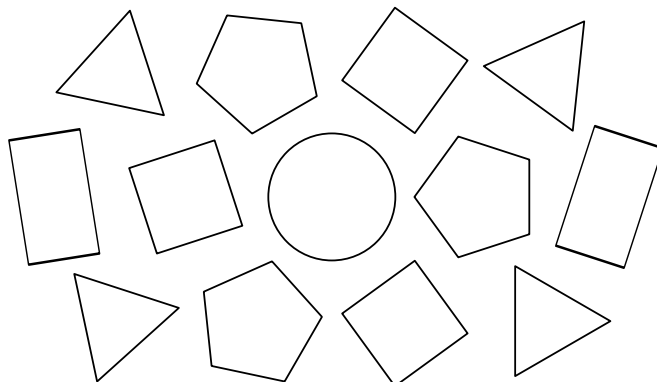


II. kolo kategorie Z5

Z5–II–1

Na obrázku je třináct geometrických útvarů, z nichž některé jsou stejné. Do každého útvaru vepište jedno z čísel od 1 do 9 tak, aby ve stejných útvarech byla stejná čísla a v různých různá.

Jaký největší a jaký nejmenší může být součet čísel v útvarech? (M. Smitková)



Možné řešení. Na obrázku jsou útvary pěti druhů, a to 4 trojúhelníky, 3 čtverce, 3 pětiúhelníky, 2 obdélníky a 1 kruh.

Součet vepsaných čísel je největší možný, pokud v útvarech, kterých je víc, jsou větší čísla. Když vepíšeme číslo 9 do trojúhelníků, číslo 8 do čtverců, číslo 7 do pětiúhelníků, číslo 6 do obdélníků a číslo 5 do kruhu, dostaneme součet

$$4 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 5 = 98.$$

Součet vepsaných čísel je nejmenší možný, pokud v útvarech, kterých je víc, jsou menší čísla. Když vepíšeme 1 do trojúhelníků, 2 do čtverců, 3 do pětiúhelníků, 4 do obdélníků a 5 do kruhu, dostaneme součet

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 5 = 32.$$

Největší a nejmenší možný součet čísel je 98 a 32.

Hodnocení. 1 bod za výčet druhů útvarů a jejich počtů; 2 body za formulaci myšlenky o přiřazení čísel útvarům; po 1 bodu za každé přiřazení; 1 bod za výsledek.

Z5–II–2

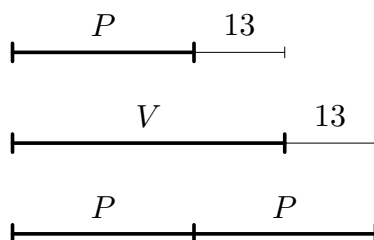
Vašek a Pepík se vážili s jejich psem Brokem. Zjistili, že Brok váží 13 kg, Pepík s Brokem váží stejně jako Vašek a Vašek s Brokem váží dvakrát víc než Pepík.

Určete, kolik váží Vašek a kolik Pepík. (M. Petrová)

Možné řešení. Pepík s Brokem váží stejně jako Vašek, tedy Vašek s Brokem váží stejně jako Pepík a dva Broci. Současně Vašek s Brokem váží stejně jako dva Pepíci, tedy Pepík váží stejně jako dva Broci.

Brok váží 13 kg, tedy Pepík váží $2 \cdot 13 = 26$ (kg) a Vašek váží $26 + 13 = 39$ (kg).

Poznámka. Znázornění předchozích myšlenek pomocí úseček vypadá následovně:

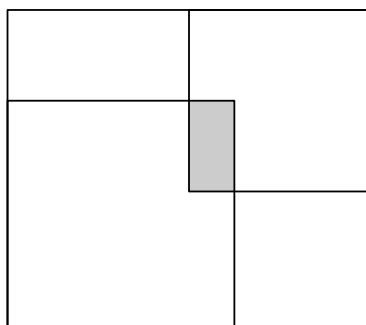


Hodnocení. 3 body za rozbor vztahů a úpravy či znázornění; 2 body za hmotnost jednoho chlapce; 1 bod za hmotnost druhého.

Z5–II–3

V obdélníku o rozměrech 808 cm a 707 cm jsou vloženy dva čtverce se stranami délek 505 cm a 404 cm. Každý ze čtverců přiléhá dvěma stranami ke stranám obdélníku jako na obrázku. Čtverce se překrývají v obdélníku, který je na obrázku vyznačen šedě.

Vypočtěte rozměry šedého obdélníku. (E. Novotná)

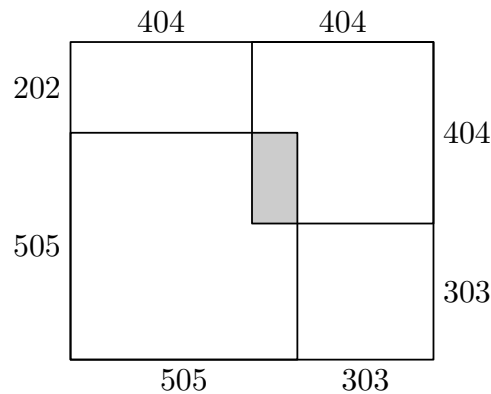


Možné řešení. Součet délek stran vložených čtverců je $505 + 404 = 909$ (cm) a obdélník uvažujeme tak, jak je znázorněn výše, tedy že jeho delší strana je vodorovně.

