

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii C

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástinu řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

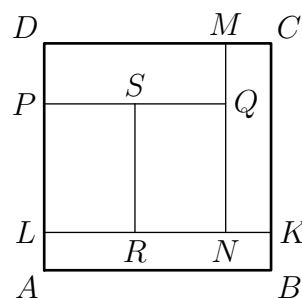
1. *Sofie má 14 mincí, z nichž každá je buď zlatá, nebo stříbrná. Mince jsou uspořádané do řady tak, že v každé skupině 7 sousedních mincí je více zlatých než stříbrných. Kolik zlatých mincí může mít Sofie? Určete všechny možnosti.* (Patrik Vrba)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Sofie má 7 zlatých a 3 stříbrné mince. Jak je má uspořádat do řady tak, aby alespoň v jedné skupině pěti sousedních mincí bylo více stříbrných než zlatých mincí?
- N2. Marek má v sáčku 10 kuliček, každá je buď modrá, nebo červená. Pokud ze sáčku vytáhne 5 kuliček, vždy jsou aspoň tři z nich modré. Kolik může být v sáčku modrých kuliček?
- N3. Sofie má 10 mincí, z nichž každá je buď zlatá, nebo stříbrná. Mince jsou uspořádány v řadě tak, že dvě stříbrné mince nejsou vedle sebe. Kolik zlatých mincí může mít Sofie? Určete všechny možnosti.
- N4. Sofie má 20 mincí, z nichž každá je buď zlatá, nebo stříbrná. Mince jsou uspořádány v obdélníku tvořeném dvěma řadami po 10 mincích tak, že dvě stříbrné mince nejsou vedle sebe ani v řádku ani v sloupci. Kolik zlatých mincí může mít Sofie? Určete všechny možnosti.
- D1. Vyřešte zadanou úlohu pro 19 mincí (podmínka skupiny 7 sousedních mincí zůstává beze změny).
Jak jsme mohli v předchozích úlohách vidět, klíčové bylo určit nejmenší možnou hodnotu zlatých mincí. Všech vyšších počtů bylo možné snadno dosáhnout záměnou stříbrných mincí za zlaté. Proto se v dalších doplňujících úlohách blíže podíváme na úlohy na hledání nejmenšího (popř. největšího) možného počtu. Často náročnější částí těchto úloh je zdůvodnit, proč se menšího (popř. většího) počtu nedá dosáhnout. Častým způsobem argumentace je rozdělit si situaci na několik menších částí a sečíst odhady pro ně – jako jsme v úloze N3 sečetli odhady pro páry a v úloze N4 pro první a druhý řádek.
- D2. Pavel řeší následující úlohu: „Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 20$. Kolik nejvýše čísel z tabule můžeme zakroužkovat, aby neexistovala dvě zakroužkovaná čísla, z nichž jedno dělí druhé?“ Jeho řešení zní následovně: „Protože chceme zakroužkovat co nejvíce čísel, tak zakroužkujeme prvočísla, protože ta mají nejmeně dělitelů a navzájem se nedělí. Zakroužkujeme tedy 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Tedy nejvýše lze zakroužkovat 8 čísel.“ Je Pavlovo řešení úplné a správné (včetně odůvodnění)?
- D3. Vyřešte Pavlovu úlohu.

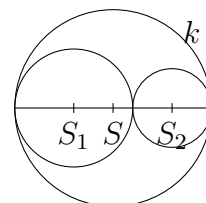
2. Čtverec $ABCD$ složený z $n \times n$ jednotkových čtverečků (kde $n \in \mathbb{N}$) je jako na obrázku rozstříhán na pět pravoúhelníků $ABKL$, $KCMN$, $MDPQ$, $PLRS$, $RNQS$ stejného obvodu. Stříhy jsou vedeny po stranách jednotkových čtverečků. Určete nejmenší n , pro které je takové rozstříhání možné.

(Jaroslav Zhouf)

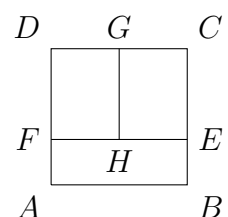


NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Do kružnice k s poloměrem 2 jsou vepsány dvě menší kružnice, které se navzájem dotýkají, současně se zevnitř dotýkají kružnice k a středy všech tří kružnic leží na téže přímce. Ukažte, že obvod kružnice k je roven součtu obvodů obou menších kružnic.



- N2. Čtverec $ABCD$ s délkou strany $|AB| = 20$ jsme rozdělili úsečkami EF , $EF \parallel AB$, a GH , $GH \parallel BC$, na 3 obdélníky jako na obrázku. Každý z obdélníků $ABEF$, $CEHG$, $DFHG$ má stejný obvod. Určete tento obvod.



