

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii B

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástinu řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. Určete všechny kvadratické trojčleny $f(x) = x^2 + px + q$ s reálnými koeficienty p, q , pro něž platí $f(p) - q = f(q) - p = 2$. (Jaroslav Švrček)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Kvadratické trojčleny a) $g(x) = 2x^2 - x - 1$, b) $h(x) = 3x^2 + 8x - 3$ rozložte na součin dvou lineárních dvojčlenů s celočíselnými koeficienty.
 - N2. Určete všechny lineární dvojčleny $f(x) = ax + b$ s nenulovými reálnými koeficienty a, b , pro něž platí $f(a) = f(b) = 0$.
 - N3. Určete všechna reálná čísla a , pro něž kubický trojčlen $f(x) = x^3 + (a + 1)x + 1$ splňuje podmínku $f(a) = 0$.
 - N4. Určete všechny (neúplné) kvadratické trojčleny $f(x) = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) s reálnými koeficienty, pro něž platí $f(a) = f(b) = 0$.
 - D1. Určete všechny kvadratické trojčleny $f(x) = x^2 + bx + c$ s reálnými koeficienty b, c , pro něž platí $f(b) = f(c) = 0$.
 - D2. Určete všechny dvojice (b, c) reálných čísel, pro něž má kvadratická rovnice $x^2 + bx + c = 0$ kořeny b a c .
 - D3. Rozložte $f(x) = x^4 + 1$ na součin dvou kvadratických trojčlenů s reálnými koeficienty.
 - D4. Určete koeficienty p, q, r mnohočlenu $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, když víte, že jsou to nenulová navzájem různá celá čísla a platí $f(p) = p^3, f(q) = q^3$.
2. Tabulku 3×3 vyplníme devíti navzájem různými prvočísly tak, aby součet čísel v každém řádku i v každém sloupci měl stejnou číslíci na místě jednotek. Jakou nejmenší hodnotu může mít součet všech čísel v tabulce?

(Tomáš Jurík, Tomáš Bárta)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Kterou číslíci má na místě jednotek a) součet všech dvojmístných lichých čísel, b) součet všech dvojmístných čísel, která jsou dělitelná třemi?
- N2. Lze prvočísla menší než 30 rozdělit na tři skupiny, aby součet čísel v každé skupině končil stejnou číslíci?
- N3. Tabulku 2×2 vyplníme čtyřmi navzájem různými přirozenými čísly tak, aby součet čísel v každém řádku i v každém sloupci měl stejnou číslíci na místě jednotek. Jakou nejmenší hodnotu může mít součet všech čísel v tabulce?

- D1. Tabulku 3×3 máme vyplnit devíti danými čísly tak, aby v každém řádku i sloupci bylo největší číslo součtem ostatních dvou. Rozhodněte, zda je možné takový úkol splnit s čísly a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Pokud ano, zjistěte, kolika způsoby lze úkol splnit tak, aby největší číslo bylo uprostřed tabulky.
- D2. Najděte všechny čtvercové tabulky 3×3 přirozených čísel, v nichž je součin všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách stejný, a pro které platí, že součet čtyř čísel v jejich rohových polích je jednociferné číslo.
- D3. Je dána čtvercová tabulka 3×3 přirozených čísel, v níž je součin všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách roven číslu s . a) Dokažte, že číslo s je třetí mocninou přirozeného čísla. b) Pokud je jedno z rohových čísel tabulky rovno 1, je součet všech čtyř rohových čísel druhou mocninou přirozeného čísla. Dokažte.
- D4. Najděte největší celé číslo d , pro něž lze tabulku 43×47 vyplnit jedničkami a dvojkami tak, aby součet čísel v každém řádku i v každém sloupci byl dělitelný číslem d . (Dokažte také, že žádné větší číslo d zadání úlohy nevyhovuje.)
- D5. Je možné vyplnit tabulku 8×8 šestkami a sedmičkami tak, aby součet čísel v každém řádku byl dělitelný pěti a součet čísel v každém sloupci byl dělitelný sedmi?
- D6. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku i sloupci je dělitelný třemi. Určete největší možný součet čísel v tabulce a ukažte, že větší být nemůže. Uveďte rovněž příklad tabulky s určeným největším součtem.
- D7. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven stejnému číslu s . Určete největší možnou hodnotu s a ukažte, že větší být nemůže. Uveďte rovněž příklad tabulky s určenou největší hodnotou s .
- D8. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly -4 , 3 a 10 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je nejvýš 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je nejvýš 0. Určete největší možný součet čísel v tabulce.
3. Na stranách AB , BC , CD , DA pravoúhelníku $ABCD$ jsou po řadě zvoleny body K , L , M , N tak, že $KM \perp LN$. Dokažte, že obsah čtyřúhelníku s vrcholy ve středech stran čtyřúhelníku $KLMN$ není menší než jedna čtvrtina obsahu pravoúhelníku $ABCD$.
(Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Necht K , L , M , N jsou po řadě středy stran AB , BC , CD , DA čtyřúhelníku $ABCD$ (ne nutně konvexního). Dokažte, že $KLMN$ je rovnoběžník (tzv. Varignonův rovnoběžník příslušný čtyřúhelníku $ABCD$).
- N2. Necht $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Dokažte, že obsah jemu příslušného Varignonova rovnoběžníku $KLMN$ je roven polovině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$ a že jeho obvod je roven součtu délek úhlopříček AC a BD čtyřúhelníku $ABCD$.
- N3. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž $AC \perp BD$. Dokažte, že jeho Varignonův rovnoběžník $KLMN$ je pravoúhelník. (Jsou-li navíc jeho úhlopříčky AC a BD shodné, je čtyřúhelník $KLMN$ čtverec.)

