

I. kolo kategorie Z5

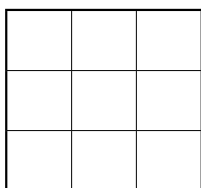
Z5–I–1

Do políček tabulky 3×3 doplňte všechna přirozená čísla od 1 do 9 tak, aby:

- součet čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný,
- číslo 1 bylo hned vpravo od čísla 6,
- číslo 7 bylo hned vlevo od čísla 5,
- číslo 8 bylo hned nad číslem 3.

Najděte všechny možnosti.

(K. Pazourek)

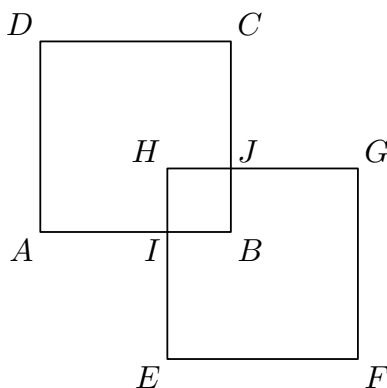


Z5–I–2

Dva stejné čtverce $ABCD$ a $EFGH$ se překrývají jako na obrázku. Společný čtyřúhelník $IBJH$ je čtverec, jehož strana je třikrát kratší než strana AB . Obvod mnohoúhelníku $AIEFGJCD$ je 180 cm.

Určete obvod čtverce $ABCD$.

(E. Semerádová)



Z5–I–3

Výpravčí na vlakovém nádraží choval pět zvířat: žirafu, pštrosa, paviána, papouška a boxera. Každý den od pondělí do pátku vítalo cestující jedno z těchto zvířat:

- pštros nevítal v pondělí, ani v pátek,
- pavián vítal hned následující den po žirafě,
- žirafa nevítal ve středu,
- papoušek vítal později v týdnu než žirafa,
- boxer první tři dny po víkendu nevítal.

Které zvíře vítalo cestující v úterý?

(P. Antošová)



Z5–I–4

Heslo k trezoru je ukryto ve slově *HUMBUK*. Různá písmena zastupují různé číslice, stejná písmena zastupují stejné číslice a platí tyto vztahy:

$$H + U = 9, \quad M \cdot B = 12, \quad B - U = 2, \quad U > M, \quad H - K = 5.$$

Najděte heslo k trezoru.

(*E. Novotná*)

Z5–I–5

Xavier, Yvona a Zina sbírají karty pokémonů. Xavier jich má dvakrát více než Zina. Yvona má třetinu Xavierova počtu karet. Některé dvě z dětí mají dohromady rovných 100 karet.

Kolik karet mají všichni tři dohromady?

(*M. Janičová*)

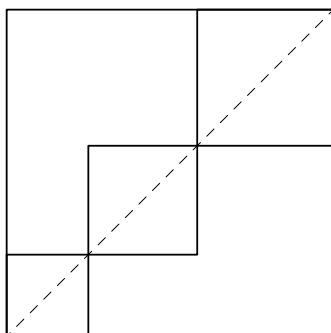
Z5–I–6

Marek měl sadu čtverců s délkami stran v centimetrech vyjádřených všemi přirozenými čísly od 1 do 9. Čtverce vybíral a skládal podle následujících pravidel:

- do největšího vybraného čtverce vložil několik menších čtverců,
- délky stran menších čtverců v centimetrech byly po sobě jdoucí čísla,
- žádné dva menší čtverce se nepřekrývaly,
- úhlopříčky menších čtverců ležely na úhlopříčce velkého čtverce a celou ji pokrývaly.

Jaké délky stran mohly mít čtverce v Markově útvaru? Najděte všechny možnosti.

