak zkrátíme kladným výrazem  $y + z$  a dostaneme  $b = y$  jako v řešení výše.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních postupujících podle vzorového řešení ohodnoťte kroky následovně:

A0. Správná odpověď bez zdůvodnění: 0 bodů

A1. Sestavení rovnic vyjadřujících podmínky zadání: 2 body

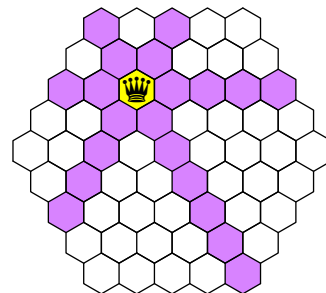
A2. Redukce soustavy dvou rovnic na jednu rovnici: 1 bod

A3. Důkaz relací ekvivalentních  $b = y$  a  $c = z$ : 3 body

A4. Ověření, že jakákoliv šestice splňující relace z předchozího bodu splňuje zadání, nebo nezávislé nalezení nějaké funkční šestice, která obsahuje právě 4 různá čísla (v obou případech stačí tvrzení, že to tak je, další výpočty nejsou potřeba): 1 bod

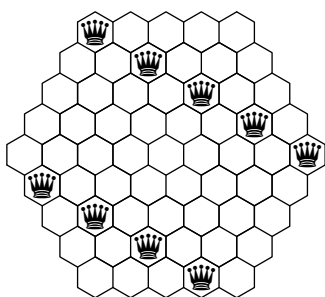
Celkem udělte  $A1 + \max(A2, A3) + A4$  bodů.

2. Hrací plán na obrázku se skládá z 61 shodných pravidelných šestiúhelníků. Na každém poli plánu může stát nejvýše jedna dáma. Dáma ohrožuje pole, jejichž středy leží na osách stran šestiúhelníku, na kterém stojí (na obrázku jsou vybarvena). Kolik nejvýše dam lze na plán umístit tak, aby se žádné dvě neohrožovaly? (Jozef Rajník)



ŘEŠENÍ. Na plán lze rozmístit nejvýše 9 dam, které se navzájem neohrožují.

Pole hracího plánu na obrázku ze zadání lze rozdělit na 9 vodorovných řad. V každé z nich může stát nejvýše jedna dáma, jinak by se některé dvě ohrožovaly. Dam tedy nemůže být více než 9 a obrázek níže ukazuje možné rozmístění tohoto počtu dam, v němž se žádné dvě neohrožují.



JINÉ ŘEŠENÍ. Ukážeme jiný důkaz tvrzení, že dam nemůže být více než 9. Rozborem možností (vzhledem k symetrii plánu je jich nejvýše devět) lze snadno ověřit, že každá dáma ohrožuje alespoň 16 dalších polí kromě toho, na kterém stojí. Dále si všimněme, že jedno pole může být ohroženo nejvýše třemi dámami – nejvýše jednou z každého ze tří směrů šestiúhelníkové sítě (dvě dámy ve stejném směru by se totiž ohrožovaly).

Předpokládejme, že na plánu stojí alespoň 10 dam, které se navzájem neohrožují. Neobsazených polí je tak nejvýše  $61 - 10 = 51$ , jelikož platí  $3 \cdot 51 = 153 < 160 = 16 \cdot 10$ , některé z neobsazených polí musí být ohroženo alespoň čtyřikrát, tedy alespoň čtyřmi dámami. To je ale spor s pozorováním výše. Proto může být na plánu za daných podmínek nejvýše 9 dam.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních ohodnoťte kroky následovně:

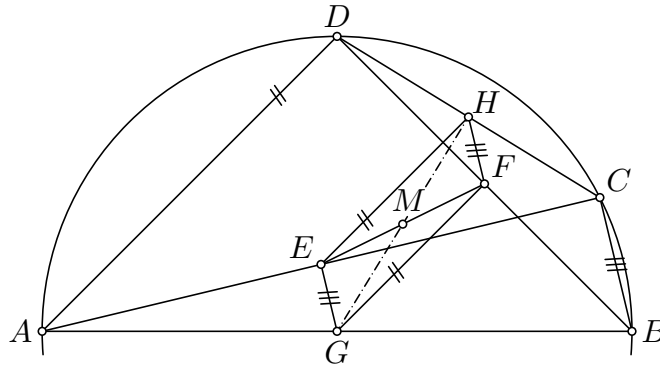
- A0. Správná odpověď bez zdůvodnění: 0 bodů
- A1. Důkaz, že není možné umístit více než 9 dam: 3 body
- A2. Důkaz, že není možné umístit více než 10 dam: 2 body
- A3. Důkaz, že není možné umístit více než 11 dam: 1 bod
- A4. Úvaha, kterou lze použít pro horní odhad (např. rozdělení na řady, určení minimálního počtu polí ohrožených jednou dámou atp.): 1 bod
- B1. Nalezení rozmístění 9 neohrožujících se dam: 3 body
- B2. Nalezení rozmístění 8 neohrožujících se dam: 2 body
- B3. Nalezení rozmístění 7 neohrožujících se dam: 1 bod

Celkem udělte  $\max(A1, A2, A3, A4) + \max(B1, B2, B3)$  bodů.