- D1. Uvažujme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a jeho Varignonův rovnoběžník $KLMN$. Necht P , Q značí středy po řadě jeho úhlopříček AC , BD . Dokažte, že přímky KM , LN a PQ procházejí společným bodem.
- D2. Do polokružnice s průměrem AB je vepsán čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že střed spojnice středů jeho úhlopříček je stejně vzdálen od bodu C jako od bodu D .
- D3. Najděte všechny tětiové čtyřúhelníky $ABCD$ o obsahu 8 cm^2 , pro které platí $|AB| = |BC|$ a součet délek úhlopříček je 8 cm .
4. Označme $D(a, b)$ největší společný dělitel kladných celých čísel a , b a $n(a, b)$ jejich nejmenší společný násobek. Určete všechna kladná celá čísla m , pro která platí

$$D(25, m) + n(26, m + 1) = 2027.$$

(Tomáš Jurík)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Necht m je přirozené číslo. Určete všechny možné hodnoty $D(21, m)$.
- N2. Pro kolik přirozených čísel m platí a) $n(19, m) = 75$; b) $n(19, m) = 76$; c) $n(76, m) = 2052$?
- N3. Určete všechna trojmístná čísla, která při dělení 19 a 20 dávají po řadě zbytky a) 0 a 1; b) 1 a 2; c) 5 a 9.
- N4. Určete všechna trojmístná čísla, která při dělení 19 dávají zbytek 5 a při dělení 23 zbytek 7.
- N5. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a a b platí $a \cdot b = n(a, b) \cdot D(a, b)$.
- D1. Pro tři neznámá přirozená čísla platí, že největší společný dělitel prvního a druhého je 8, největší společný dělitel druhého a třetího je 2, největší společný dělitel prvního a třetího je 6, nejmenší společný násobek všech tří čísel je 1680, největší z čísel je větší než 100, ale není větší než 200, jedno z čísel je čtvrtou mocninou celého čísla. O která čísla jde? Určete všechny možnosti.
- D2. Určete všechny dvojice přirozených čísel a a b , pro které platí $2n(a, b) + 3D(a, b) = ab$.
- D3. Určete všechny dvojice a , b kladných celých čísel, pro které platí $a \cdot n(a, b) = 4 \cdot D(a, b)$.
- D4. Rozdíl dvou přirozených čísel je 2010 a jejich největší společný dělitel je 2014-krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete všechny takové dvojice čísel.
- D5. Najděte všechny trojice přirozených čísel a , b , c , pro které platí množinová rovnost $\{D(a, b), D(a, c), D(b, c), n(a, b), n(a, c), n(b, c)\} = \{2, 3, 5, 60, 90, 180\}$.
- D6. Necht a , b , c jsou kladná celá čísla, pro která se jedna z hodnot $D(a, b) \cdot n(b, c)$, $D(b, c) \cdot n(c, a)$, $D(c, a) \cdot n(a, b)$ rovná součinu zbývajících dvou. Dokažte, že některé z čísel a , b , c je násobkem jiného z nich.