- D1. Čtverec $ABCD$ složený z $n \times n$ jednotkových čtverečků (kde $n \in \mathbb{N}$) jsme rozdělili na tři obdélníky tak, že všechny mají stejný obsah a každý se dotýká zbývajících dvou (podobně jako v předchozí návodné úloze). Stříhy jsou vedeny po stranách jednotkových čtverečků. Určete nejmenší hodnotu n , pro kterou je takové rozdělení možné.
- D2. List papíru ve tvaru obdélníku $ABCD$, $|AB| > |BC|$, přeložíme tak, že vrchol A splyne s bodem C . Zdůvodněte, proč je obvod výsledného pětiúhelníku menší než obvod obdélníku $ABCD$.

3. Najděte nejmenší kladné celé číslo n , které má aspoň dva různé prvočinitele a které je násobkem součtu svého nejmenšího a největšího prvočinitele.

(Patrik Vrba, Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Najděte všechna celá čísla $n \geq 2$, která jsou o 76 větší než jejich nejmenší prvočinitel.
- N2. Najděte všechna prvočísla p, q , $p \neq q$ taková, že číslo pq je o 76 větší než součet všech jeho kladných dělitelů.
- D1. Číslo n je o 5 menší než trojnásobek jeho největšího lichého dělitele. Určete číslo n .
- D2. Číslo n je součinem tří různých prvočísel. Zvětšíme-li dvě menší z nich o 1 a největší ponecháme nezměněné, zvětší se jejich součin o 915. Určete číslo n .
- D3. Najděte všechna přirozená čísla, která mají právě 6 dělitelů, přičemž součet druhého největšího a druhého nejmenšího z nich je 54.

4. Pro reálná čísla a, b, c platí

$$(a+b)^2 \geq (b+c)^2, \quad (a-b)^2 \leq (b-c)^2, \quad a > b > c.$$

Kolik nejvíce z čísel a, b, c může být záporných? (Mária Dományová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Ukažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b platí nerovnost

$$(a+b)^2 \geq (a-b)^2$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost.

N2. Pro reálná čísla a, b, c platí

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2, \quad a > b > c.$$

Kolik nejvýše z čísel a, b, c může být záporných?

N3. Ukažte, že pro libovolná reálná čísla x, y platí nerovnost

$$|x+y| \geq |x| - |y|.$$

D1. Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro které platí

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= y^2 + z^2, \\ z^2 + zy &= y^2 + x^2. \end{aligned}$$

D2. Pro kladná reálná čísla a, b, c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Dokažte, že potom platí také $c^2 + ab \leq ac + bc$.

D3. Pro kladná reálná čísla a, b, c, d splňující nerovnosti $a > b, c > d$ platí

$$a + b > c + d, \quad ab < cd.$$

Dokažte, že potom nutně platí $a > c > d > b$.

5. V lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$ a $|AB| > |CD|$, označme K, L po řadě středy stran AB, BC . Dále označme M průsečík úseček AL a CK . Dokažte, že přímka DM dělí lichoběžník $ABCD$ na dvě části o stejném obsahu. (Tomáš Jurík)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Proč těžnice rozděluje trojúhelník na dva trojúhelníky se stejným obsahem?

N2. Připomeňme si, jak se počítá obsah lichoběžníku a proč tomu tak je.

N3. Mezi dvěma rovnoběžkami p a q leží bod M tak, že jeho vzdálenost od přímky p je dvakrát větší než jeho vzdálenost od přímky q . Uvažujme body K a L ležící po řadě na přímkách p a q takové, že bod M leží na úsečce KL . Dokažte, že bod M rozděluje úsečku KL v poměru 2 : 1.

- N4. Mezi dvěma rovnoběžkami p a q leží bod M tak, že jeho vzdálenost od přímky p je stejná jako jeho vzdálenost od přímky q . Uvažujme body A, B ležící na přímce p body C a D ležící na přímce q tak, že bod M je průsečíkem úseček AD a BC a polopřímky AB a CD jsou souhlasné. Dokažte, že trojúhelníky ABM a DCM jsou shodné.
- N5. V trojúhelníku ABC označme středy jeho stran AB, BC a AC po řadě K, L a M . Průsečík úseček AL a BM označme O . Kolikrát je obsah trojúhelníku ABC větší než obsah trojúhelníku AKO ?
- D1. Necht P a Q jsou po řadě středy stran BC a AC trojúhelníku ABC . Necht rovnoběžka s AC procházející středem K úsečky PQ protíná přímku BQ v bodě L a přímka PL protíná úsečku AC v bodě M . Dokažte, že M je středem úsečky AQ .
- D2. Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD . Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC . Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$.
- D3. Je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| : |BC| = 2 : 1$. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA jsou po řadě dány body K, L, M, N tak, že $KLMN$ je obdélník a platí $|KL| : |LM| = 3 : 1$. Vypočítejte poměr obsahů obdélníků $ABCD$ a $KLMN$.
6. Kuchař vaří devět jídel. Na každý z pěti následujících dnů sestaví jídelní lístek obsahující ne nutně stejný počet jídel. Musí zaručit, aby si libovolných pět různých jídel z těchto devíti bylo možné během těchto pěti dnů v nějakém pořadí objednat (každý den jedno jídlo). Určete nejmenší možný součet počtů jídel ze všech pěti jídelních lístků.
(Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. V sáčku jsou čtyři kuličky – bílá, červená, modrá a zelená. V každém tahu vytáhneme naraz 3 různé kuličky, podíváme se na ně a vrátíme je do sáčku. Kolikrát musíme opakovat tahy, abychom si byli jisti, že vytáhneme stejnou trojici kuliček?
- N2. Kuchař vaří tři jídla. Na každý z dvou dnů sestaví jídelní lístek obsahující ne nutně stejný počet jídel. Musí zaručit, aby si libovolná dvě různá jídla z těchto tří bylo možné během těchto dvou dnů v nějakém pořadí objednat (každý den jedno jídlo). Dokažte, že každý den musel jídelní lístek obsahovat alespoň 2 jídla a najděte takový příklad jídelních lístků na oba dni s právě dvěma jídly.
- N3. Kuchař vaří 9 jídel (označených čísly $1, 2, \dots, 9$) a sestavil tento jídelní lístek:

Po	1	3	6	8
Ut	1	4	6	9
St	2	4	7	9
Čt	2	5	7	
Pá	3	5	8	

Kdybychom si chtěli objednat jídla 1, 2, 3, 4, 5, mohli bychom si je objednat v pořadí 1, 4, 2, 5, 3, tj. v pondělí jídlo číslo 1, v úterý jídlo číslo 4 atd. Najděte pět různých jídel tak, abychom si je nemohli objednat (každý den jedno jídlo).

- N4. Do každého pole tabulky s 3 řádky a 4 sloupci vpište jedno z čísel 1 až 6 tak, aby platilo: "Pro libovolnou trojici navzájem různých čísel z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dokážeme z každého řádku tabulky vybrat jedno pole, aby ve vybraných polích byla tato trojice čísel".
- D1. Kuchař vaří j jídel. Na každý z d dnů sestaví jídelní lístek obsahující ne nutně stejný počet jídel. Musí zaručit, aby si libovolných d různých jídel z těchto j jídel bylo možné během těchto d dnů v nějakém pořadí objednat (každý den jedno jídlo). Určete nejmenší možný součet počtů jídel ze všech d jídelních lístků.
- D2. Každé políčko tabulky 68×68 máme obarvit jednou z tří barev (červená, modrá, bílá). Kolika způsoby to lze provést tak, aby každá trojice sousedních políček v každém řádku a v každém sloupci obsahovala políčka všech tří barev?

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Sofie má 14 mincí, z nichž každá je buď zlatá, nebo stříbrná. Mince jsou uspořádané do řady tak, že v každé skupině 7 sousedních mincí je více zlatých než stříbrných. Kolik zlatých mincí může mít Sofie? Určete všechny možnosti.* (Patrik Vrba)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Sofie má 7 zlatých a 3 stříbrné mince. Jak je má uspořádat do řady tak, aby alespoň v jedné skupině pěti sousedních mincí bylo více stříbrných než zlatých mincí? [Například *SSSZZZZZZZ* nebo i *ZZSZSZSZZZ*.]
- N2. Marek má v sáčku 10 kuliček, každá je buď modrá, nebo červená. Pokud ze sáčku vytáhne 5 kuliček, vždy jsou aspoň tři z nich modré. Kolik může být v sáčku modrých kuliček? [Kdyby byly v sáčku aspoň 3 červené kuličky, tak by je mohl najednou vytáhnout a podmínka v zadání by nebyla splněna. Pokud jsou v sáčku nejvýše 2 červené kuličky, tak z pěti vytažených budou aspoň 3 modré. V sáčku proto může být 8, 9 nebo 10 modrých kuliček.]
- N3. Sofie má 10 mincí, z nichž každá je buď zlatá, nebo stříbrná. Mince jsou uspořádány v řadě tak, že dvě stříbrné mince nejsou vedle sebe. Kolik zlatých mincí může mít Sofie? Určete všechny možnosti. [5 až 10. V situaci *SZSZSZSZSZ* má Sofie 5 zlatých mincí. Nahrazování stříbrné mince zlatou podmínku neporuší a dostane tak počty mincí od 6 do 10. Ukážeme dva důkazy, že méně než 5 zlatých mincí mít nemůže. První založíme na pozorování, že se nám „vyplatí“ nejdříve dávat stříbrné mince. (Je třeba si však dát pozor, že toto není úplné zdůvodnění.) Očíslujme si pozice mincí 1 až 10 (zleva doprava). První stříbrná mince (zleva) může být nejdříve na pozici 1. Druhá nesmí sousedit s první, proto musí být aspoň o 2 pozice vpravo, tedy aspoň na pozici 3. Analogicky třetí mince musí být aspoň na pozici 5, čtvrtá aspoň na 7 a pátá aspoň na pozici 9. Šestá stříbrná mince by musela být aspoň na pozici 11, která však neexistuje. Proto stříbrných mincí nemůže být více než 5, a tedy zlatých je aspoň 5. Druhé řešení je kratší: Rozdělme mince na 5 párů sousedních mincí. Pár nemůže obsahovat dvě stříbrné, proto musí obsahovat alespoň jednu zlatou minci. Protože párů je 5, Sofie musí mít aspoň 5 zlatých mincí.]
- N4. Sofie má 20 mincí, z nichž každá je buď zlatá, nebo stříbrná. Mince jsou uspořádány v obdélníku tvořeném dvěma řadami po 10 mincích tak, že dvě stříbrné mince nejsou vedle sebe ani v řádku ani v sloupci. Kolik zlatých mincí může mít Sofie? Určete všechny možnosti. [10 až 20. Z předchozí úlohy víme, že v řadě 10 mincí musí být aspoň 5 zlatých mincí. Ve dvou řadách musí být tedy aspoň 10 zlatých mincí. Počet 10 zlatých mincí lze dosáhnout takto