Delší strana obdélníku je 808 cm, tedy v tomto směru se čtverce překrývají o $909 - 808 = 101$ (cm). Kratší strana obdélníku je 707 cm, tedy v tomto směru se čtverce překrývají o $909 - 707 = 202$ (cm).

Rozměry šedého obdélníku jsou 101 cm a 202 cm.

Poznámky. Doplněné, příp. dopočítané délky úseček na stranách daného obdélníku jsou vyznačeny na obrázku (vše v cm):



Rozměr šedého obdélníku ve vodorovném, resp. ve svislém směru lze vyjádřit jako $505 - 404 = 404 - 303 = 101$ (cm), resp. $505 - 303 = 404 - 202 = 202$ (cm).

Jiné přiřazení délek stran danému obdélníku vede k souměrnému řešení, tedy ke stejné odpovědi (záměna vodorovného a svislého směru).

Hodnocení. 3 body za popis vztahů mezi délkami stran čtverců, daného a šedého obdélníku; 2 body za jeden z rozměrů šedého obdélníku; 1 bod za druhý rozměr šedého obdélníku.

II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

V následujícím sčítacím algebrogramu zastupuje každá z hvězdiček nějakou nenulovou číslici, všechna písmena S zastupují stejnou sudou číslici a všechna písmena L stejnou lichou číslici:

$$\begin{array}{r} S S S \\ L L \\ S \\ \hline * * 3 \end{array}$$

Nahradte písmena a hvězdičky číslicemi tak, aby byl výpočet správný. Najděte všechny možnosti. (E. Novotná)

Možné řešení. Sudé číslice jsou 0, 2, 4, 6 a 8. Z požadavku o nenulovosti číslic výsledku plyne, že na místech S nemůže být 0. Ostatní možnosti postupně rozebereme:

- a) Pro $S = 2$ je součet číslic na místech jednotek $4 + L$. Aby součet končil číslicí 3, musí být $L = 9$ a výpočet vypadá následovně:

$$\begin{array}{r} 2 2 2 \\ 9 9 \\ 2 \\ \hline 3 2 3 \end{array}$$

- b) Pro $S = 4$ je součet číslic na místech jednotek $8 + L$. Aby součet končil číslicí 3, musí být $L = 5$ a výpočet vypadá následovně:

$$\begin{array}{r} 4 4 4 \\ 5 5 \\ 4 \\ \hline 5 0 3 \end{array}$$

- c) Pro $S = 6$ je součet číslic na místech jednotek $12 + L$. Aby součet končil číslicí 3, musí být $L = 1$ a výpočet vypadá následovně:

$$\begin{array}{r} 6 6 6 \\ 1 1 \\ 6 \\ \hline 6 8 3 \end{array}$$

- d) Pro $S = 8$ je součet číslic na místech jednotek $16 + L$. Aby součet končil číslicí 3, musí být $L = 7$ a výpočet vypadá následovně:

$$\begin{array}{r} 8 8 8 \\ 7 7 \\ 8 \\ \hline 9 7 3 \end{array}$$

Kromě případu b) jsou obě číslíce na místech hvězdiček nenulové. Všechny vyhovující možnosti jsou a), c) a d).

Hodnocení. 1 bod za vyloučení možnosti $S = 0$; po 1 bodu za rozbor každé z možností $S = 2, 4, 6, 8$; 1 bod za závěr (výběr vyhovujících možností).

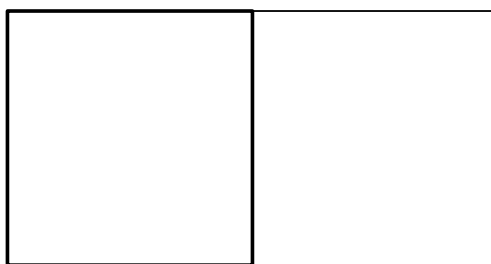
Z6–II–2

Zahrada ve tvaru obdélníku je rozdělena na dvě stejné obdélníkové části. Obvod celé zahrady je 164 metrů a obvod každé ze dvou částí je 110 metrů.

Jaké jsou rozměry zahrady?

(*M. Petrová*)

Možné řešení. Obvod obdélníku sestává ze dvou dvojic protilehlých stran.



Rozdíl obvodů celé zahrady a její poloviny odpovídá dvěma polovinám rozdělené strany zahrady. Tedy jedna strana zahrady měří $164 - 110 = 54$ metrů.

Tyto dvě strany dohromady měří $2 \cdot 54 = 108$ metrů, tedy zbylé dvě strany zahrady dohromady měří $164 - 108 = 56$ metrů. Druhá strana zahrady měří $56 : 2 = 28$ metrů.

Rozměry zahrady jsou 54 a 28 metrů.

Hodnocení. 3 body za jeden rozměr zahrady; 2 body za druhý rozměr zahrady; 1 bod za kvalitu komentáře.

Z6–II–3

Sněhurka a sedm trpaslíků stáli v řadě za sebou tak, že:

- Sněhurka sousedila s jedním vousatým a jedním bezvousým trpaslíkem,
- přesně jeden vousatý trpaslík měl za oba sousedy bezvousé trpaslíky,
- přesně jeden bezvousý trpaslík měl za oba sousedy vousaté trpaslíky,
- přesně tři vousatí trpaslíci stáli bezprostředně za sebou,
- žádní dva bezvousí trpaslíci spolu nesousedili.