5. Z číslic 0, 1, 2, 3, 6 a 7 sestavíme všechna možná šestimístná čísla, která obsahují každou z nich, a každé takové číslo zapíšeme na jinou kartičku. Rozhodněte, zda je možné rozdělit kartičky na sedm hromádek se stejnými součty čísel. (Jana Kopfová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Najděte prvočíselný rozklad čísla 1001.
- N2. Dokažte, že každé šestimístné číslo, které získáme tak, že za sebe napíšeme dvě stejná trojmístná čísla, je dělitelné 1001.
- N3. Kolika způsoby můžeme z číslic 1, 2, 3 sestavit trojmístná čísla, která obsahují každou z nich?
- N4. Kolika způsoby můžeme z číslic 0, 1, 2, 3 sestavit čtyřmístná čísla, která obsahují každou z nich?
- N5. Z číslic 3, 4, 5, 7 a 9 byla vytvořena všechna možná trojmístná čísla tak, aby se každá číslice vyskytovala v každém čísle nejvýše jednou. Určete počet takto vzniklých čísel a jejich celkový součet.
- D1. Pat sečetl všechna čtyřmístná čísla, z nichž každé obsahovalo všechny číslice 1, 2, 3 a 4, a dospěl k součtu 58 126. Mat Pata upozornil, že výsledek není dobře, a zároveň mu prozradil, že součet lze získat jednodušším způsobem než vypisováním a postupným sčítáním všech čísel. Pat si nechal poradit, úlohu vyřešil a zjistil, že původně sice počítal správně, ale na dva sčítance zapomněl. Zjistěte, na která čísla Pat původně zapomněl.
- D2. Zapišeme všechna pětímístná čísla, v nichž se každá z číslic 4, 5, 6, 7, 8 vyskytuje právě jednou. Pak jedno (libovolné z nich) škrtneme a všechna zbývající sečteme. Jaké jsou možné hodnoty ciferného součtu takového výsledku?
- D3. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme L počet těch vyplnění, kde jsou navíc součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla. Určete poměr $L : M$.

6. Nechť M je střed základny AB rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$. Označme K druhý průsečík přímky DM s kružnicí k opsanou danému lichoběžníku a P průsečík tečny kružnice k v bodě K s přímkou AB .

a) Dokažte, že body C , M , K , P leží na téže kružnici.

b) Dokažte, že přímka BD je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BCP .

(Zdeněk Pezlar, Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Dokažte větu o obvodovém a středovém úhlu.
- N2. Dokažte větu shodnosti obvodového a úsekového úhlu, tj. větu: Je dán trojúhelník ABC a bod K v polorovině opačné k polorovině ABC . Dokažte, že přímka KA je tečnou kružnice opsané trojúhelníku ABC , právě když platí $|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle ACB|$.
- N3. Dvě kružnice se protínají v bodech A a B ($A \neq B$). Bodem B prochází přímka, která protíná obě kružnice v bodech C a D ($C \neq B \neq D$). V bodech C a D

jsou sestrojeny tečny k oběma kružnicím, které se protínají v bodě E . Dokažte, že body A , C , D a E leží na téže kružnici.

