

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii A

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástinu řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Okolo kulatého stolu sedí 76 rytířů. Každý z nich má právě čtyři spojence, a to dva nejbližší sousedy po levici a dva nejbližší sousedy po pravici. Kolika způsoby lze rytíře rozdělit do dvou skupin, aby každý rytíř měl ve své skupině právě dva spojence?*

(Jozef Rajník)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Každý z 8 rytířů kolem kulatého stolu zná své dva sousedy a nikoho jiného. Kolika způsoby lze rytíře rozdělit na dvě skupiny tak, aby každý měl ve své skupině právě jednoho známého?
- N2. Řešte předchozí úlohu pro 10 rytířů namísto 8.
- N3. Každý ze 40 rytířů kolem kulatého stolu zná své dva sousedy a nikoho jiného. Kolika způsoby lze rozdělit rytíře na hrdiny a padouchy tak, aby každý rytíř znal právě jednoho hrdinu?
- N4. Ve frontě na oběd stojí $n \geq 4$ žáků. Každý z nich se zná pouze se dvěma žáky, které má přímo před sebou, a dvěma, které má přímo za sebou (žáci na krajích mají známých méně). Pro která n lze žáky rozdělit do dvou skupin, aby měl každý ve své skupině právě 2 známé?
- D1. Jistý panovník pozval na oslavu svých narozenin 28 rytířů. Každý z rytířů měl mezi ostatními právě tři nepřátele. Ukažte, že panovník může rytíře rozsadit ke dvěma stolům tak, aby každý rytíř seděl u stejného stolu nejvýše s jedním nepřítelem. Ukažte, že v případě libovolného takového rozesazení sedí u každého stolu nejvýše 16 rytířů. (Nepřítelství je vzájemný vztah: Je-li A nepřítelem B , pak i B je nepřítelem A .)
- D2. Na večírku se setkala n osob, přičemž $n \geq 2$. Každá osoba nemá ráda právě jednu jinou osobu přítomnou na večírku (ale ne nutně vzájemně, tj. může se stát, že A má rád B i přesto, že B nemá rád A) a má ráda všechny ostatní. Dokažte, že hosty lze usadit ke třem stolům takovým způsobem, aby každý host měl rád všechny osoby u svého stolu.
- D3. Podél kružnice je rozmístěno 16 reálných čísel se součtem 7. Dokažte, že existuje úsek pěti sousedních čísel se součtem alespoň 2. Určete nejmenší k takové, že v popsané situaci lze vždy najít úsek k sousedních čísel se součtem alespoň 3.

2. Každá ze tří přímek dělí daný kruh na dvě úseče, jejichž obsahy jsou v poměru 2 : 1. Tato trojice přímek dělí kruh na sedm částí. Dokažte, že obsah některé části je roven součtu obsahů jiných dvou nebo tří (různých) částí. (Tomáš Bárta)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Dvě tětivy dělí kruh o obsahu 1 na čtyři části, přičemž první tětiva dělí kruh na dvě úseče v poměru obsahů 1 : 2 a druhá tětiva dělí kruh na dvě úseče v poměru obsahů 1 : 3. Dokažte, že obsah některé ze 4 částí je o $\frac{5}{12}$ větší než obsah jiné z částí.
- N2. Délky stran trojúhelníku ABC tvoří aritmetickou posloupnost. Označme K , L , M body dotyku kružnice vepsané po řadě se stranami AB , BC , CA . Dokažte, že vzdálenosti $|AK|$, $|BL|$, $|CM|$ (v nějakém pořadí) také tvoří aritmetickou posloupnost. Náповěda: platí $|AK| = |AM|$, $|BK| = |BL|$, $|CL| = |CM|$.
- N3. Dvě tětivy dělí kruh na čtyři části, přičemž tři z těchto částí mají obsahy 5, 7 a 13. Určete obsah zbývajících částí, jestliže jedna z tětiv prochází středem kruhu. Určete všechny možnosti.
- D1. Každé hraně čtyřstěnu přiřadíme jedno reálné číslo tak, aby každá stěna měla stejný součet čísel svých tří hran. Kolik nejvíce ze šesti čísel přiřazených hranám může být navzájem různých?
- D2. Každé hraně čtyřstěnu přiřadíme kladné reálné číslo tak, aby některé dvě stěny měly stejný součet čísel svých tří hran a zbývajících dvě stěny měly stejný součin čísel svých tří hran. Kolik nejvýše ze šesti čísel přiřazených hranám může být různých?
3. V trojúhelníku ABC jsou střed kružnice vepsané a těžiště stejně vzdálené od přímky BC . Dokažte, že poloměr kružnice připsané straně BC je roven velikosti výšky z vrcholu A . (Kružnice připsaná straně BC je kružnice, která se dotýká strany BC a polopřímek opačných k BA a CA .) (Zdeněk Pezlar)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Zopakujte si pojem stejnolehlosti. Např. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/geom_zobr/?page=vz12 nebo *J. Šedivý Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, ŠMM, 1980.*

- N1. Pro dané dvě protínající se neshodné kružnice sestrojte jejich společné tečny.
- N2. Trojúhelník ABC se stranami délek $a = 7$, $b = 9$, $c = 12$ má obsah $S = 14\sqrt{5}$ (jak plyne z Heronova vzorce). Vypočtěte a) výšku v_a na stranu a , b) poloměr ρ kružnice vepsané, c) poloměr ρ_a kružnice připsané straně BC .
- N3. Střední příčka trojúhelníku ABC rovnoběžná s jeho stranou BC je tečnou kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Vyjádřete a pomocí b a c .
- N4. Přímka p je rovnoběžná se stranou BC trojúhelníku ABC a prochází jeho těžištěm. Označme K , L průsečíky přímky p se stranami AB , AC trojúhelníku. Jaký je poměr poloměrů kružnic k , l vepsaných trojúhelníkům ABC a AKL ?
- N5. V situaci z předchozí úlohy označme q rovnoběžku s AC procházející středem kružnice k a Q průsečík q a BC . Dále označme r rovnoběžku s AC procházející

středem kružnice l a R průsečík r a KL . Dokažte, že přímka QR prochází bodem A .