Najděte všechna místa v řadě, kde mohla stát Sněhurka, a pro každou možnost zapište jedno pořadí vousatých a bezvousých trpaslíků. Vysvětlete, proč na ostatních místech Sněhurka stát nemohla.

(*E. Novotná*)

Možné řešení. V následujících zápisech budeme značit Sněhurku S , vousaté trpaslíky 1 a bezvousé trpaslíky 0. Podle zadání se v osmimístném pořadí

- vyskytuje buď trojice 0S1, nebo 1S0,
- vyskytuje přesně jedna trojice 010,

- vyskytuje přesně jedna trojice 101,
- vyskytuje přesně jedna trojice 111,
- nevyskytuje dvojice 00.

Pro každé vyhovující pořadí je též opačné pořadí vyhovující; takové dvojice budeme psát na stejný řádek.

- Sněhurka mohla stát na druhém či sedmém místě, viz následující možnosti:

0S111010	010111S0
1S010111	111010S1

- Sněhurka mohla stát na čtvrtém či pátém místě, viz následující možnosti:

111S0101	1010S111
----------	----------

- Z první podmínky plyne, že Sněhurka má z každé strany alespoň jednoho souseda. Tedy Sněhurka nemohla stát ani na prvním, ani na osmém místě.
- Mohla Sněhurka stát na třetím či šestém místě? V takovém případě by z jedné strany od Sněhurky byla dvě volná místa a z druhé strany pět:

S*** *****S**

Někam potřebujeme umístit trojice 010, 101 a 111. Na kratší konec se nevejde žádná trojice, tedy by všechny tři musely být na delším konci. Ale nejúspornější souvislé pořadí, které obsahuje trojice 010, 101 a 111, zabírá šest míst: 111010 či 010111. Tedy Sněhurka nemohla stát ani na třetím, ani na šestém místě.

Hodnocení. Po 1 bodu za každé vyhovující místo Sněhurky a příklad pořadí trpaslíků; 2 body za zdůvodnění, že jinde Sněhurka stát nemohla.

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

V následujících příkladech na písemné odčítání desetinných čísel odpovídají různá písmena různým číslicím, stejná stejným:

$$\begin{array}{r} AB,CD \\ - C,DAB \\ \hline 35,667 \end{array} \quad \begin{array}{r} BC,DA \\ - A,BCD \\ \hline 33,759 \end{array}$$

Nahradte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný. (K. Pazourek)

Možné řešení. U obou menšenců si na místě tisíců doplníme nulu a při odhalování neznámých číslic budeme postupovat od nejnižších řádů (zprava doleva).

Z posledních číslic (řád tisíců) obou výsledků určíme hodnoty B a D . V obou případech počítáme s přechodem přes desítku a vychází $B = 3$ a $D = 1$. Po dosazení vypadají příklady takto:

$$\begin{array}{r} A3,C10 \\ - C,1A3 \\ \hline 35,667 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3C,1A0 \\ - A,3C1 \\ \hline 33,759 \end{array}$$

Z předposlední číslice (řád setin) prvního výsledku určíme, opět s přechodem přes desítku, hodnotu $A = 4$. Po dosazení vypadají příklady takto:

$$\begin{array}{r} 43,C10 \\ - C,143 \\ \hline 35,667 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3C,140 \\ - 4,3C1 \\ \hline 33,759 \end{array}$$

Z předposlední číslice (řád setin) druhého výsledku určíme, opět s přechodem přes desítku, hodnotu $C = 8$. Tak máme určeny všechny neznámé číslice. Po dosazení musíme ověřit, že výpočty sedí i na místech, které jsme do předchozích úvah nezahrnuli:

$$\begin{array}{r} 43,810 \\ - 8,143 \\ \hline 35,667 \end{array} \quad \begin{array}{r} 38,140 \\ - 4,381 \\ \hline 33,759 \end{array}$$

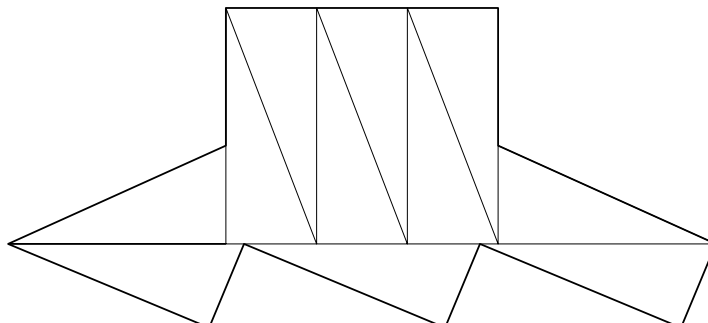
Oba výpočty jsou v pořádku. Uvedené nahrazení písmen číslicemi je jediné možné.

Hodnocení. 2 body za první dvě číslice; 2 body za zbylé dvě číslice; 1 bod za ověření správnosti obou výpočtů; 1 bod za kvalitu komentáře.

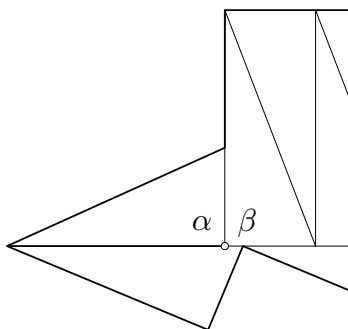
Z7–II–2

Mnohoúhelník na obrázku je složen z 11 shodných nepřekrývajících se trojúhelníků. Kratší strany trojúhelníků měří 10 cm a 24 cm.