- D1. Dokažte, že osa vnitřního úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC protíná kružnici jemu opsanou v bodě S ($S \neq C$), který je středem (kružnicového) oblouku AB neobsahujícího vrchol C (tzv. *Švrčkův bod*).
- D2. Je dána kružnice k a její tětiva PQ . Uvažujme kružnice ℓ , m , které obě leží v téže polorovině vyřazené přímkou PQ tak, že každá z nich se dotýká jak tětivy PQ , tak i zevnitř kružnice k . Dokažte, že obě dvojice A , B a C , D dotykových bodů kružnic ℓ a m po řadě s tětivou PQ a s kružnicí k leží na téže kružnici.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. Určete všechny kvadratické trojčleny $f(x) = x^2 + px + q$ s reálnými koeficienty p, q , pro něž platí $f(p) - q = f(q) - p = 2$. (Jaroslav Švrček)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Kvadratické trojčleny a) $g(x) = 2x^2 - x - 1$, b) $h(x) = 3x^2 + 8x - 3$ rozložte na součin dvou lineárních dvojčlenů s celočíselnými koeficienty. [Podle zadání $g(x) = (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$. Porovnáním koeficientů obdržíme tři rovnice se čtyřmi neznámými, jednu neznámou tak můžeme zvolit a zbývající dopočítat. Dostaneme $g(x) = (2x + 1)(x - 1)$, $h(x) = (3x - 1)(x + 3)$.]
- N2. Určete všechny lineární dvojčleny $f(x) = ax + b$ s nenulovými reálnými koeficienty a, b , pro něž platí $f(a) = f(b) = 0$. [$f(x) = -x - 1$. Dosazením dostaneme soustavu dvou rovnic $0 = f(a) = a^2 + b$, $0 = f(b) = b(a + 1)$. Díky $b \neq 0$ z druhé rovnice získáme $a = -1$, což po dosazení do první rovnice dá $b = -1$.]
- N3. Určete všechna reálná čísla a , pro něž kubický trojčlen $f(x) = x^3 + (a + 1)x + 1$ splňuje podmínku $f(a) = 0$. [Dosazením obdržíme rovnici $0 = f(a) = a^3 + a^2 + a + 1 = (a + 1)(a^2 + 1)$ s jediným reálným kořenem $a = -1$.]
- N4. Určete všechny (neúplné) kvadratické trojčleny $f(x) = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) s reálnými koeficienty, pro něž platí $f(a) = f(b) = 0$. [$f(x) = -x^2 - x$. Dosazením získáme soustavu rovnic $0 = a(a^2 + b)$, $0 = b^2(a + 1)$. Užitím druhé rovnice dostaneme $a = -1$ nebo $b = 0$ a dosadíme do první rovnice. Jiné řešení: nejprve uvažíme $a = b$, což vede k výše uvedenému řešení, v případě $a \neq b$ užitím Viètových vztahů dostaneme soustavu $a + b = -b/a$, $ab = 0$ bez vyhovujícího řešení.]
- D1. Určete všechny kvadratické trojčleny $f(x) = x^2 + bx + c$ s reálnými koeficienty b, c , pro něž platí $f(b) = f(c) = 0$. [Úloha má 3 řešení: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 + x - 2$ a $f_3(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Stejně jako v předcházející úloze buď $b = c$, odkud po dosazení získáme třetí řešení, jinak z Viètových vztahů $b + c = -b$, $bc = c$.]
- D2. Určete všechny dvojice (b, c) reálných čísel, pro něž má kvadratická rovnice $x^2 + bx + c = 0$ kořeny b a c . [Užitím Viètových vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice zjistíme, že úloha má právě 2 řešení, a to $(b, c) \in \{(0; 0), (1; -2)\}$.]
- D3. Rozložte $f(x) = x^4 + 1$ na součin dvou kvadratických trojčlenů s reálnými koeficienty. [Podobně jako v N1 dostaneme $f(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.]
- D4. Určete koeficienty p, q, r mnohočlenu $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, když víte, že jsou to nenulová navzájem různá celá čísla a platí $f(p) = p^3$, $f(q) = q^3$. [Slovenská MO 57-A-III-1]

2. Tabulku 3×3 vyplníme devíti navzájem různými prvočíslý tak, aby součet čísel v každém řádku i v každém sloupci měl stejnou číslíci na místě jednotek. Jakou nejmenší hodnotu může mít součet všech čísel v tabulce?

(Tomáš Jurík, Tomáš Bárta)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Kterou číslíci má na místě jednotek a) součet všech dvojmístných lichých čísel, b) součet všech dvojmístných čísel, která jsou dělitelná třemi? [Číslíci na místě jednotek součtu závisí jen na číslících na místě jednotek jednotlivých sčítanců.]

a) V každé desítce končí lichá čísla číslicemi 1, 3, 5, 7, 9, jejich součet 45 končí číslicí 5, těchto desítek je 9, proto poslední číslice součtu bude stejná jako u čísla $5 \cdot 9 = 45$, tedy 5. (Daný součet je 2475). b) V každé desítce jsou právě tři čísla končící nenulovou číslicí, která jsou dělitelná třemi. V devíti desítkách se každá kombinace tří odpovídajících posledních číslic zopakuje právě třikrát, proto součet všech daných čísel končí stejnou číslicí jako $3 \cdot 5 = 15$, tedy 5. (Daný součet je 1665).]