- D1. V trojúhelníku ABC označme D bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC a E bod dotyku kružnice připsané ke straně BC s touto stranou. Dokažte, že střed DE splývá se středem BC .
- D2. V situaci z předešlé úlohy necht' je F takový bod kružnice vepsané trojúhelníku ABC , že FD je její průměr. Dokažte, že body A , F a E leží na jedné přímce.
- D3. Daný je trojúhelník ABC s obsahem S . Uvnitř trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy stran trojúhelníku ABC , je libovolně zvolený bod O . Označme A' , B' , C' po řadě obrazy bodů A , B , C ve středové souměrnosti podle bodu O . Dokažte, že šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.
- D4. Je dán trojúhelník ABC . Označme T_a bod dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranou BC a E_a střed kružnice připsané ke straně BC . Podobně definujeme body T_b , E_b a T_c , E_c pro strany CA a AB . Dokažte, že přímky T_aE_a , T_bE_b a T_cE_c procházejí jedním bodem.

4. Najděte všechny dvojice prvočísel p , q takové, že $p > q$ a platí

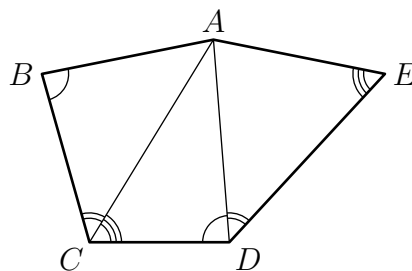
$$(p + q + 1)(n(p - 1, q - 1) + 1) = 11pq.$$

Zde $n(a, b)$ označuje nejmenší společný násobek čísel a a b . (Tomáš Jurík)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

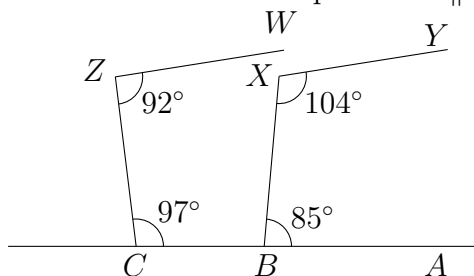
- N1. Řešte v přirozených číslech rovnici $(a + b + 1)(a + 5b + 8) = 76$.
- N2. Řešte $(p + q)(p + r + 1) = 143$ pro prvočísla $p > q > r$.
- N3. Určete všechna kladná celá čísla a s vlastností: $3a + 14$ je násobkem čísla $a + 2$.
- D1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a , b , pro která platí $a + b + D(a, b) + n(a, b) = 50$.
- D2. Určete všechny dvojice a , b kladných celých čísel, pro která platí $a \cdot n(a, b) = 4 \cdot D(a, b)$.
- D3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (a, b) takových, že $n(a, b) + D(a, b) = 63$.
- D4. Čtyři různá prvočísla p , q , r , s splňují rovnost $72 + p = q \cdot r \cdot s$. Určete nejmenší možnou hodnotu p .
- D5. Najděte všechna kladná přirozená čísla taková, že nejsou mocninou čísla 2 a rovnají se součtu 3násobku svého největšího lichého dělitele a 5násobku svého nejmenšího lichého dělitele většího než 1.

5. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ADC|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EDA|$ a $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle DCA|$. Dokažte, že $CD \parallel BE$. (Patrik Bak)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte, že v situaci na obrázku platí $XY \parallel ZW$.



- N2. Uvažujme trojúhelník ABC s kružnicí k jemu opsanou a druhý trojúhelník XYZ s opsanou kružnicí l . Necht' platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|$. Pak jsou kružnice k a l shodné, právě když $|AC| = |XZ|$.
- N3. Buď ABC trojúhelník, k kružnice jemu opsaná a H průsečík jeho výšek. Označme H' obraz bodu H v osové souměrnosti podle BC . Dokažte, že $H' \in k$.
- D1. Reimova věta říká: Necht' body A, B, Y, X leží na jedné kružnici. Na přímkách AX a BY jsou po řadě dány body C a D . Pak body C, D, Y, X leží na jedné kružnici právě tehdy, když přímky AB, CD jsou rovnoběžné. Dokažte ji pro případ, že $ABDC$ je čtyřúhelník, X leží na úsečce AC a Y na úsečce BD .
- D2. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle AED|$. Na stranách AB a AE existují postupně body P a Q tak, že $|AP| = |BC| = |QE|$ a $|AQ| = |BP| = |DE|$. Dokažte, že $CD \parallel PQ$.
- D3. Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má všechny strany stejně dlouhé. Úhlopříčky AD a EC se protínají v bodě S tak, že $|\sphericalangle ASE| = 60^\circ$. Dokažte, že pětiúhelník $ABCDE$ má některé dvě strany rovnoběžné.
6. Pro kladné celé číslo m označme $g(m)$ nejmenší počet geometrických posloupností, mezi jejichž členy jsou zastoupeny všechny dělitele čísla m . Určete všechna kladná celá čísla n , pro která platí $g(n!) = g((n+1)!)$. Řešte pro geometrické posloupnosti a) s racionálními kvocienty, b) s reálnými kvocienty. (Zdeněk Pezlar)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Dokážete pokrýt všechny dělitele čísla 6 dvěma geometrickými posloupnostmi? Dokážete pokrýt všechny dělitele čísla 24 dvěma geometrickými posloupnostmi?
- N2. Najděte nekonečně mnoho čísel, jejichž všechny dělitele lze pokrýt dvěma geometrickými posloupnostmi, ale jednou geometrickou posloupností nikoli.
- N3. Má-li číslo m prvočíselný rozklad $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, pak počet jeho dělitelů je $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$. Dokažte.