Vysvětlete, proč je takové složení možné jen pro pravoúhlé trojúhelníky. Vypočítejte obvod mnohoúhelníku. (K. Pazourek)



Možné řešení. Všechny trojúhelníky jsou shodné, tedy úhly α a β u vyznačeného vrcholu jsou shodné. Součtem úhlů α a β je přímý úhel, tedy oba úhly musí být pravé.



U každého trojúhelníku označíme jeho strany vzestupně podle délek a , b , c . Podle zadání je $a = 10$ cm a $b = 24$ cm. Nejdelší stranu c určíme porovnáním podél vodorovné úhlopříčky mnohoúhelníku. Tuto úsečku tvoří tři krátké strany a a dvě střední strany b , tedy měří

$$3a + 2b = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 24 = 78 \text{ (cm)}.$$

Tatáž úsečka je tvořena třemi dlouhými stranami c , tedy

$$c = 78 : 3 = 26 \text{ (cm)}.$$

Obvod mnohoúhelníku tvoří šest krátkých stran a , tři střední strany b , dvě dlouhé strany c a dvě (svislé) úsečky délek $b - a$. To jsou celkem čtyři krátké, pět středních a dvě dlouhé strany:

$$6a + 3b + 2c + 2(b - a) = 4a + 5b + 2c = 4 \cdot 10 + 5 \cdot 24 + 2 \cdot 26 = 212 \text{ (cm)}.$$

Obvod mnohoúhelníku je 212 cm.

Poznámka. Délka dlouhé strany, tj. přepony pravoúhlého trojúhelníku je odvozena bez Pythagorovy věty, jejíž znalost v této kategorii nepředpokládáme. Pro kontrolu, resp. jako alternativní odvození uvádíme

$$c^2 = 26^2 = 676 = 10^2 + 24^2 = a^2 + b^2.$$

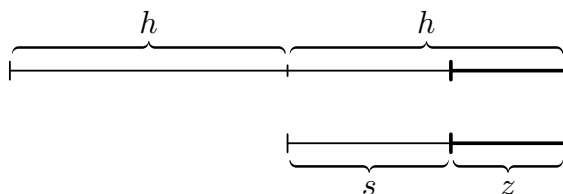
Hodnocení. 2 body za délku strany c ; 2 body za obvod mnohoúhelníku; 2 body za zdůvodnění pravoúhlosti trojúhelníků a kvalitu komentáře.

Z7–II–3

Ráno před otevřením měli v obchodě nějaké hořké čokolády a dvakrát tolik mléčných. Během dne prodali od každého druhu alespoň jednu čokoládu, dohromady 111 kusů, ale nevyprodali všechny. Při večerní uzávěrce zjistili, že v obchodě zbylo stejně hořkých čokolád jako mléčných.

Jaký největší a jaký nejmenší mohl být počet mléčných čokolád před otevřením obchodu? (M. Macko)

Možné řešení. Ráno bylo mléčných čokolád dvakrát tolik co hořkých ($m = 2h$) a večer byly jejich počty stejné (z). Tedy se prodala polovina původního počtu mléčných (h) a navíc ještě stejný počet mléčných jako hořkých (s). V následujícím znázornění odpovídá první řádek mléčným čokoládám a druhý řádek hořkým, tenkou čarou je znázorněn prodej a tlustou čarou zůstatek:



Největší ranní počet mléčných čokolád ($2h$) odpovídá nejmenšímu počtu prodaných hořkých čokolád (s), což odpovídá největšímu večernímu zůstatku (z), a naopak. Oba případy rozebereme:

- Prodala se nejméně jedna hořká čokoláda. Jedné prodané hořké čokoládě odpovídá $111 - 1 = 110$ prodaných mléčných čokolád. V takovém případě byla polovina ranního počtu mléčných čokolád $110 - 1 = 109$, tedy jich původně bylo $2 \cdot 109 = 218$.
- Jak původní počet všech čokolád ($3h$), tak počet prodaných čokolád (111) je dělitelný třemi, tedy také zůstatek musí být dělitelný třemi. Nejmenší možný zůstatek tvoří 3 hořké a 3 mléčné čokolády. V takovém případě byl ranní počet všech čokolád $3 + 3 + 111 = 117$, tedy mléčných čokolád původně bylo $2/3 \cdot 117 = 78$.

Původní počet mléčných čokolád byl nejméně 78 a nejvíce 218.

Jiné řešení. Při stejném značení jako výše lze počet všech prodaných čokolád a počet zbylých čokolád od každého druhu vyjádřit takto:

$$h + 2s = 111, \quad z = h - s. \quad (*)$$

Jak s , tak z jsou podle zadání nenulová čísla. S těmito omezeními lze postupně odhalit nejmenší a největší možné hodnoty h :

s	1	2	...	36	37	...
$h = 111 - 2s$	109	107	...	39	37	...
$z = h - s$	108	106	...	3	0	...

- Největší h odpovídá $s = 1$. V tomto případě je $h = 109$, tedy $2h = 218$.
- Nejmenší h , pro které je z nenulové, odpovídá $s = 36$. V tomto případě je $h = 39$, tedy $2h = 78$.

