

## Zadání úloh domácího kola

## Kategorie A

1. Okolo kulatého stolu sedí 76 rytířů. Každý z nich má právě čtyři spojence, a to dva nejbližší sousedy po levici a dva nejbližší sousedy po pravici. Kolika způsoby lze rytíře rozdělit do dvou skupin, aby každý rytíř měl ve své skupině právě dva spojence?

(Jozef Rajník)

2. Každá ze tří přímek dělí daný kruh na dvě úseče, jejichž obsahy jsou v poměru 2 : 1. Tato trojice přímek dělí kruh na sedm částí. Dokažte, že obsah některé části je roven součtu obsahů jiných dvou nebo tří (různých) částí.

(Tomáš Bárta)

3. V trojúhelníku  $ABC$  jsou střed kružnice vepsané a těžiště stejně vzdálené od přímky  $BC$ . Dokažte, že poloměr kružnice připsané straně  $BC$  je roven velikosti výšky z vrcholu  $A$ . (Kružnice připsaná straně  $BC$  je kružnice, která se dotýká strany  $BC$  a polopřímek opačných k  $BA$  a  $CA$ .)

(Zdeněk Pezlar)

4. Najděte všechny dvojice prvočísel  $p, q$  takové, že  $p > q$  a platí

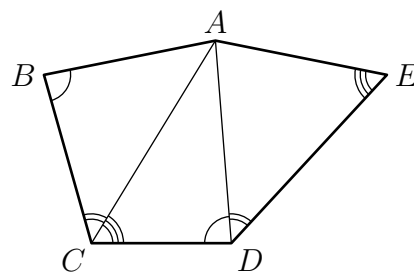
$$(p + q + 1)(n(p - 1, q - 1) + 1) = 11pq.$$

Zde  $n(a, b)$  označuje nejmenší společný násobek čísel  $a$  a  $b$ .

(Tomáš Jurík)

5. V konvexním pětiúhelníku  $ABCDE$  platí  $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ADC|$ ,  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EDA|$  a  $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle DCA|$ . Dokažte, že  $CD \parallel BE$ .

(Patrik Bak)



6. Pro kladné celé číslo  $m$  označme  $g(m)$  nejmenší počet geometrických posloupností, mezi jejichž členy jsou zastoupeny všechny dělitele čísla  $m$ . Určete všechna kladná celá čísla  $n$ , pro která platí  $g(n!) = g((n + 1)!)$ . Řešte pro geometrické posloupnosti a) s racionálními kvocienty, b) s reálnými kvocienty.

(Zdeněk Pezlar)



Do soutěže se přihlaste na [osmo.matematickaolympiada.cz](https://osmo.matematickaolympiada.cz)

Informace o soutěži včetně návodných úloh najdete na  
[matematickaolympiada.cz](https://matematickaolympiada.cz)



## Kategorie B

1. Určete všechny kvadratické trojčleny  $f(x) = x^2 + px + q$  s reálnými koeficienty  $p, q$ , pro něž platí  $f(p) - q = f(q) - p = 2$ .  
(Jaroslav Švrček)
2. Tabulku  $3 \times 3$  vyplníme devíti navzájem různými prvočísly tak, aby součet čísel v každém řádku i v každém sloupci měl stejnou číslíci na místě jednotek. Jakou nejmenší hodnotu může mít součet všech čísel v tabulce?  
(Tomáš Jurík, Tomáš Bárta)
3. Na stranách  $AB, BC, CD, DA$  pravoúhelníku  $ABCD$  jsou po řadě zvoleny body  $K, L, M, N$  tak, že  $KM \perp LN$ . Dokažte, že obsah čtyřúhelníku s vrcholy ve středech stran čtyřúhelníku  $KLMN$  není menší než jedna čtvrtina obsahu pravoúhelníku  $ABCD$ .  
(Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša)
4. Označme  $D(a, b)$  největší společný dělitel kladných celých čísel  $a, b$  a  $n(a, b)$  jejich nejmenší společný násobek. Určete všechna kladná celá čísla  $m$ , pro která platí

$$D(25, m) + n(26, m + 1) = 2027.$$

(Tomáš Jurík)