- N4. Dokažte, že v prvočíselném rozkladu čísla $n!$ je mocnina dvojky větší nebo rovna mocnině libovolného jiného prvočísla.
- N5. Obdélník je rozdělen na 3×5 jednotkových čtverečků. Kolik nejméně potřebujeme přímek, aby každým vrcholem každého čtverečku procházela aspoň jedna přímka?
- N6. Čísla a^4 a a^7 jsou racionální. Musí být a také racionální? Pokud jsou racionální čísla b^4 a b^6 , musí být racionální i b ?
- N7. (*Eukleidův algoritmus pro hledání největšího společného dělitele alespoň dvou čísel*) Pro každou konečnou posloupnost $d_1, d_2, \dots, d_n$ kladných celých čísel opakuje následující postup: v každém kroku vezmeme dva členy a, b posloupnosti, takové že $a > b$ (pokud takové existují) a větší člen a nahradíme jejich rozdílem $a - b$. Dokažte, že algoritmus skončí po konečně mnoha krocích, a to ve chvíli, kdy budou všechna čísla rovna největšímu společnému děliteli původních čísel $d_1, \dots, d_n$.
- D1. Pro celé číslo $n \geq 3$ definujeme posloupnost $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ jako posloupnost exponentů v prvočíselném rozkladu $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ jsou prvočísla. Nalezněte všechna celá čísla $n \geq 3$, pro která je $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ geometrická posloupnost.
- D2. Předpokládejme, že $a_1 < a_2 < \dots < a_{2024}$ je aritmetická posloupnost kladných celých čísel a posloupnost $b_1 < b_2 < \dots < b_{2024}$ je geometrická posloupnost kladných celých čísel. Určete maximální možný počet celých čísel, která se mohou vyskytovat v obou posloupnostech zároveň, a to přes všechny možné volby těchto dvou posloupností.
- D3. Na tabuli je napsáno 2026 (ne nutně různých) celých čísel větších než 1. V každém tahu Konfucius vybere dvě čísla $m > 1$ a $n > 1$ z různých míst na tabuli a nahradí je čísla $D(m, n)$ a $\frac{n(m, n)}{D(m, n)}$. Tak pokračuje, dokud může. a) Dokažte, že nezávisle na postupu Konfucius po konečném počtu tahů skončí, tj. na tabuli zbyde jediné číslo větší než jedna. b) Dokažte, že hodnota tohoto čísla je také nezávislá na Konfuciově postupu.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástinem řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Okolo kulatého stolu sedí 76 rytířů. Každý z nich má právě čtyři spojence, a to dva nejbližší sousedy po levici a dva nejbližší sousedy po pravici. Kolika způsoby lze rytíře rozdělit do dvou skupin, aby každý rytíř měl ve své skupině právě dva spojence?*
(Jozef Rajník)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Každý z 8 rytířů kolem kulatého stolu zná své dva sousedy a nikoho jiného. Kolika způsoby lze rytíře rozdělit na dvě skupiny tak, aby každý měl ve své skupině právě jednoho známého? [Dvěma způsoby. Pokud jsou dva sousedé ve stejné skupině, pak dva rytíři nalevo od nich jsou nutně oba v té druhé. Očíslujme nyní rytíře čísla 1 až 8 po směru hodinových ručiček. Pokud je 1 ve skupině s 2 (označme ji A), pak 3, 4 jsou v opačné skupině (označme ji B) a dále nutně 5, 6 jsou v A a 7, 8 jsou v B a toto rozdělení vyhovuje. Podobně pokud je 1 ve skupině s 8, získáme druhé možné rozdělení. Poznamenejme, že rytíři jsou navzájem rozlišitelní, proto je můžeme očíslovat. Naopak skupiny rozlišitelné nejsou – pokud bychom zaměnili skupiny A a B , dostali bychom stejné rozdělení. Proto jsme jako A označili tu skupinu, ve které se nachází rytíř 1.]
- N2. Řešte předchozí úlohu pro 10 rytířů namísto 8. [Ani jedním způsobem. Pokud by bylo možné rytíře požadovaným způsobem rozdělit, museli by rytíři tvořit dvojice podobně jako v předchozí úloze, tj. někteří dva sousední rytíři by byli ve skupině A , další dvojice nutně ve skupině B a tak dále. Protože je však dvojice lichý počet, byla by poslední dvojice ve stejné skupině jako ta první, což nelze, protože obě dvojice spolu sousedí a nutně by pak existoval rytíř, který by měl ve své skupině oba své známé.]
- N3. Každý ze 40 rytířů kolem kulatého stolu zná své dva sousedy a nikoho jiného. Kolika způsoby lze rozdělit rytíře na hrdiny a padouchy tak, aby každý rytíř znal právě jednoho hrdinu? [Čtyřmi. Podobně jako v předchozích úlohách se musí kolem stolu pravidelně střídat páry hrdinů s páry padouchů. Protože jsou ale skupiny rozlišitelné (jedni jsou hrdinové a druzí padouši), dostáváme na rozdíl od první návodné úlohy 4 možnosti: 1. hrdinové jsou rytíři 1 a 2, 2. hrdinové jsou rytíři 2 a 3, 3. rytíři 3 a 4, 4. rytíři 4 a 5.]
- N4. Ve frontě na oběd stojí $n \geq 4$ žáků. Každý z nich se zná pouze se dvěma žáky, které má přímo před sebou, a dvěma, které má přímo za sebou (žáci na krajích mají známých méně). Pro která n lze žáky rozdělit do dvou skupin, aby měl každý ve své skupině právě 2 známé? [Pro n dělitelná třemi. První žák musí být ve skupině s oběma žáky za ním, jsou to jeho jediní známí. Tito dva už mají ve skupině 2 známé, takže další dva ve frontě (4. a 5.) musí být v druhé skupině, a také 6., jinak by tam 4. neměl dva známé. Ze stejného důvodu musí 7. až 9. žák být v první skupině, 10. až 12. ve druhé a tak dále. Žáky je tedy potřeba rozdělovat do dvou skupin po trojicích. Protože stejný proces musí fungovat i když začneme od posledního žáka, musí být n dělitelné třemi. Pro každé n dělitelné třemi bude takovéto rozdělení po trojicích splňovat podmínku ze zadání.]
- D1. Jistý panovník pozval na oslavu svých narozenin 28 rytířů. Každý z rytířů měl mezi ostatními právě tři nepřátele. Ukažte, že panovník může rytíře rozsadit ke dvěma stolům tak, aby každý rytíř seděl u stejného stolu nejvýše s jedním