Původní počet mléčných čokolád byl nejméně 78 a nejvíce 218.

Hodnocení. 1 bod za dílčí poznatky (znázornění, vztahy (*) či podobné úvahy); 2 body za odvození největšího možného počtu mléčných čokolád; 3 body za odvození nejmenšího možného počtu mléčných čokolád.

Řešení založená na zkoušení možností hodnotíte podle úplnosti postupu a komentáře.

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Mirek zapomněl kód k otevření dveří, ale ví, že platí:

- kód je trojmístné číslo dělitelné třemi,
- kód sestává z navzájem různých číslic od 1 do 9,
- součet použitých číslic je menší než 17,
- s číslem 419 nemá kód společnou žádnou číslici,
- s číslem 761 má kód společnou jednu číslici, ale na jiném místě,
- s číslem 361 má kód společnou jednu číslici, ale na jiném místě.

Jaké kódy přicházejí v úvahu? Najděte všechny kódy vyhovující uvedeným podmínkám. (M. Smitková)

Možné řešení. Podle čtvrté podmínky nemá kód žádnou společnou číslici s číslem 419. To spolu s druhou podmínkou znamená, že použitelné číslice jsou 2, 3, 5, 6, 7 a 8.

Podle první a třetí podmínky je ciferný součet kódu dělitelný třemi a menší než 17. Protože nejmenší součet použitelných číslic je $2 + 3 + 5 = 10$, možné ciferné součty jsou 12 a 15. Tyto součty lze z použitelných číslic získat jedinečně takto:

$$2 + 3 + 7 = 12, \quad 2 + 5 + 8 = 15, \quad 2 + 6 + 7 = 15, \quad 3 + 5 + 7 = 15.$$

Z páté a šesté podmínky plyne, že kód buď obsahuje 6 a neobsahuje ani 7, ani 3, nebo neobsahuje 6 a obsahuje 7 i 3. Z vypsaných možností tomuto požadavku vyhovují trojice číslic

$$2, 3, 7 \quad \text{a} \quad 3, 5, 7$$

Podle páté a šesté podmínky také víme, že číslice 3 a 7 nemohou být na prvním místě.

Dohromady zjišťujeme, že všechny možné kódy jsou

$$237, \quad 273, \quad 537, \quad 573.$$

Hodnocení. 1 bod za šest použitelných číslic; 1 bod za dva možné součty číslic; po 1 bodu za každou vyhovující trojici číslic; po 1 bodu za každou vyhovující dvojici kódů.

Řešení založená na zkoušení možností hodnotte podle úplnosti postupu a komentáře.

Z8–II–2

Určete největší trojmístné číslo takové, že po připsání stejné nenulové číslice na jeho začátek i konec vznikne pětimístné číslo, které je 83krát větší než původní číslo. (*P. Bak*)

Možné řešení. Označme hledané trojmístné číslo n a připsanou číslici p . Podle zadání má platit

$$10000p + 10n + p = 83n.$$

To po úpravě vede k podmínce $10001p = 73n$, odkud po vydělení dostáváme

$$n = 137p.$$

Hledáme největší trojmístné číslo n , které je násobkem čísla 137. Takové číslo je $959 = 137 \cdot 7$ (číslo $137 \cdot 8 = 1096$ už není trojmístné).

Největší vyhovující číslo je 959.

Poznámka. Největší možný součin trojmístného čísla s číslem 83 je jistě menší než 83000, tedy připsaná číslice p je nanejvýš 8. Postupně pro $p = 8, 7, \dots$ můžeme úlohu zkoušet dořešit jako algebrogram.

- Pro $p = 8$ postupně (odzadu) odvozujeme:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} a \ b \ c \\ \times \quad 8 \ 3 \\ \hline * \ * \ * \ * \\ * \ * \ * \ * \\ \hline 8 \ a \ b \ c \ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a \ b \ 6 \\ \times \quad 8 \ 3 \\ \hline * \ * \ * \ 8 \\ * \ * \ * \ 8 \\ \hline 8 \ a \ b \ 6 \ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a \ 9 \ 6 \\ \times \quad 8 \ 3 \\ \hline * \ * \ 8 \ 8 \\ * \ * \ 6 \ 8 \\ \hline 8 \ a \ 9 \ 6 \ 8 \end{array} \end{array}$$

Poslední výpočet však dál doplnit nejde (pro žádné doplnění nebude stejná číslice a na místě stovek v činiteli i na místě tisíců ve výsledku).

- Pro $p = 7$ postupně (odzadu) odvozujeme:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} a \ b \ c \\ \times \quad 8 \ 3 \\ \hline * \ * \ * \ * \\ * \ * \ * \ * \\ \hline 7 \ a \ b \ c \ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a \ b \ 9 \\ \times \quad 8 \ 3 \\ \hline * \ * \ * \ 7 \\ * \ * \ * \ 2 \\ \hline 7 \ a \ b \ 9 \ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a \ 5 \ 9 \\ \times \quad 8 \ 3 \\ \hline * \ * \ 7 \ 7 \\ * \ * \ 7 \ 2 \\ \hline 7 \ a \ 5 \ 9 \ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \ 5 \ 9 \\ \times \quad 8 \ 3 \\ \hline 2 \ 8 \ 7 \ 7 \\ 7 \ 6 \ 7 \ 2 \\ \hline 7 \ 9 \ 5 \ 9 \ 7 \end{array} \end{array}$$

Největší vyhovující číslo je 959.