ZSZSZSZSZS
SZSZSZSZSZ

Počty od 11 do 20 získáme postupným nahrazováním stříbrných mincí za zlaté.]

- D1. Vyřešte zadanou úlohu pro 19 mincí (podmínka skupiny 7 sousedních mincí zůstává beze změny). [Zlatých mincí může být od 10 do 19. Očíslujme si mince po řadě zleva doprava čísly 1 až 19. V každé z prvních dvou sedmic mincí (mince 1–7, 8–14) musí být aspoň 4 zlaté mince. Mezi pěti posledními mincemi (s čísly 15–19) musí být aspoň 2 zlaté mince, jinak i kdyby 13. a 14. mince byly zlaté,

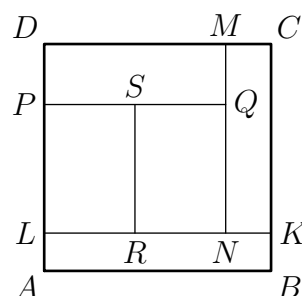
posledních 7 mincí (13–19) by nesplňovalo podmínku ze zadání. Dohromady jich musí být aspoň $2 \cdot 4 + 2 = 10$. Jedno z vyhovujících uspořádání 10 zlatých mincí je *SSSSZZZZSSSSZZZZSSSSZZ*.]

Jak jsme mohli v předchozích úlohách vidět, klíčové bylo určit nejmenší možnou hodnotu zlatých mincí. Všechny vyšší počty bylo možné snadno dosáhnout záměnou stříbrných mincí za zlaté. Proto se v dalších doplňujících úlohách blíže podíváme na úlohy na hledání nejmenšího (popř. největšího) možného počtu. Často náročnější částí těchto úloh je zdůvodnit, proč se menšího (popř. většího) počtu nedá dosáhnout. Častým způsobem argumentace je rozdělit si situaci na několik menších částí a sečíst odhady pro ně – jako jsme v úloze N3 sečetli odhady pro páry a v úloze N4 pro první a druhý řádek.

- D2. Pavel řeší následující úlohu: „Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 20$. Kolik nejvýše čísel z tabule můžeme zakroužkovat, aby neexistovala dvě zakroužkovaná čísla, z nichž jedno dělí druhé?“ Jeho řešení zní následovně: „Protože chceme zakroužkovat co nejvíce čísel, tak zakroužkujeme prvočísla, protože ta mají nejmeně dělitelů a navzájem se nedělí. Zakroužkujeme tedy 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Tedy nejvýše lze zakroužkovat 8 čísel.“ Je Pavlovo řešení úplné a správné (včetně odůvodnění)? [Ne. Problém je v Pavlově „argumentaci“ o optimalitě. Například místo dvou zakroužkovaných prvočísel 2 a 3 můžeme zakroužkovat tři čísla 4, 6 a 9.]
- D3. Vyřešte Pavlovu úlohu. [10. Podívejme se na 5 množin: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $\{3, 6, 12\}$, $\{5, 10, 20\}$, $\{7, 14\}$ a $\{9, 18\}$. Pro každou z těchto množin platí, že pokud zakroužkujeme libovolné dvě čísla z ní, tak jedno dělí druhé. Proto z každé z těchto množin můžeme zakroužkovat nejvýše jedno číslo. Mimo tyto množiny zůstalo 5 čísel 11, 13, 15, 17 a 19, z nichž můžeme zakroužkovat nejvýše 5. Dostáváme tak, že počet zakroužkovaných čísel musí být menší nebo roven 10. Tohoto počtu lze také dosáhnout zakroužkováním čísel 11, 12, $\dots$, 20, z nichž zřejmě žádné nedělí jiné.]