5. Z číslic 0, 1, 2, 3, 6 a 7 sestavíme všechna možná šestimístná čísla, která obsahují každou z nich, a každé takové číslo zapíšeme na jinou kartičku. Rozhodněte, zda je možné rozdělit kartičky na sedm hromádek se stejnými součty čísel. (Jana Kopfová)
6. Necht  $M$  je střed základny  $AB$  rovnoramenného lichoběžníku  $ABCD$ . Označme  $K$  druhý průsečík přímky  $DM$  s kružnicí  $k$  opsanou danému lichoběžníku a  $P$  průsečík tečny kružnice  $k$  v bodě  $K$  s přímkou  $AB$ .
  - a) Dokažte, že body  $C, M, K, P$  leží na téže kružnici.
  - b) Dokažte, že přímka  $BD$  je tečnou kružnice opsané trojúhelníku  $BCP$ .

(Zdeněk Pezlar, Patrik Bak)



Do soutěže se přihlaste na [osmo.matematickaolympiada.cz](https://osmo.matematickaolympiada.cz)

Informace o soutěži včetně návodných úloh najdete na  
[matematickaolympiada.cz](https://matematickaolympiada.cz)

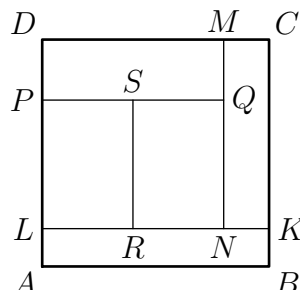


## Kategorie C

1. Sofie má 14 mincí, z nichž každá je buď zlatá, nebo stříbrná. Mince jsou uspořádané do řady tak, že v každé skupině 7 sousedních mincí je více zlatých než stříbrných. Kolik zlatých mincí může mít Sofie? Určete všechny možnosti. (Patrik Vrba)

2. Čtverec  $ABCD$  složený z  $n \times n$  jednotkových čtverečků (kde  $n \in \mathbb{N}$ ) je jako na obrázku rozstříhán na pět pravoúhelníků  $ABKL$ ,  $KCMN$ ,  $MDPQ$ ,  $PLRS$ ,  $RNQS$  stejného obvodu. Stříhy jsou vedeny po stranách jednotkových čtverečků. Určete nejmenší  $n$ , pro které je takové rozstříhání možné.

(Jaroslav Zhouf)



3. Najděte nejmenší kladné celé číslo  $n$ , které má aspoň dva různé prvočinitele a které je násobkem součtu svého nejmenšího a největšího prvočinitele.

(Patrik Vrba, Patrik Bak)

4. Pro reálná čísla  $a, b, c$  platí

$$(a+b)^2 \geq (b+c)^2, \quad (a-b)^2 \leq (b-c)^2, \quad a > b > c.$$

Kolik nejvíce z čísel  $a, b, c$  může být záporných?

(Mária Dományová)

5. V lichoběžníku  $ABCD$ , kde  $AB \parallel CD$  a  $|AB| > |CD|$ , označme  $K, L$  po řadě středy stran  $AB, BC$ . Dále označme  $M$  průsečík úseček  $AL$  a  $CK$ . Dokažte, že přímka  $DM$  dělí lichoběžník  $ABCD$  na dvě části o stejném obsahu.

(Tomáš Jurík)

6. Kuchař vaří devět jídel. Na každý z pěti následujících dnů sestaví jídelní lístek obsahující ne nutně stejný počet jídel. Musí zaručit, aby si libovolných pět různých jídel z těchto devíti bylo možné během těchto pěti dnů v nějakém pořadí objednat (každý den jedno jídlo). Určete nejmenší možný součet počtů jídel ze všech pěti jídelních lístků.

(Josef Tkadlec)

Do soutěže se přihlaste na [osmo.matematickaolympiada.cz](https://osmo.matematickaolympiada.cz)Informace o soutěži včetně návodných úloh najdete na [matematickaolympiada.cz](https://matematickaolympiada.cz)