(*M. Macko*)



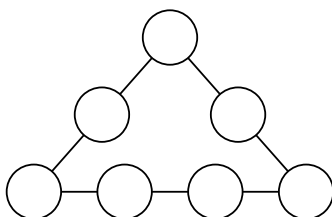
I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Na stranách trojúhelníku je sedm prázdných kroužků jako na obrázku. Vepište do každého kroužku jedno přirozené číslo od 1 do 9 tak, aby žádné číslo nebylo použito vícekrát a aby součin čísel na všech stranách byl stejný.

Která čísla mohou být na straně se čtyřmi kroužky?

(E. Novotná)

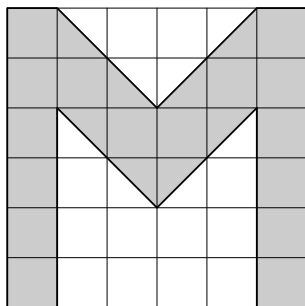


Z6–I–2

Viola ve čtvercové síti $6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ vybarvila útvar připomínající písmeno M jako na obrázku. Starší bratr Vilda poznamenal, že po vhodném otočení by útvar připomínal řecké písmeno Σ (velké sigma). Violu to zaujalo a otočený útvar nakreslila do stejné sítě přes ten původní, avšak jinou barvou.

Určete obsah části sítě vybarvené oběma barvami.

(M. Macko)



Z6–I–3

Jedna čokoláda stojí několik eur a několik desítek centů. Za 10 eur můžeme koupit nanejvýš tři čokolády, za 15 eur nanejvýš pět čokolád, za 30 eur nanejvýš jedenáct čokolád a pokaždé by nám prodavač nějaké peníze vrátil.

Jaká může být cena jedné čokolády? Najděte všechny možnosti.

(M. Macko)



Z6–I–4

Z následujících kartiček máme skládat desetinná čísla, jejichž zápis nezačíná nulou a za desetinnou čárkou je alespoň jedna číslice:

01	12	23	34	5	,	,
----	----	----	----	---	---	---

- a) Ze všech kartiček složte dvě čísla s největším možným součtem.
b) Ze všech kartiček složte dvě čísla s nejmenším možným kladným rozdílem.

V obou případech určete všechny možné dvojice vyhovujících čísel. (K. Pazourek)

Z6–I–5

V jistém trojúhelníku platí:

- jedna strana měří 10 cm,
- délky dvou stran se liší o 4 cm,
- obvod je 32 cm.

Najděte délky stran všech trojúhelníků s těmito vlastnostmi. (M. Macko)

Z6–I–6

V posluchárně je skupina žáků a lavice, z nichž každá má dvě místa. Kdyby se dívky posadily samostatně a chlapci po dvojicích, zbylo by 9 lavic neobsazených. Kdyby se chlapci posadili samostatně a dívky po dvojicích, zbylo by 12 lavic neobsazených. Kdyby všichni seděli po dvojicích, obsazených lavic by bylo stejně jako neobsazených.

Kolik lavic je v posluchárně? (M. Macko)

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Je dán čtverec, který je složen z 52 nepřekrývajících se menších čtverců. Z nich 51 má obsah 1 cm^2 a zbylý čtverec má délku strany v centimetrech vyjádřenou přirozeným číslem.

Jaký obsah může mít daný čtverec? Určete všechny možnosti. (E. Novotná)

Z7–I–2

Ve čtyřech zásuvkách bylo dohromady 62 kuliček. Postupně jsme do některých zásuvek přesouvali kuličky z ostatních tří zásuvek, a to ze všech stejně:

- nejprve po šesti kuličkách do třetí zásuvky,
- poté po třech kuličkách do druhé zásuvky,
- poté po jedné kuličce do první zásuvky.

Nakonec bylo ve druhé zásuvce o pět kuliček víc než v první, ve třetí o pět víc než ve druhé a ve čtvrté o pět víc než ve třetí.