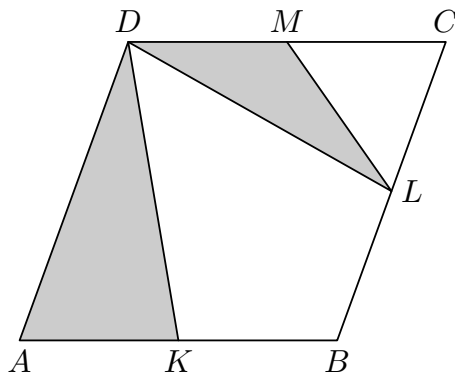
Hodnocení. 2 body za formulaci problému pomocí neznámé či algebrogramu; 2 body za výsledek; 2 body za srozumitelnost a kvalitu komentáře.

Z8–II–3

Kosočtverec $ABCD$ má obsah 120 cm^2 a velikost úhlu BAD je 70° . Body K , L a M jsou po řadě středy stran AB , BC a CD .

Určete součet obsahů trojúhelníků AKD a DLM . (K. Pazourek)

Možné řešení. Znázornění zadané situace je následující:



Obsah kosočtverce lze vyjádřit jako

$$S_{ABCD} = a \cdot v = 120 \text{ cm}^2,$$

kde a je velikost jeho strany a v velikost výšky.

Strana AK trojúhelníku AKD je poloviční vzhledem ke straně a a odpovídající výška je stejná jako výška v . Obsah tohoto trojúhelníku je

$$S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot v = \frac{1}{4} S_{ABCD} = 30 \text{ cm}^2,$$

Strana DM trojúhelníku DLM je poloviční vzhledem ke straně a a odpovídající výška je poloviční vzhledem k výšce v . Obsah tohoto trojúhelníku je

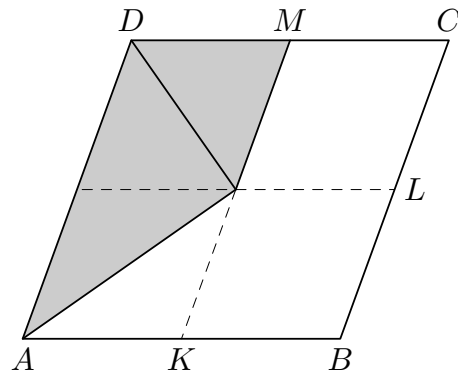
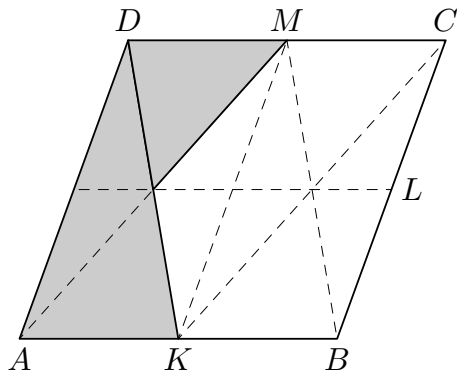
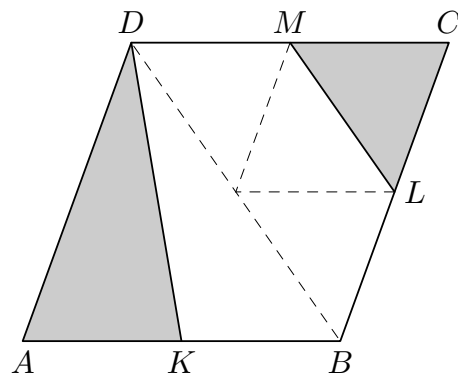
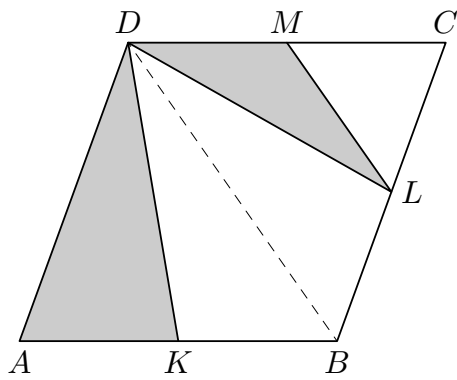
$$S_{DLM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{1}{8} S_{ABCD} = 15 \text{ cm}^2.$$

Součet obsahů trojúhelníků AKD a DLM je

$$S_{AKD} + S_{DLM} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) S_{ABCD} = \frac{3}{8} S_{ABCD} = 45 \text{ cm}^2. \quad (*)$$

Poznámky. Údaj o velikosti úhlu BAD je nadbytečný (souvisí se vztahem mezi velikostmi a a v , který však k dořešení úlohy není třeba).

Vztahy mezi obsahem kosočtverce a obsahy dílčích trojúhelníků lze chápat a znázornit různými způsoby. Viz např. následující transformace zachovávající obsahy či doplnění pomocných úseček pro porovnání částí:



Hodnocení. 1 bod za znázornění, dílčí postřehy či transformace; 1 bod za obsah trojúhelníku AKD ; 2 body za obsah trojúhelníku DLM a součet; 2 body za srozumitelnost a kvalitu komentáře.