nepřítelem. Ukažte, že v případě libovolného takového rozesazení sedí u každého stolu nejvýše 16 rytířů. (Nepřátelství je vzájemný vztah: Je-li A nepřítelem B , pak i B je nepřítelem A .) [51–C–I–6]

D2. Na večítku se setkala n osob, přičemž $n \geq 2$. Každá osoba nemá ráda právě jednu jinou osobu přítomnou na večítku (ale ne nutně vzájemně, tj. může se stát, že A má rád B i přesto, že B nemá rád A) a má ráda všechny ostatní. Dokažte, že hosty lze usadit ke třem stolům takovým způsobem, aby každý host měl rád všechny osoby u svého stolu. [11. CPSJ, T3]

D3. Podél kružnice je rozmístěno 16 reálných čísel se součtem 7. Dokažte, že existuje úsek pěti sousedních čísel se součtem alespoň 2. Určete nejmenší k takové, že v popsané situaci lze vždy najít úsek k sousedních čísel se součtem alespoň 3. [60–B–S–2]

2. Každá ze tří přímek dělí daný kruh na dvě úseče, jejichž obsahy jsou v poměru 2 : 1. Tato trojice přímek dělí kruh na sedm částí. Dokažte, že obsah některé části je roven součtu obsahů jiných dvou nebo tří (různých) částí. (Tomáš Bárta)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dvě tětivy dělí kruh o obsahu 1 na čtyři části, přičemž první tětiva dělí kruh na dvě úseče v poměru obsahů 1 : 2 a druhá tětiva dělí kruh na dvě úseče v poměru obsahů 1 : 3. Dokažte, že obsah některé ze 4 částí je o $\frac{5}{12}$ větší než obsah jiné z částí. [Označme x obsah průniku dvou úsečí s obsahy $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$. Pak všechny části mají velikosti x , $\frac{1}{3} - x$, $\frac{1}{4} - x$ a $1 - \frac{1}{3} - (\frac{1}{4} - x) = \frac{5}{12} + x$, tj. poslední část je o $\frac{5}{12}$ větší než první část.]

N2. Délky stran trojúhelníku ABC tvoří aritmetickou posloupnost. Označme K , L , M body dotyku kružnice vepsané po řadě se stranami AB , BC , CA . Dokažte, že vzdálenosti $|AK|$, $|BL|$, $|CM|$ (v nějakém pořadí) také tvoří aritmetickou posloupnost. Náповěda: platí $|AK| = |AM|$, $|BK| = |BL|$, $|CL| = |CM|$. [Označme $x = |AK| = |AM|$, $y = |BK| = |BL|$, $z = |CL| = |CM|$ a písmeny a , b , c délky stran trojúhelníku, přičemž $a = b - d$ a $c = b + d$, kde d je difference aritmetické posloupnosti. Platí tedy $x + y = c = b + d$, $y + z = a = b - d$, $z + x = b$. Sečtením prvních dvou rovnic a odečtením třetí dostáváme postupně $(x + y) + (y + z) - (x + z) = (b + d) + (b - d) - b$, tj. $y = b/2$. Podobně sečtením jiné dvojice rovnic a odečtením zbývajících získáme $z = b/2 - d$ a $x = b/2 + d$, tj. z , y , x tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí d .]