3. Do půlkružnice s průměrem  $AB$  je vepsán čtyřúhelník  $ABCD$ . Dokažte, že střed spojnice středů jeho úhlopříček je stejně vzdálený od bodu  $C$  jako od bodu  $D$ .

(Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Označme  $G$  střed průměru  $AB$  – tedy střed kružnice opsané čtyřúhelníku  $ABCD$ ,  $E$  střed jeho úhlopříčky  $AC$ ,  $F$  střed jeho úhlopříčky  $BD$  a  $H$  střed jeho strany  $CD$ . Označíme-li nakonec  $M$  střed úsečky  $EF$ , máme dokázat, že  $|MC| = |MD|$ .



V trojúhelníku  $ABC$  je  $GE$  střední příčka, platí tak  $GE \parallel BC$  a  $|GE| = \frac{1}{2}|BC|$ . Podobně  $FH$  je střední příčka v trojúhelníku  $DBC$  a platí tak  $FH \parallel BC$  a  $|FH| = \frac{1}{2}|BC|$ . Zároveň polopřímka  $GE$  a  $FH$  stejně jako polopřímka  $BC$  leží v té polorovině určené přímkou  $AB$ , která obsahuje body  $C$  a  $D$ , takže orientujeme-li úsečku  $AB$  vodorovně a půlkružnici nad ní (jako na obrázku), leží  $E$  nad  $G$  a  $H$  nad  $F$ . Čtyřúhelník  $GFHE$  (jehož strany se podle předchozí věty neprotínají) je tedy rovnoběžník, protože jeho protější strany  $GE$  a  $FH$  jsou rovnoběžné a stejně dlouhé. Bod  $M$  je středem úhlopříčky  $EF$  tohoto rovnoběžníku. Protože se úhlopříčky v rovnoběžníku půlí, je  $M$  středem i druhé úhlopříčky  $GH$ .

Nyní se zaměříme na trojúhelník  $GCD$ . Protože body  $C$  a  $D$  leží na kružnici se středem  $G$ , platí  $|GC| = |GD|$ , trojúhelník  $GCD$  je tedy rovnoramenný. Bod  $H$  je středem jeho základny, a úsečka  $HG$  je proto jeho výškou, takže přímka  $HG$  je osou úsečky  $CD$ . Všechny body přímky  $HG$  mají proto stejnou vzdálenost od bodů  $C$  a  $D$ , speciálně i bod  $M$ , což jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKA. V řešení jsme v podstatě dokázali tzv. *Varignonovu větu*: Středy stran libovolného čtyřúhelníku (i takového, jehož strany se mohou protínat) tvoří vrcholy rovnoběžníku. Konkrétně šlo o „čtyřúhelník“  $ABDC$ .\*

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních postupujících podle vzorového řešení ohodnoťte kroky následovně (body jsou označeny stejně jako ve vzorovém řešení):

- A1. Pozorování, že  $FG$  je střední příčka v trojúhelníku  $BDA$  a že z toho plyne  $FG \parallel DA$  nebo  $|FG| = \frac{1}{2} \cdot |DA|$  (nebo analogické pozorování pro  $GE$ ,  $EH$  nebo  $HF$ ): 1 bod  
 A2. Důkaz, že  $GFHE$  je rovnoběžník: 3 body  
 A3. Důkaz, že  $M$  je středem úsečky  $GH$ : 4 body  
 A4. Dokončení řešení za předpokladu, že bod  $M$  leží na úsečce  $GH$ : 2 body

Celkem udělte  $\max(A1, A2, A3) + A4$  bodů.

\* Strany čtyřúhelníku  $ABDC$  se protínají, což v důkazu nijak nevádí, ale takové útvary se většinou čtyřúhelníky nenazývají.

4. Dělitel  $d$  přirozeného čísla  $n > 1$  se nazývá odpinknutelný, pokud součin všech ostatních kladných dělitelů čísla  $n$  je druhou mocninou přirozeného čísla.
- a) Je pravda, že každé přirozené číslo  $n > 1$  má odpinknutelného dělitele?
- b) Je pravda, že každé přirozené číslo  $d > 1$  je odpinknutelným dělitelem některého přirozeného čísla? (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Ukážeme, že správná odpověď na obě otázky je „Ano“.

Pro část a) uvažujme součin všech dělitelů daného přirozeného čísla  $n > 1$ . Ten má tvar

$$S = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k},$$

kde  $p_1, p_2, \dots, p_k$  jsou všechny prvočinitele  $n$  a  $a_1, \dots, a_k$  nějaká přirozená čísla. Protože platí  $n > 1$ , tento rozklad obsahuje alespoň jedno prvočíslo v kladné mocnině.