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Rodina dvou dospělých se dvěma nezletilými dětmi vyrazila na lyžovačku. V lyžařském areálu je cena skipasu pro dospělého vyjádřena v celých stovkách korun, dětský skipas je o 600 Kč levnější. Areál nabízí dvě slevy: první je sleva 10 % na skipas pro každého, druhou slevou je rodinná vstupenka, ve které jsou dětské skipasy zlevněny o 20 % a skipasy pro dospělé jsou za plnou cenu.

Nejprve chtěli koupit všechny čtyři skipasy s 10% slevou. Nakonec maminka využila 10% slevu a tatínek s dětmi si koupili rodinnou vstupenku — takto je nákup vyšel levněji. Kolik nejméně mohl stát nezlevněný skipas pro dospělého? (T. Bárta)

Možné řešení. Cenu skipasu pro dospělého v Kč označíme x . Cena skipasů pro celou rodinu beze slev je

$$2x + 2(x - 600) = 4x - 1200.$$

Cena skipasů s uplatněnou 10% slevou pro všechny by byla

$$0,9 \cdot (4x - 1200) = 3,6x - 1080.$$

Cena skipasů v případě, kdy maminka využije 10% slevu a tatínek s dětmi si koupí rodinnou vstupenku, je

$$0,9x + x + 0,8 \cdot 2(x - 600) = 3,5x - 960.$$

Druhá možnost je výhodnější než první, právě když

$$3,6x - 1080 > 3,5x - 960,$$

$$0,1x > 120,$$

$$x > 1200.$$

Tedy skipas pro dospělého stojí v celých stovkách korun více než 1200 Kč.

Nezlevněný skipas pro dospělého stojí nejméně 1300 Kč.

Poznámka. Cena skipasu pro dospělého je celočíselným násobkem stokorun. Úlohu lze řešit postupným ověřováním možností pro $x = 700, 800, \dots$

Hodnocení. Po 1 bodu za každé ze tří vyjádření cen skipasů pomocí neznámé x ; 2 body za sestavení nerovnice a její dořešení; 1 bod za srozumitelnost a kvalitu komentáře.

Při zkoušení možností zohledněte úplnost komentáře. Náhodně odhalené nezdůvodněné řešení hodnoťte 2 body.

Z9–II–2

Najděte všechna přirozená čísla s následujícími vlastnostmi:

- číslo je čtyřmístné,
- na místě desítek je číslice 5,
- po odstranění posledních dvou číslic vznikne číslo, které je 103krát menší.

(K. Pechouš)

Možné řešení. Podle prvních dvou podmínek je číslo tvaru $\overline{ab5c}$, kde a, b, c jsou neznámé číslice ($a \neq 0$). Podle poslední podmínky platí

$$\overline{ab5c} = 103 \cdot \overline{ab}.$$

Tuto rovnost můžeme upravit následovně:

$$\begin{aligned} 100 \cdot \overline{ab} + \overline{5c} &= 100 \cdot \overline{ab} + 3 \cdot \overline{ab}, \\ \overline{5c} &= 3 \cdot \overline{ab} \end{aligned}$$

Tedy trojnásobek čísla \overline{ab} je v rozmezí od 50 do 59. Násobky tří v tomto rozmezí jsou jen 51, 54 a 57. Odpovídající dvojčíslí \overline{ab} jsou 17, 18 a 19.

Všechna čísla s uvedenými vlastnostmi jsou 1751, 1854 a 1957.

Poznámka. Poslední podmínku ze zadání lze zapsat jako

$$1000a + 100b + 50 + c = 103(10a + b),$$

což po úpravách dává $50 + c = 3(10a + b)$.

Hodnocení. 1 bod za zápis pomocí neznámých; 2 body za úpravy a rozbor možností; po 1 bodu za každý správný výsledek.

Z9–II–3

Přirozené číslo se nazývá *kostičkové*, pokud jeho zápis obsahuje číslici nebo skupinu po sobě jdoucích číslic, jež jsou zápisem třetí mocniny kladného celého čísla. (Např. čísla 279 a 729 jsou kostičková, čísla 297 a 792 nikoli.)

Určete počet všech trojmístných kostičkových čísel tvořených pouze sudými číslicemi.
(M. Dillingerová)

Možné řešení. Nejvýše trojmístná čísla, která jsou třetími mocninami jsou

$$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.$$

V tomto výčtu není žádné vyhovující kostičkové číslo. Vyhovující čísla musí obsahovat dvojčíslí 64 nebo číslici 8 (tyto možnosti se nevylučují). Další použitelné číslice jsou 0, 2, 4, 6.

Abychom nic neopomněli a něco nezahrnuli dvakrát, budeme vyhovující čísla počítat postupně (v každém bodě vylučujeme možnosti započtené dříve):

- Čísel obsahujících číslici 8 na prvním místě je $5 \cdot 5 = 25$ (na zbylých místech mohou být jakékoli sudé číslice).
- Čísel obsahujících číslici 8 na druhém místě je $3 \cdot 5 = 15$ (na prvním místě není 0, ani 8).
- Čísel obsahujících číslici 8 na třetím místě je $3 \cdot 4 = 12$ (na prvním místě není 0, ani 8, na druhém místě není 8).
- Čísla začínající dvojčíslím 64 jsou 4 (na třetím místě není 8).
- Čísla končící dvojčíslím 64 jsou 3 (na prvním místě není 0, ani 8).

Vyhovujících kostičkových čísel je $25 + 15 + 12 + 4 + 3 = 59$.