N3. Dvě tětivy dělí kruh na čtyři části, přičemž tři z těchto částí mají obsahy 5, 7 a 13. Určete obsah zbývajících částí, jestliže jedna z tětiv prochází středem kruhu. Určete všechny možnosti. [11, 15. Tětiva procházející středem dělí kruh na dvě shodné úseče, tj. součet obsahů dvou částí je polovina obsahu kruhu. Obsah x čtvrté části musí splňovat jednu ze tří rovnic: $5 + 13 = 7 + x$, $7 + 13 = 5 + x$ nebo $5 + 7 = 13 + x$. Z prvních dvou rovnic dostáváme řešení 11, resp. 15, třetí rovnice nemá kladné řešení. Rozmysleme si, že k vypočteným číslům skutečně existují kruhy a tětivy. V prvním případě má kruh obsah 36, v něm vezmeme tětivu, která ho rozděluje na úseče s obsahy $7 + 5 = 12$ a $13 + 11 = 24$. Otáčením

tětivy procházející středem zajistíme, aby tato tětiva rozdělila úseč o obsahu 12 na dvě části s obsahy 5 a 7. Zbývající dvě části už mají nutně obsahy 13 a 11. Podobně v případě druhého řešení.]

- D1. Každé hraně čtyřstěnu přiřadíme jedno reálné číslo tak, aby každá stěna měla stejný součet čísel svých tří hran. Kolik nejvíce ze šesti čísel přiřazených hranám může být navzájem různých? [75–B–I–1]
- D2. Každé hraně čtyřstěnu přiřadíme kladné reálné číslo tak, aby některé dvě stěny měly stejný součet čísel svých tří hran a zbývající dvě stěny měly stejný součet čísel svých tří hran. Kolik nejvýše z šesti čísel přiřazených hranám může být různých? [75–B–III–1]
3. V trojúhelníku ABC jsou střed kružnice vepsané a těžiště stejně vzdálené od přímky BC . Dokažte, že poloměr kružnice připsané straně BC je roven velikosti výšky z vrcholu A . (Kružnice připsaná straně BC je kružnice, která se dotýká strany BC a polopřímek opačných k BA a CA .) (Zdeněk Pezlar)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Zopakujte si pojem stejnolehlosti. Např. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/geom_zobr/?page=vz12 nebo *J. Šedivý Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, ŠMM, 1980.*

- N1. Pro dané dvě protínající se neshodné kružnice sestrojte jejich společné tečny. [Obvyklá konstrukce je založena na faktu, že společné tečny se protínají ve středu stejnolehlosti obou kružnic, tom, který leží vně kružnic. Tento střed sestrojíme takto: pro dané kružnice k, k' se středy S, S' sestrojíme rovnoběžky p, p' procházející po řadě body S, S' , které nejsou rovnoběžné s SS' . Označme X průnik p a k a analogicky X' průnik p' a k' tak, aby $SS'X'X$ byl lichoběžník. Průsečík přímky XX' s přímkou SS' je hledaný střed stejnolehlosti. Body dotyku tečen s kružnicemi pak sestrojíme pomocí Thaletových kružnic. (Popis konstrukce je stručný, protože se jedná o běžné středoškolské učivo.)]
- N2. Trojúhelník ABC se stranami délek $a = 7, b = 9, c = 12$ má obsah $S = 14\sqrt{5}$ (jak plyne z Heronova vzorce). Vypočtěte a) výšku v_a na stranu a , b) poloměr ρ kružnice vepsané, c) poloměr ρ_a kružnice připsané straně BC . [a) $4\sqrt{5}$, b) $\sqrt{5}$, c) $2\sqrt{5}$. Ze známých vzorců máme $v_a = \frac{2S}{a}, \rho = \frac{2S}{a+b+c}$. Nyní víme, že $2\rho = \frac{1}{2}v_a$. Proto je tečna ke kružnici vepsané rovnoběžná s BC (a různá od BC) střední příčkou trojúhelníku ABC . Protože stejnolehlost zobrazující kružnici vepsanou na kružnici připsanou zobrazuje tuto střední příčku na stranu BC , je koeficient stejnolehlosti roven 2, tj. $\rho_a = 2\rho = 2\sqrt{5}$.]
- N3. Střední příčka trojúhelníku ABC rovnoběžná s jeho stranou BC je tečnou kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Vyjádřete a pomocí b a c . [$a = \frac{1}{3}(b+c)$. Ze zadání plyne $2\rho = \frac{1}{2}v_a$, což dohromady s $S = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}\rho(a+b+c)$ dává výsledek.]
- N4. Přímka p je rovnoběžná se stranou BC trojúhelníku ABC a prochází jeho těžištěm. Označme K, L průsečíky přímky p se stranami AB, AC trojúhelníku. Jaký je poměr poloměrů kružnic k, l vepsaných trojúhelníkům ABC a AKL ?