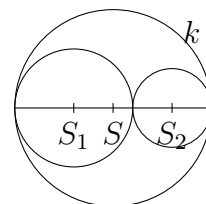
2. Čtverec $ABCD$ složený z $n \times n$ jednotkových čtverečků (kde $n \in \mathbb{N}$) je jako na obrázku rozstříhán na pět pravouhelníků $ABKL$, $KCMN$, $MDPQ$, $PLRS$, $RNQS$ stejného obvodu. Stříhy jsou vedeny po stranách jednotkových čtverečků. Určete nejmenší n , pro které je takové rozstříhání možné.

(Jaroslav Zhouf)



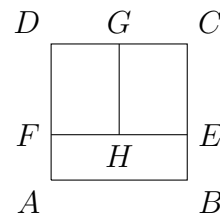
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Do kružnice k s poloměrem 2 jsou vepsány dvě menší kružnice, které se navzájem dotýkají, současně se zevnitř dotýkají kružnice k a středy všech tří kružnic leží na téže přímce. Ukažte, že obvod kružnice k je roven součtu obvodů obou menších kružnic. [Označme poloměry dvou vepsaných kružnic do kružnice k jako x a y . Z polohy středů kružnic plyne, že součet průměrů vepsaných kružnic je roven průměru kružnice k , tj. $2x + 2y = 4$ a proto $y = 2 - x$. Součet obvodů



vepsaných kružnic je tedy $2\pi x + 2\pi(2 - x) = 4\pi$, což je zřejmě obvod kružnice k s poloměrem 2.]

- N2. Čtverec $ABCD$ s délkou strany $|AB| = 20$ jsme rozdělili úsečkami EF , $EF \parallel AB$, a GH , $GH \parallel BC$, na 3 obdélníky jako na obrázku. Každý z obdélníků $ABEF$, $CEHG$, $DFHG$ má stejný obvod. Určete tento obvod. [50. Pokud označíme $|BE| = |AF| = x$, tak $|DF| = |GH| = |CE| = 20 - x$. Protože obdélníky $CEHG$ a $DFHG$ se stejným obvodem mají jednu stranu stejně dlouhou, musí mít stejně dlouhou i druhou stranu, tj. $|FH| = |HE| = |CG| = |DG| = 20/2 = 10$. Nyní už snadno z rovnosti obvodů obdélníků $ABEF$ a $CEGH$ dopočteme



$$2(|AB| + |BE|) = 2(|CE| + |HE|)$$

$$20 + x = (20 - x) + 10$$

$$x = 5$$

a hledaný obvod je $2(20 + x) = 50$.]

- D1. Čtverec $ABCD$ složený z $n \times n$ jednotkových čtverečků (kde $n \in \mathbb{N}$) jsme rozdělili na tři obdélníky tak, že všechny mají stejný obsah a každý se dotýká zbývajících dvou (podobně jako v předchozí návodné úloze). Stříhy jsou vedeny po stranách jednotkových čtverečků. Určete nejmenší hodnotu n , pro kterou je takové rozdělení možné. [$n = 6$. Nejprve si uvědomíme, že každý ze tří obdélníků má obsah roven třetině obsahu obdélníku $ABCD$, tj. $\frac{1}{3}n^2$. Proto druhá strana obdélníku, který má jednu stranu dlouhou $|AB|$, musí mít délku $\frac{1}{3}n$, protože $|AB| = n$. Následně dopočítáme délky stran dvou stejných obdélníků – jedna z nich je $\frac{1}{2}n$ a druhá $\frac{2}{3}n$. Aby byly všechny strany obdélníků celá čísla, musí být číslo n dělitelné dvěma i třemi a nejmenší takové číslo je 6. Potom rozměry obdélníků jsou 6×2 dvakrát 4×3 .]
- D2. List papíru ve tvaru obdélníku $ABCD$, $|AB| > |BC|$, přeložíme tak, že vrchol A splyne s bodem C . Zdůvodněte, proč je obvod výsledného pětiúhelníku menší než obvod obdélníku $ABCD$. [Označme strany obdélníku jako $|AB| = a$, $|BC| = b$ a postupujeme podle druhého řešení úlohy 74-C-I-1. Z Pythagorovy věty v lichoběžníku $APRD$ je $|PR|^2 = (x - y)^2 + b^2$. Obvod pětiúhelníku je $(a - x) + a + b + b + y + \sqrt{(x - y)^2 + b^2}$. Postupnými úpravami dokážeme, že je menší než $2(a + b)$:

$$(a - x) + b + b + y + \sqrt{(x - y)^2 + b^2} < 2(a + b)$$

$$\sqrt{(x - y)^2 + b^2} < x - y + a$$

$$(x - y)^2 + b^2 < (x - y)^2 + 2a(x - y) + a^2,$$

což platí díky $a > b > 0$ a $x > y$.]

3. Najděte nejmenší kladné celé číslo n , které má aspoň dva různé prvočinitele a které je násobkem součtu svého nejmenšího a největšího prvočinitele.