Nyní zkonstruujeme odpinknutelný dělitel  $d$  čísla  $n$  jako součin těch  $p_i$ , pro která je exponent  $a_i$  lichý. Pokud jsou všechny exponenty  $a_i$  sudé, položíme  $d = 1$ .

Takto definovaný součin  $d$  je jistě dělitelem  $n$ , protože každé prvočíslo v součinu  $d$  je prvočinitelem  $n$ . Pokud součin  $S$  vydělíme součinem  $d$ , exponent u každého prvočísla  $p_i$  se zmenší o 1 právě tehdy, když byl exponent  $a_i$  lichý, a zůstane nezměněn, když byl exponent  $a_i$  sudý. Ve výsledném výrazu  $S/d$  tedy mají všechna prvočísla sudé exponenty, takže součin  $S/d$  je druhou mocninou přirozeného čísla.

Pro vyřešení části b) dokážeme, že každé přirozené číslo  $d > 1$  je odpinknutelným dělitelem čísla  $d^2$ . V řešení druhé úlohy domácího kola (B-75-I-2) jsme ukázali párování všech kladných dělitelů  $d^2$  kromě  $d$ , kde součin čísel v každém páru je  $d^2$ , což je druhá mocnina, takže i součin všech dělitelů  $d^2$  vyjma  $d$  je druhá mocnina, což jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKA. Obecněji platí, že každé přirozené číslo  $d > 1$  je odpinknutelným dělitelem čísla  $n = d^{2l}$ , kde  $l$  je liché. Dokážeme to opět s využitím párování výše pro číslo  $n = (d^l)^2$ . Součin všech jeho kladných dělitelů je nějaká druhá mocnina  $k^2$  (vzniklá ze součinů všech spárovaných dělitelů) krát  $d^l$ . Vydělením takového součinu číslem  $d$  dostaneme

$$k^2 d^{l-1} = \left( k d^{\frac{l-1}{2}} \right)^2,$$

což je druhá mocnina přirozeného čísla, protože  $l$  je liché číslo.

POZNÁMKA. Bez důkazu uvedeme některá tvrzení, pomocí nichž lze vyřešit část b) bez nápadu, že  $d$  je odpinknutelným dělitelem  $d^{2l}$  pro nějaké liché  $l$ .

Pro dané číslo

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

lze vyjádřit součin jeho kladných dělitelů. Vyjde, že v tomto součinu se vyskytují jen prvočísla  $p_1, \dots, p_k$  a že prvočíslo  $p_i$  v něm má exponent

$$b_i = \frac{1}{2} a_i \cdot (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1).$$

Následně lze ukázat, že tento exponent  $b_i$  je lichý právě tehdy, když v původním čísle  $n$  byly všechny ostatní exponenty  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k$  sudé a navíc exponent  $a_i$  dával zbytek 1 nebo 2 po dělení čtyřmi.

Pomocí toho lze pro libovolné  $d$  dané svým prvočíselným rozkladem

$$d = q_1^{c_1} q_2^{c_2} \cdots q_l^{c_l}$$

zkonstruovat číslo  $n = q_1^{e_1} q_2^{e_2} \cdots q_l^{e_l}$ , které má odpinknutelného dělitele  $d$ , a to takto: Pokud je exponent  $c_i$  u  $q_i$  v rozkladu  $d$  lichý, zvolíme za  $e_i$  libovolné číslo  $e_i > c_i$ , které dává po dělení čtyřmi zbytek 2. Pokud je naopak exponent  $c_i$  u  $q_i$  v  $d$  sudý, zvolíme za  $e_i$  libovolné číslo  $e_i > c_i$ , které dává po dělení čtyřmi zbytek 0 (tj. je dělitelné čtyřmi). Tím zajistíme, že v součinu dětelů čísla  $n$  bude jednak exponent u  $q_i$  větší než  $c_i$  a jednak bude lichý právě tehdy, pokud byl exponent  $c_i$  lichý. Po vydělení číslem  $d$  budou všechny exponenty sudé, a tedy  $d$  bude odpinknutelným dělitelem čísla  $n$ .

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 za část a) a 4 za část b). V neúplných řešeních ohodnotte kroky následovně:

- A1. Formulace platné hypotézy, že nějaké  $d(n)$  (může být dáno vzorcem, algoritmem, nebo jiným korektním popisem) je odpinknutelným dělitelem  $n$  pro každé přirozené  $n > 1$ : 1 bod
  - A2. Důkaz hypotézy a dokončení části a): 1 bod
  - B1. Formulace platné hypotézy, že nějaké  $n(d)$  (může být dáno vzorcem, algoritmem, nebo jiným korektním popisem) má odpinknutelného dělitele  $d$  pro každé přirozené  $d > 1$ : 2 body
  - B2. Důkaz hypotézy a dokončení části b): 2 body
  - C1. Formulace alespoň jedné části zadání pomocí prvočíselného rozkladu a parity exponentů: 1 bod
- Celkem udělte  $\max(C1, A1 + A2 + B1 + B2)$  bodů.