- [3 : 2. Trojúhelník ABC je obrazem trojúhelníka AKL v stejnolehlosti se středem A . V téhle stejnolehlosti se zobrazí těžiště T na střed strany BC , proto je její koeficient 3 : 2. Taktéž je kružnice k obrazem kružnice l . Proto jsou jejich poloměry v poměru 3 : 2.]
- N5. V situaci z předchozí úlohy označme q rovnoběžku s AC procházející středem kružnice k a Q průsečík q a BC . Dále označme r rovnoběžku s AC procházející středem kružnice l a R průsečík r a KL . Dokažte, že přímka QR prochází bodem A . [Nechť S_k a S_l postupně značí středy kružnic k a l . Ve stejnolehlosti z předešlé úlohy je přímka q procházející bodem S_k obrazem přímky rovnoběžné s q procházející bodem S_l , tedy přímky r . Proto je i průsečník přímek BC a q , tj. bod Q obrazem průsečíku jejich vzorů, tedy přímek KL a r , tj. bodu R . Z vlastnosti stejnolehlosti pak obraz Q , vzor R a střed stejnolehlosti A leží na přímce.]
- D1. V trojúhelníku ABC označme D bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC a E bod dotyku kružnice připsané ke straně BC s touto stranou. Dokažte, že střed DE splývá se středem BC . [Stačí dokázat, že $|BE| = |CD|$. Označme K, L po řadě body dotyku kružnice připsané s polopřímkami AB, AC . Protože $|AK| = |AL|$ a $|AK| = |AB| + |BK| = |AB| + |BE|$ a podobně $|AL| = |AC| + |CE|$, je $|AK| = |AL| = s$ polovina obvodu trojúhelníku a $|BE| = |AK| - |AB|$. Rovnost $|CD| = s - |AB|$ je známější a dokazuje se podobně.]
- D2. V situaci z předešlé úlohy necht je F takový bod kružnice vepsané trojúhelníku ABC , že FD je její průměr. Dokažte, že body A, F a E leží na jedné přímce. [Kružnice připsané ke straně BC je obrazem kružnice vepsané, přičemž střed stejnolehlosti se nachází v průsečíku společných tečen, tedy v bodě A . V této stejnolehlosti se bod F zobrazí na bod E , proto body A, E, F leží na přímce.]
- D3. Daný je trojúhelník ABC s obsahem S . Uvnitř trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy stran trojúhelníku ABC , je libovolně zvolený bod O . Označme A', B', C' po řadě obrazy bodů A, B, C ve středové souměrnosti podle bodu O . Dokažte, že šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$. [60–A–II–2]
- D4. Je dán trojúhelník ABC . Označme T_a bod dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranou BC a E_a střed kružnice připsané ke straně BC . Podobně definujeme body T_b, E_b a T_c, E_c pro strany CA a AB . Dokažte, že přímky T_aE_a, T_bE_b a T_cE_c procházejí jedním bodem. [PraSe 11/12, 1. série, úl. 3]

4. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q takové, že $p > q$ a platí

$$(p + q + 1)(n(p - 1, q - 1) + 1) = 11pq.$$

Zde $n(a, b)$ označuje nejmenší společný násobek čísel a a b .

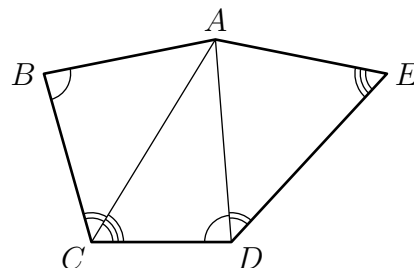
(Tomáš Jurík)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Řešte v přirozených číslech rovnici $(a + b + 1)(a + 5b + 8) = 76$. [$76 = 2 \cdot 2 \cdot 19$. Obě závorky jsou přirozená čísla větší než 2, tj. jediná možnost rozkladu na součin je $4 \cdot 19$. Druhá závorka je větší než první, tj. $a + 5b + 8 = 19, a + b + 1 = 4$, odkud snadno dopočteme $a = 1, b = 2$.]

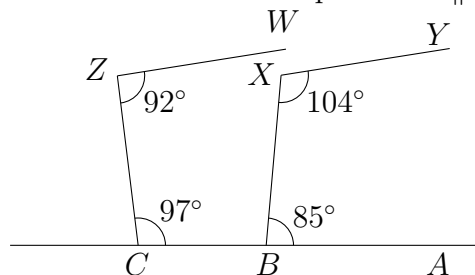
- N2. Řešte $(p+q)(p+r+1) = 143$ pro prvočísla $p > q > r$. [Nemá řešení. $143 = 11 \cdot 13$. Protože obě závorky jsou větší než 1 a ta levá je větší nebo rovná pravé, je nutně $p+q = 13$ a $p+r+1 = 11$. Pak je ale jedno z prvočísel p, q sudé, což je spor s tím, že $p > q > r$ a r je prvočíslo.]
- N3. Určete všechna kladná celá čísla a s vlastností: $3a+14$ je násobkem čísla $a+2$. [2 a 6. Napišme si $3a+14 = 3(a+2) + 8$. Evidentně $3(a+2)$ je násobkem $a+2$. Pak ale $3a+14$ je násobkem $a+2$ právě tehdy, když je 8 násobkem $a+2$. Tj. $a+2$ nabývá jedné z hodnot 1, 2, 4, 8.]
- D1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b , pro která platí $a+b+D(a,b) + n(a,b) = 50$. [50-C-II-1]
- D2. Určete všechny dvojice a, b kladných celých čísel, pro která platí $a \cdot n(a,b) = 4 \cdot D(a,b)$. [62-C-S-2]
- D3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (a,b) takových, že $n(a,b)+D(a,b) = 63$. [50-C-I-3]
- D4. Čtyři různá prvočísla p, q, r, s splňují rovnost $72+p = q \cdot r \cdot s$. Určete nejmenší možnou hodnotu p . [72-C-II-4]
- D5. Najděte všechna kladná přirozená čísla taková, že nejsou mocninou čísla 2 a rovnají se součtu 3násobku svého největšího lichého dělitele a 5násobku svého nejmenšího lichého dělitele většího než 1. [63-A-II-1]

5. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ADC|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EDA|$ a $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle DCA|$. Dokažte, že $CD \parallel BE$. (Patrik Bak)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Dokažte, že v situaci na obrázku platí $XY \parallel ZW$.