(Patrik Vrba, Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Najděte všechna celá čísla $n \geq 2$, která jsou o 76 větší než jejich nejmenší prvočinitel. [$n = 78$. Necht p je nejmenší prvočinitel čísla n , potom má platit $n = p + 76$. Zřejmě $p \mid n$ a proto p dělí i $76 = 2^2 \cdot 19$. Protože p je prvočíslo, máme jen dvě možnosti: $p = 2$ nebo $p = 19$. Pro $p = 2$ dostaneme vyhovující $n = 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$. Pro $p = 19$ dostaneme $n = 95 = 5 \cdot 19$, ale 19 není nejmenší prvočinitel čísla n .]
- N2. Najděte všechna prvočísla $p, q, p \neq q$ taková, že číslo pq je o 76 větší než součet všech jeho kladných dělitelů. [$p = 2, q = 73$. Součet všech kladných dělitelů čísla pq je $1 + p + q + pq$ a tedy máme řešit rovnici $1 + p + q + pq = pq + 76$, tj. $p + q = 75$. Kvůli paritě musí být jedno prvočíslo sudé a druhé liché, proto jedno z nich musí být 2 a druhé je $75 - 2 = 73$, což je také prvočíslo a skutečně číslo $2 \cdot 73$ je o 76 větší než $1 + 2 + 73 + 2 \cdot 73$. Jiné řešení neexistuje.]
- D1. Číslo n je o 5 menší než trojnásobek jeho největšího lichého dělitele. Určete číslo n . [$n \in \{8, 20\}$. Označme největšího lichého dělitele čísla n jako D , má platit $n = 3D + 5$. Ale n je dělitelné číslem D , proto D dělí i číslo 5. Pro $D = 1$ máme $n = 8$ a pro $D = 5$ máme $n = 20$. V obou případech je D největším lichým dělitelem čísla n a tedy úloha má dvě řešení $n \in \{8, 20\}$.]
- D2. Číslo n je součinem tří různých prvočísel. Zvětšíme-li dvě menší z nich o 1 a největší ponecháme nezměněné, zvětší se jejich součin o 915. Určete číslo n . [63–C–I–3]
- D3. Najděte všechna přirozená čísla, která mají právě 6 dělitelů, přičemž součet druhého největšího a druhého nejmenšího z nich je 54. [65–B–II–3]

4. Pro reálná čísla a, b, c platí

$$(a + b)^2 \geq (b + c)^2, \quad (a - b)^2 \leq (b - c)^2, \quad a > b > c.$$

Kolik nejvíce z čísel a, b, c může být záporných?

(Mária Dományová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Ukažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b platí nerovnost

$$(a + b)^2 \geq (a - b)^2$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost. [Nerovnost postupně ekvivalentně upravíme tak, abychom dostali nějaké platné tvrzení. V této úloze se dopracujeme k nerovnosti $4ab \geq 0$, která zřejmě platí, protože zadaná čísla jsou nezáporná. Rozepsáním obou stran zadané nerovnosti dostaneme $a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2$ a po odečtení $a^2 + b^2$ od obou stran dostáváme $2ab \geq -2ab$, z čehož po převedení už plyne pravdivá nerovnost $4ab \geq 0$. Zadaná nerovnost platí, protože obrácením pořadí úprav se z platné nerovnosti $4ab \geq 0$ můžeme dostat až k nerovnosti $(a + b)^2 \geq (a - b)^2$.]

N2. Pro reálná čísla a, b, c platí

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2, \quad a > b > c.$$

Kolik nejvýše z čísel a , b , c může být záporných? [Nejvýše jedno. Kdyby bylo $b < 0$, pak i $c < b < 0$. Potom ale platí $c^2 = (-c)^2 > (-b)^2 = b^2$, což je ve sporu s $b^2 \geq c^2$. Záporné může být pouze c , stačí ověřit $c = -1$, $b = 2$, $a = 3$, opravdu $3^2 \geq 2^2 \geq (-1)^2$ a $3 > 2 > -1$. V úlohách požadujících najít největší/nejmenší hodnotu musíme po nalezení této hodnoty provést dva kroky – najít příklad, kdy se tato největší/nejmenší hodnota přesně dosahuje a ukázat, že ve všech ostatních případech hodnota nebude větší/nebude menší než námi nalezená hodnota.]

N3. Ukažte, že pro libovolná reálná čísla x , y platí nerovnost

$$|x + y| \geq |x| - |y|.$$

[V této úloze využijeme trojúhelníkovou nerovnost $|a| + |b| \geq |a + b|$. Přepíšeme si zadanou nerovnost do tvaru $|x + y| + |y| \geq |x|$, který nápadně připomíná trojúhelníkovou nerovnost. Potřebovali bychom, aby pro nějaké šikovně zvolené hodnoty a a b platilo, že $|a|$ a $|b|$ jsou čísla $|x + y|$ a $|y|$ (levá strana trojúhelníkové nerovnosti) a $|a + b| = |x|$ (pravá strana). To platí, pokud $a = x + y$ a $b = -y$. Vycházíme tedy z obecně platné trojúhelníkové nerovnosti, do které dosadíme $a = x + y$ a $b = -y$ a tak dostaneme $|x + y| + |y| = |x + y| + |-y| \geq |(x + y) + (-y)| = |x|$. Odečtením $|y|$ dostáváme dokazovanou nerovnost.]