Kolik kuliček bylo v jednotlivých zásuvkách před přesouváním? (V. Dedek)

Z7–I–3

Ciferník čarodějných hodin má obvyklý tvar kruhu, ale neobvyklý počet hodin. Čísla hodin jsou rozmístěna rovnoměrně po obvodu kruhu, je jich více než 50 a méně než 80. Proti číslu 36 vzhledem ke středu ciferníku je číslo dělitelné pěti.

Kolik hodin mohou mít čarodějné hodiny? Určete všechny možnosti. (M. Macko)

Z7–I–4

Anna a Zina bydlí na stejné ulici. Jednou vyrazily současně proti sobě od svých domů, každá svojí konstantní rychlostí. Zina zjistila, že zapomněla mobil, v osmině vzdálenosti mezi oběma domy se otočila a vrátila se ke svému domu. Tam jí maminka mobil podala a Zina se ihned vydala původním směrem. Když se dívky potkaly, byly v polovině cesty mezi svými domy a od jejich současného startu uplynulo 15 minut.

Za jak dlouho by se dívky potkaly, kdyby se Zina nevracela? (M. Janičová)

Z7–I–5

Kolik je trojic čísel a, b, c takových, že všechna čísla $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$ a $\overline{abc}$ jsou dělitelná třemi? (P. Bak)

Z7–I–6

V daném obdélníku $ABCD$ leží na straně CD bod E tak, že úsečky AE a EC jsou shodné. Osa úsečky AE prochází bodem D a protíná úhlopříčku AC v bodě G .

Určete velikost úhlu DGC . (M. Macko)



I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Klasická hrací kostka má na svých stěnách tečky v počtech od 1 do 6 tak, že součet teček na každých dvou protilehlých stěnách je sedm. Tři kamarádky si rozdělily 24 stejných hracích kostek a každá ze svých osmi kostek slepila kvádr či krychli. Žádné dva z těchto tří útvarů neměly stejné rozměry a každý byl slepen tak, aby součet teček na jeho povrchu byl co největší.

Jaké součty teček mohly kamarádky dostat?

(*M. Macko*)

Z8–I–2

Najděte všechny dvojice kladných celých čísel a a b s následujícími vlastnostmi:

- obě čísla a a b jsou menší než 50,
- součin $a \cdot b$ je dělitelný 11, ale součet $a + b$ není dělitelný 11,
- součin $a \cdot b$ je dělitelný 17, ale součet $a + b$ není dělitelný 17,
- jak součin $a \cdot b$, tak součet $a + b$ jsou dělitelné 2.

(*E. Semerádová*)

Z8–I–3

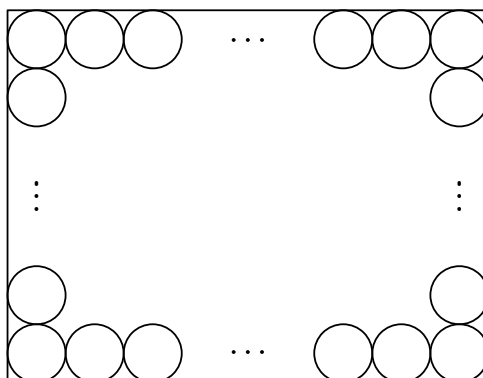
Alfons poskládal 56 kruhových etiket s poloměry 4 cm na stůl ve tvaru obdélníku tak, že platilo:

- každé strany stolu se dotýkala nějaká etiketa,
- rohové etikety se dotýkaly dvou stran stolu,
- ostatní etikety se dotýkaly jedné strany stolu,
- sousední etikety se dotýkaly navzájem.

Na druhý stůl stejných rozměrů začal skládat kruhové etikety s poloměry 3 cm a snažil se dodržet všechny podmínky ze stolu prvního. Po uložení celé řady podél jedné strany zjistil, že použil o 6 etiket více než podél stejné strany na prvním stole.

Zjistěte rozměry stolu.