[Buď U průsečík polopřímek WZ a AC . Dopočítáním úhlů v trojúhelníku UCZ získáme $|\sphericalangle ZUC| = 9^\circ$. Podobně $|\sphericalangle BVX| = 9^\circ$, kde V je průsečík polopřímek AB a YX . Tyto dva úhly jsou tedy souhlasné, z čehož plyne rovnoběžnost přímek.]

- N2. Uvažujme trojúhelník ABC s kružnicí k jemu opsanou a druhý trojúhelník XYZ s opsanou kružnicí l . Necht' platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|$. Pak jsou kružnice k a l shodné, právě když $|AC| = |XZ|$. [Pokud se rovnají obvodové úhly, rovnají se

i středové úhly, tj. $|\sphericalangle AS_k C| = |\sphericalangle XS_l Z|$, kde S_k, S_l jsou středy obou kružnic. Navíc jsou oba trojúhelníky $AS_k C, XS_l Z$ rovnoramenné, musí být tedy nutně podobné (*uu*). Pokud jsou stejné poloměry obou kružnic, pak jsou shodná ramena obou trojúhelníků, tj. trojúhelníky jsou shodné a $|AC| = |XZ|$. Pokud naopak $|AC| \neq |XZ|$, pak jsou shodné základny obou trojúhelníků, tedy jsou trojúhelníky shodné, a tudíž jsou stejné poloměry obou kružnic.]

- N3. Buď ABC trojúhelník, k kružnice jemu opsaná a H průsečík jeho výšek. Označme H' obraz bodu H v osové souměrnosti podle BC . Dokažte, že $H' \in k$. [Označme $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ a P_B, P_C paty výšek po řadě z vrcholů B, C . Je-li ABC ostroúhlý nebo $\alpha > 90^\circ$, pak z čtyřúhelníku $AP_B H P_C$ vidíme, že $|\sphericalangle P_B H P_C| = 180^\circ - \alpha$, a tedy i $|\sphericalangle B H' C| = |\sphericalangle B H C| = |\sphericalangle P_B H P_C| = 180^\circ - \alpha$, tj. $ABH'C$ je tětiový. Je-li u vrcholů B nebo C tupý úhel, vyjde $|\sphericalangle P_B H P_C| = \alpha$, tj. $|\sphericalangle B H' C| = \alpha$, tj. $ABCH'$ resp. $ACBH'$ je tětiový.]
- D1. Reimova věta říká: *Nechť body A, B, Y, X leží na jedné kružnici. Na přímkách AX a BY jsou po řadě dány body C a D . Pak body C, D, Y, X leží na jedné kružnici právě tehdy, když přímky AB, CD jsou rovnoběžné.* Dokažte ji pro případ, že $ABDC$ je čtyřúhelník, X leží na úsečce AC a Y na úsečce BD . [Z tětiového čtyřúhelníku $ABYX$ máme $|\sphericalangle XAB| = 180^\circ - |\sphericalangle BYX| = |\sphericalangle XYD|$ a tento úhel je roven $180^\circ - |\sphericalangle DCX|$, právě když je čtyřúhelník $XYDC$ tětiový. To dokazuje obě implikace, protože $AB \parallel CD$, právě když $|\sphericalangle XAB| = 180^\circ - |\sphericalangle DCX|$.]
- D2. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle AED|$. Na stranách AB a AE existují postupně body P a Q tak, že $|AP| = |BC| = |QE|$ a $|AQ| = |BP| = |DE|$. Dokažte, že $CD \parallel PQ$. [72–A–S–2]
- D3. Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má všechny strany stejně dlouhé. Úhlopříčky AD a EC se protínají v bodě S tak, že $|\sphericalangle ASE| = 60^\circ$. Dokažte, že pětiúhelník $ABCDE$ má některé dvě strany rovnoběžné. [MEMO 2011, T5]

6. Pro kladné celé číslo m označme $g(m)$ nejmenší počet geometrických posloupností, mezi jejichž členy jsou zastoupeny všechny dělitele čísla m . Určete všechna kladná celá čísla n , pro která platí $g(n!) = g((n+1)!)$. Řešte pro geometrické posloupnosti a) s racionálními kvocienty, b) s reálnými kvocienty. (Zdeněk Pezlar)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Dokážete pokrýt všechny dělitele čísla 6 dvěma geometrickými posloupnostmi? Dokážete pokrýt všechny dělitele čísla 24 dvěma geometrickými posloupnostmi? [Ano, ano. $(2^{n-1})_{n=1}^\infty$ a $(3 \cdot 2^{n-1})_{n=1}^\infty$ pokrývají dělitele čísla 6 a zároveň i dělitele čísla 24.]
- N2. Najděte nekonečně mnoho čísel, jejichž všechny dělitele lze pokrýt dvěma geometrickými posloupnostmi, ale jednou geometrickou posloupností nikoli. [Např. všechna čísla tvaru $3 \cdot 2^n, n \geq 1$.]
- N3. Má-li číslo m prvočíselný rozklad $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, pak počet jeho dělitelů je $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$. Dokažte. [Každý dělitel čísla m je dělitelný jen prvočísly p_i a prvočíslo p_i může být v prvočíselném rozkladu dělitele zastoupeno nejvýše