D1. Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro které platí

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= y^2 + z^2, \\ z^2 + zy &= y^2 + x^2. \end{aligned}$$

[58–B–I–2]

D2. Pro kladná reálná čísla a , b , c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Dokažte, že potom platí také $c^2 + ab \leq ac + bc$. [63–C–II–3]

D3. Pro kladná reálná čísla a , b , c , d splňující nerovnosti $a > b$, $c > d$ platí

$$a + b > c + d, \quad ab < cd.$$

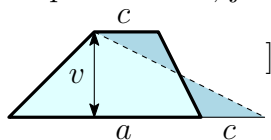
Dokažte, že potom nutně platí $a > c > d > b$. [69–A–I–1]

5. V lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$ a $|AB| > |CD|$, označme K , L po řadě středy stran AB , BC . Dále označme M průsečík úseček AL a CK . Dokažte, že přímka DM dělí lichoběžník $ABCD$ na dvě části o stejném obsahu. (Tomáš Jurík)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Proč těžnice rozděluje trojúhelník na dva trojúhelníky se stejným obsahem? [Nechť M je střed strany BC trojúhelníku ABC . Těžnice AM rozděluje stranu BC na dvě stejné úsečky, které jsou základnami trojúhelníků ABM a ACM se stejnou výškou.]

N2. Připomeňme si, jak se počítá obsah lichoběžníku a proč tomu tak je. [



- N3. Mezi dvěma rovnoběžkami p a q leží bod M tak, že jeho vzdálenost od přímky p je dvakrát větší než jeho vzdálenost od přímky q . Uvažujme body K a L ležící po řadě na přímkách p a q takové, že bod M leží na úsečce KL . Dokažte, že bod M rozděluje úsečku KL v poměru $2 : 1$. [Dokresleme kolmici na přímku p procházející bodem M a z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků (podle věty uu) vyplývá hledaný poměr.]
- N4. Mezi dvěma rovnoběžkami p a q leží bod M tak, že jeho vzdálenost od přímky p je stejná jako jeho vzdálenost od přímky q . Uvažujme body A, B ležící na přímce p body C a D ležící na přímce q tak, že bod M je průsečíkem úseček AD a BC a polopřímky AB a CD jsou souhlasné. Dokažte, že trojúhelníky ABM a DCM jsou shodné. [Úhly AMB a DMC jsou vrcholové a úhly ABM a DCM jsou střídavé, proto $\triangle ABM \sim \triangle DCM$ podle věty uu . Podobně jako v předchozí návodné úloze dokreslením kolmice na přímku p nám vzniknou shodné pravoúhlé trojúhelníky s přeponami BM a CM a tedy $|BM| = |CM|$, z čehož už plyne $\triangle ABM \simeq \triangle DCM$ podle věty usu .]
- N5. V trojúhelníku ABC označme středy jeho stran AB, BC a AC po řadě K, L a M . Průsečík úseček AL a BM označme O . Kolikrát je obsah trojúhelníku ABC větší než obsah trojúhelníku AKO ? [Je šestkrát větší. Úsečky AL a BM jsou těžnice trojúhelníku ABC a proto O je jeho těžiště. Víme, že těžiště O rozděluje úsečku CK v poměru $2 : 1$, $|KO| : |OC| = 1 : 2$ a tedy $|KO| : |KC| = 1 : 3$. Pokud označíme paty výšek z bodů O a C na stranu AB jako P a R , tak z podobnosti $\triangle KPO \sim \triangle KRC$ podle věty uu v poměru $|KO| : |KC| = 1 : 3$ vyplývá $|PO| : |RC| = 1 : 3$. Úsečky PO a RC jsou ale také výškami trojúhelníků ABO a ABC , které mají společnou základnu a proto jsou obsahy trojúhelníků ABO a ABC ve stejném poměru, tj. $S_{ABO} : S_{ABC} = 1 : 3$. Bod K je středem strany AB , proto $S_{AKO} = S_{BKO}$, z čehož nakonec plyne $S_{AKO} : S_{ABC} = 1 : 6$.]
- D1. Necht P a Q jsou po řadě středy stran BC a AC trojúhelníku ABC . Necht rovnoběžka s AC procházející středem K úsečky PQ protíná přímku BQ v bodě L a přímka PL protíná úsečku AC v bodě M . Dokažte, že M je středem úsečky AQ . [74–C–I–5]
- D2. Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD . Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC . Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$. [55–C–II–1]
- D3. Je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| : |BC| = 2 : 1$. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA jsou po řadě dány body K, L, M, N tak, že $KLMN$ je obdélník a platí $|KL| : |LM| = 3 : 1$. Vypočítejte poměr obsahů obdélníků $ABCD$ a $KLMN$. [73–C–I–6]
6. Kuchař vaří devět jídel. Na každý z pěti následujících dnů sestaví jídelní lístek obsahující ne nutně stejný počet jídel. Musí zaručit, aby si libovolných pět různých jídel z těchto devíti bylo možné během těchto pěti dnů v nějakém pořadí objednat (každý den jedno jídlo). Určete nejmenší možný součet počtů jídel ze všech pěti jídelních lístků. (Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. V sáčku jsou čtyři kuličky – bílá, červená, modrá a zelená. V každém tahu vytáhneme naraz 3 různé kuličky, podíváme se na ně a vrátíme je do sáčku. Kolikrát musíme opakovat tahy, abychom si byli jisti, že vytáhneme stejnou trojici kuliček? [Pětkrát. Ze čtyř barev vytvoříme všechny možné trojice: (bílá, červená, modrá), (bílá, červená, zelená), (bílá, modrá, zelená), (červená, modrá, zelená) – takto můžeme čtyřikrát vytáhnout různou trojici. Více různých trojic neexistuje, proto nejpozději v pátém tahu vytáhneme trojici, kterou jsme už viděli.]
- N2. Kuchař vaří tři jídla. Na každý z dvou dnů sestaví jídelní lístek obsahující ne nutně stejný počet jídel. Musí zaručit, aby si libovolná dvě různá jídla z těchto tří bylo možné během těchto dvou dnů v nějakém pořadí objednat (každý den jedno jídlo). Dokažte, že každý den musel jídelní lístek obsahovat alespoň 2 jídla a najděte takový příklad jídelních lístků na oba dni s právě dvěma jídly. [Zřejmě každý den musí kuchař vařit alespoň jedno jídlo. Označme si jídla jako A , B a C . Kdyby v některý den uvařil jen jedno jídlo, například A , tak si objednáme jídla B a C a nebude splněna požadovaná podmínka. Zbývá ověřit, že pokud kuchař uvaří první den jídla A a B a druhý den jídla A a C , pak pro libovolnou z možných dvojic jídel (A, B) , (A, C) nebo (B, C) platí, že si je můžeme v nějakém pořadí dnů objednat. Např. pro dvojici (A, B) si objednáme B první den a A druhý den, apod.]
- N3. Kuchař vaří 9 jídel (označených čísly $1, 2, \dots, 9$) a sestavil tento jídelní lístek:

Po	1	3	6	8
Ut	1	4	6	9
St	2	4	7	9
Čt	2	5	7	
Pá	3	5	8	

Kdybychom si chtěli objednat jídla 1, 2, 3, 4, 5, mohli bychom si je objednat v pořadí 1, 4, 2, 5, 3, tj. v pondělí jídlo číslo 1, v úterý jídlo číslo 4 atd. Najděte pět různých jídel tak, abychom si je nemohli objednat (každý den jedno jídlo). [Např. 1, 3, 4, 6, 8. Pokud si jídlo 1 objednáme v pondělí, tak jídla 3 i 8 si musíme objednat v pátek, což nejde. Takže jídlo 1 si musíme objednat v úterý. Potom jídlo 6 si musíme objednat v pondělí a jídlo 4 ve středu, následně jediná možnost pro jídlo 8 je pátek a jídlo 3 si už nemůžeme objednat ani v pondělí ani v pátek. Vyhovuje také například libovolná pětice obsahující jídla 1, 4, 6, 9, protože ta se vaří jen ve třech různých dnech (pondělí, úterý a středa).]

- N4. Do každého pole tabulky s 3 řádky a 4 sloupci vpište jedno z čísel 1 až 6 tak, aby platilo: "Pro libovolnou trojici navzájem různých čísel z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dokážeme z každého řádku tabulky vybrat jedno pole, aby ve vybraných polích byla tato trojice čísel". [Existuje více možných zápisů čísel do tabulky, jedno z nich je

1	2	3	4
1	2	5	6
3	4	5	6

]

- D1. Kuchař vaří j jídel. Na každý z d dnů sestaví jídelní lístek obsahující ne nutně stejný počet jídel. Musí zaručit, aby si libovolných d různých jídel z těchto j jídel bylo možné během těchto d dnů v nějakém pořadí objednat (každý den jedno jídlo). Určete nejmenší možný součet počtů jídel ze všech d jídelních lístků. [Řešení této úlohy najdete v komentářích, které budou zveřejněny na [stránkách MO](#) po termínu odevzdání úloh domácího kola.]
- D2. Každé políčko tabulky 68×68 máme obarvit jednou z tří barev (červená, modrá, bílá). Kolika způsoby to lze provést tak, aby každá trojice sousedních políček v každém řádku a v každém sloupci obsahovala políčka všech tří barev? [\[68-C-II-1\]](#)