Poznámka. Postupný rozbor možností lze organizovat různě (např. podle číslice na prvním místě). Je také možné všechna vyhovující čísla vypisovat.

Hodnocení. 1 bod za výčet trojmístných třetích mocnin; 1 bod za poznatek, že vyhovující čísla musí obsahovat 64 nebo 8; 3 body za systematický rozbor či výpis možností; 1 bod za výsledek.

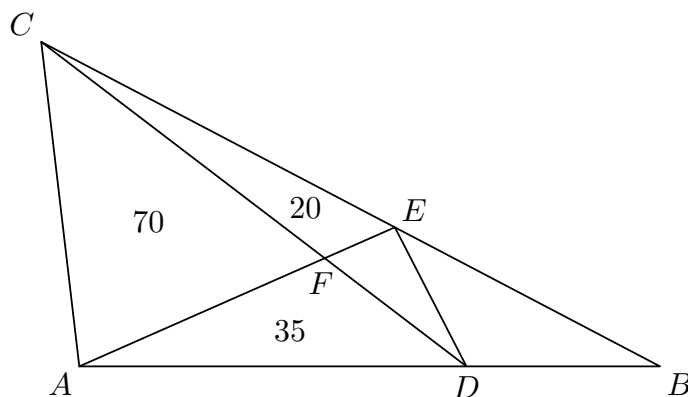
Z9–II–4

V trojúhelníku ABC je na straně AB bod D , na straně BC je bod E a bod F je průsečíkem úseček AE a CD . Obsah trojúhelníků ADF , AFC a CFE je po řadě 35 cm^2 , 70 cm^2 a 20 cm^2 .

Určete obsahy trojúhelníků DEF a BED .

(I. Jančígová)

Možné řešení. Znázornění situace včetně známých obsahů může vypadat takto:



Je zde mnoho dvojic trojúhelníků se stejnými výškami ze společného vrcholu (viz např. trojúhelníky ACF a AFD). Pro každou takovou dvojici trojúhelníků platí, že poměr jejich obsahů je stejný jako poměr délek stran proti společnému vrcholu. Tento poznatek využijeme opakovaně a odtud odvodíme hledané obsahy.

Úsečku CD rozdělenou bodem F sdílí trojúhelníky ACF a AFD , které mají společný vrchol A , a tedy stejnou výšku z tohoto vrcholu. Proto platí

$$|CF| : |FD| = S_{ACF} : S_{AFD}.$$

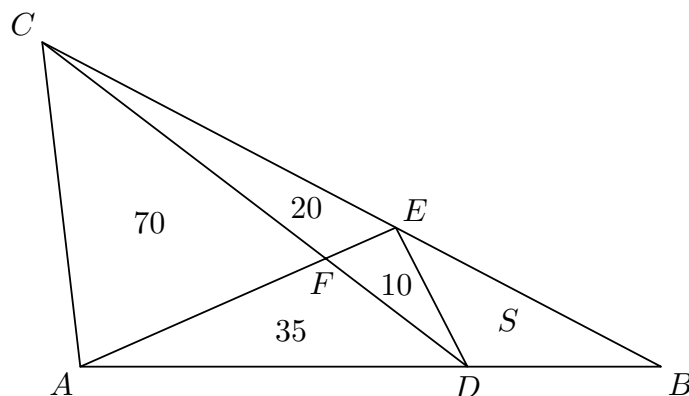
Tutéž trojici kolineárních bodů sdílí také trojúhelníky ECF a EFD , tedy platí

$$|CF| : |FD| = S_{ECF} : S_{EFD}.$$

Porovnáním předchozích dvou rovností dostáváme úměru mezi obsahy trojúhelníků, odkud po dosazení a úpravě vyjádříme neznámý obsah:

$$\begin{aligned} S_{ACF} : S_{AFD} &= S_{ECF} : S_{EFD}, \\ 70 : 35 &= 20 : S_{EFD}, \\ S_{EFD} &= 20 \cdot 35 : 70 = 10. \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníku DEF je 10 cm^2 .



Úsečku BC rozdělenou bodem E sdílí trojúhelníky DBE a DEC a také trojúhelníky ABE a AEC . Tedy platí

$$|BE| : |EC| = S_{DBE} : S_{DEC} = S_{ABE} : S_{AEC}.$$

Po dosazení a úpravě vyjádříme neznámý obsah (který zkráceně značíme S):

$$\begin{aligned} S : 30 &= (S + 45) : 90, \\ 90 S &= 30 (S + 45), \\ 60 S &= 30 \cdot 45, \\ S &= 45 : 2 = 22,5. \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníku BED je $22,5 \text{ cm}^2$.

Poznámka. Popsané vlastnosti lze použít různě. Např. úvaha ve druhé části úlohy vztažená k dělení úsečky AB bodem D dává

$$|AD| : |DB| = S_{CAD} : S_{CBD} = S_{EAD} : S_{EDB},$$

což po dosazení a úpravě vede k témuž výsledku jako výše:

$$\begin{aligned} 105 : (S + 30) &= 45 : S, \\ 105 S &= 45(S + 30), \\ 60 S &= 45 \cdot 30, \\ S &= 45 : 2 = 22,5. \end{aligned}$$

Hodnocení. 2 body za obsah trojúhelníku DEF ; 3 body za obsah trojúhelníku BED ; 1 bod za srozumitelnost úprav a kvalitu komentáře.