(*M. Macko*)



Z8–I–4

V prvním ročníku naší školy jsou dvě třídy — 1. A a 1. B. V 1. A je o polovinu více chlapců než v 1. B, o čtvrtinu více děvčat než v 1. B a celkově o třetinu více žáků než v 1. B.

Jakou část všech žáků prvního ročníku tvoří děvčata? (J. Tkadlec)

Z8–I–5

Honza, Mikuláš a Víťa si vytyčili cyklokrosový okruh. Honza odstartoval závod Mikuláše a Víti na 12 okruhů. Když Mikuláš poprvé projížděl kolem Honzy, vydal se Honza v protisměru naproti Víťovi, který byl pozadu. Honza ušel 150 metrů, než Víťu potkal. V tom okamžiku měl Víťa zdolánu čtrnáctinu celkové délky závodu.

Kolik metrů měřil jeden okruh? (L. Dedková)

Z8–I–6

Jsou dány body X , Y a úsečka PQ jako na obrázku. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby platilo:

- poloměr kružnice opsané trojúhelníku BCD je roven délce úsečky PQ ,
- bod X leží na úhlopříčce BD a bod Y leží na úhlopříčce AC ,
- body X a Y jsou souměrné podle osy rovnoběžné s přímkou AB .

Popište a zdůvodněte svoji konstrukci. (M. Janičová)



I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Do políček tabulky 5×5 doplňte čísla od 1 do 5 tak, aby:

- každé z čísel bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou,
- součet deseti čísel v šedě vyznačené části byl 21.

Najděte všechny možnosti.

(J. Tkadlec)

Z9–I–2

Pro reálná čísla d, e, s, t a v platí:

$$d \cdot v \cdot e = 2,$$

$$s \cdot e \cdot s \cdot t = 6,$$

$$d \cdot e \cdot v \cdot e \cdot t = 9.$$

Určete všechny možné hodnoty součinu $d \cdot v \cdot e \cdot s \cdot t \cdot e$.

(J. Tkadlec)

Z9–I–3

Jsou dány soustředné kružnice k, l a body A, B, C, D tak, že platí:

- poloměr kružnice k je 10 cm a poloměr kružnice l je větší,
- úsečka AB je tětivou kružnice k a měří 16 cm,
- úsečka CD je tětivou kružnice l , je kolmá k tětivě AB a prochází bodem B ,
- trojúhelník ABC je rovnoramenný.

Jaká může být délka tětivy CD ? Určete všechny možnosti.

(M. Macko)

Z9–I–4

Ve vstupní hale kina bylo několik jednomístných a několik trojmístných sedaček. Jednou si uvaděčka všimla, že v hale sedělo 25 lidí a 10 sedaček bylo prázdných. Jindy si uvaděčka všimla, že v hale sedělo 14 lidí a 7 sedaček bylo prázdných. V obou případech byla každá trojmístná sedačka buď prázdná, nebo plně obsazená.

Kolik jednomístných a kolik trojmístných sedaček mohlo být v hale? Najděte všechny možnosti.

(M. Macko)



Z9–I–5

Na tabuli je napsáno číslo 100. Dva kamarádi hrají hru podle následujících pravidel:

- Hráči se u tabule pravidelně střídají.
- V každém tahu hráč číslo smaže a nahradí číslem novým.
- Nové číslo je z předchozího vytvořeno buď odečtením jedné, nebo vydělením dvěma.
- Všechna napsaná čísla jsou přirozená.
- Vyhrává hráč, který napíše číslo 1.

Ukázalo se, že jeden z hráčů může postupovat tak, aby zaručeně vyhrál. Který hráč to je a kolik nejméně tahů k výhře potřebuje? (I. Jančígová)

Z9–I–6

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a jeho vnitřní bod P s těmito vlastnostmi:

- $|BC| = |CP| = |PD|$,
- $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PCB|$,
- $|\sphericalangle BAP| = 15^\circ$.

Určete velikost úhlu APB .

(P. Bak)