- v a_i -té mocnině. Naopak všechna čísla tohoto typu (jejichž počet je $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$) jsou děliteli m a jsou navzájem různá.]
- N4. Dokažte, že v prvočíselném rozkladu čísla $n!$ je mocnina dvojky větší nebo rovna mocnině libovolného jiného prvočísla. [Mocninu prvočísla p v prvočíselném rozkladu čísla $n!$ získáme tak, že vezmeme počet čísel dělitelných p v uzavřeném intervalu 1 až n , k němu přičteme počet čísel dělitelných p^2 v tomto intervalu, dále přičteme počet čísel dělitelných p^3 , p^4 a tak dále (pro velké mocniny už přičítáme nuly). Uvažujme nyní libovolné prvočísla $p > 2$. Jistě mezi čísly 1 až n je aspoň tolik sudých čísel jako čísel dělitelných p , aspoň tolik čísel dělitelných čtyřmi jako těch dělitelných p^2 , aspoň tolik dělitelných osmi jako těch dělitelných p^3 a tak dále. Sečtením těchto počtů dostáváme dokazovanou nerovnost.]
- N5. Obdélník je rozdělen na 3×5 jednotkových čtverečků. Kolik nejméně potřebujeme přímek, aby každým vrcholem každého čtverečku procházela aspoň jedna přímka? [4. Vrcholy tvoří čtvercovou mřížku 4×6 , nechť je to 4 na výšku a 6 na šířku. Vedeme-li přímky vodorovně, stačí nám 4. Naopak ukážeme, že na každé přímce leží nejvýše 6 vrcholů, tedy potřebujeme aspoň 4. Každá přímka je buď svislá, pak obsahuje 4 vrcholy (nebo žádný), nebo není svislá, pak protne každou svislou vrstvu v nejvýše jednom vrcholu, tj. prochází nejvýše 6 vrcholy mřížky.]
- N6. Čísla a^4 a a^7 jsou racionální. Musí být a také racionální? Pokud jsou racionální čísla b^4 a b^6 , musí být racionální i b ? [Ano, ne. Číslo $a^3 = a^7/a^4$ musí být racionální, a tedy i $a = a^4/a^3$. Naopak, je-li $b = \sqrt{2}$, pak b^4 i b^6 jsou racionální, ale b nikoli.]
- N7. (*Eukleidův algoritmus pro hledání největšího společného dělitele alespoň dvou čísel*) Pro každou konečnou posloupnost $d_1, d_2, \dots, d_n$ kladných celých čísel opakuje následující postup: v každém kroku vezmeme dva členy a, b posloupnosti, takové že $a > b$ (pokud takové existují) a větší člen a nahradíme jejich rozdílem $a - b$. Dokažte, že algoritmus skončí po konečně mnoha krocích, a to ve chvíli, kdy budou všechna čísla rovna největšímu společnému děliteli původních čísel $d_1, \dots, d_n$. [Součet všech čísel je přirozené číslo. V každém kroku se součet zmenší a zároveň všechna čísla zůstanou větší nebo rovna jedné, tj. jejich součet bude vždy zdola omezen n . Tím je dokázáno, že po konečném počtu kroků algoritmus skončí. Je zřejmé, že pak budou všechna čísla stejná (jinak bychom mohli udělat další krok). Ukážeme, že čísla budou rovna největšímu společnému děliteli d . Protože jsou na začátku všechna čísla násobky d a pokud a, b jsou násobky d , pak i $a - b$ je násobek d , tak i v dalším kroku, a tedy i kdykoli později, budou všechna čísla dělitelná d . Předpokládejme nyní pro spor, že na konci jsou všechna čísla rovna nějakému násobku kd , $k \neq 1$. Pojdme nyní celým procesem zpět k původní n -tici: v každém kroku vezmeme nějaká dvě čísla $b, a - b$ a nahradíme je čísly a, b , tj. jedním z nich a jejich součtem. Protože na konci byla všechna čísla násobky kd , musela jimi být i kdykoli v průběhu procesu a tedy i na začátku. To je ale spor s tím, že $D(d_1, \dots, d_n) = d$.]
- D1. Pro celé číslo $n \geq 3$ definujeme posloupnost $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ jako posloupnost exponentů v prvočíselném rozkladu $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ jsou prvočísla. Nalezněte všechna celá čísla $n \geq 3$, pro která je $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ geometrická posloupnost. [MEMO 2017, T8]

- D2. Předpokládejme, že $a_1 < a_2 < \dots < a_{2024}$ je aritmetická posloupnost kladných celých čísel a posloupnost $b_1 < b_2 < \dots < b_{2024}$ je geometrická posloupnost kladných celých čísel. Určete maximální možný počet celých čísel, která se mohou vyskytovat v obou posloupnostech zároveň, a to přes všechny možné volby těchto dvou posloupností. [USA TST 2024]
- D3. Na tabuli je napsáno 2026 (ne nutně různých) celých čísel větších než 1. V každém tahu Konfucius vybere dvě čísla $m > 1$ a $n > 1$ z různých míst na tabuli a nahradí je čísla $D(m, n)$ a $\frac{n(m, n)}{D(m, n)}$. Tak pokračuje, dokud může. a) Dokažte, že nezávisle na postupu Konfucius po konečném počtu tahů skončí, tj. na tabuli zbyde jediné číslo větší než jedna. b) Dokažte, že hodnota tohoto čísla je také nezávislá na Konfuciově postupu. [IMO 2026, 1]