N2. Lze prvočísla menší než 30 rozdělit na tři skupiny, aby součet čísel v každé skupině končil stejnou číslicí? [Těchto prvočísel je 10, jsou to 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Jejich součet (129) končí číslicí 9. Pokud součet čísel v každé skupině končí číslicí k , potom součet všech deseti čísel má na místě jednotek stejnou číslici jako číslo $3k$, tedy 9. Taková číslice k je jediná, je to číslice 3. Existuje více vyhovujících rozdělení, jedno z nich je $\{2, 3, 5, 13\}$, $\{11, 19, 23\}$ a $\{7, 17, 29\}$.]

N3. Tabulku 2×2 vyplníme čtyřmi navzájem různými přirozenými čísly tak, aby součet čísel v každém řádku i v každém sloupci měl stejnou číslici na místě jednotek. Jakou nejmenší hodnotu může mít součet všech čísel v tabulce? [Snadno si rozmyslíme, že čísla v pravém horním rohu tabulky a jejím levém dolním rohu končí stejnou číslicí stejně jako čísla v pravém dolním a levém horním rohu. Dvojice s nejmenším součtem je 1, 11 a dvojice s druhým nejmenším součtem je 2 a 12 (má-li být součet menší než 30, musí na místě desítek být 0 a 1, a na místě jednotek chceme mít co nejmenší číslice, ale 0 tam být nemůže). Tabulka se součtem $1 + 2 + 11 + 12 = 26$ se nachází vpravo.]

1	12	13
2	11	13
3	23	26

D1. Tabulku 3×3 máme vyplnit devíti danými čísly tak, aby v každém řádku i sloupci bylo největší číslo součtem ostatních dvou. Rozhodněte, zda je možné takový úkol splnit s čísly a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Pokud ano, zjistěte, kolika způsoby lze úkol splnit tak, aby největší číslo bylo uprostřed tabulky. [69–C–I–5]

D2. Najděte všechny čtvercové tabulky 3×3 přirozených čísel, v nichž je součin všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách stejný, a pro které platí, že součet čtyř čísel v jejich rohových polích je jednociferné číslo. [47–B–S–3]

D3. Je dána čtvercová tabulka 3×3 přirozených čísel, v níž je součin všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách roven číslu s . a) Dokažte, že číslo s je třetí mocninou přirozeného čísla. b) Pokud je jedno z rohových čísel tabulky rovno 1, je součet všech čtyř rohových čísel druhou mocninou přirozeného čísla. Dokažte. [47–B–II–3]

D4. Najděte největší celé číslo d , pro něž lze tabulku 43×47 vyplnit jedničkami a dvojkami tak, aby součet čísel v každém řádku i v každém sloupci byl dělitelný číslem d . (Dokažte také, že žádné větší číslo d zadání úlohy nevyhovuje.) [71–A–S–1]

D5. Je možné vyplnit tabulku 8×8 šestkami a sedmičkami tak, aby součet čísel v každém řádku byl dělitelný pěti a součet čísel v každém sloupci byl dělitelný sedmi? [71–A–II–1]

D6. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku i sloupci je dělitelný třemi. Určete největší možný součet čísel v tabulce a ukažte,

že větší být nemůže. Uvedte rovněž příklad tabulky s určeným největším součtem. [71–C–S–1]

- D7. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven stejnému číslu s . Určete největší možnou hodnotu s a ukažte, že větší být nemůže. Uvedte rovněž příklad tabulky s určenou největší hodnotou s . [71–C–II–4]
- D8. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly -4 , 3 a 10 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je nejvýš 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je nejvýš 0. Určete největší možný součet čísel v tabulce. [71–B–II–4]

3. Na stranách AB , BC , CD , DA pravoúhelníku $ABCD$ jsou po řadě zvoleny body K , L , M , N tak, že $KM \perp LN$. Dokažte, že obsah čtyřúhelníku s vrcholy ve středech stran čtyřúhelníku $KLMN$ není menší než jedna čtvrtina obsahu pravoúhelníku $ABCD$.

(Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Necht K , L , M , N jsou po řadě středy stran AB , BC , CD , DA čtyřúhelníku $ABCD$ (ne nutně konvexního). Dokažte, že $KLMN$ je rovnoběžník (tzv. Varignonův rovnoběžník příslušný čtyřúhelníku $ABCD$). [Úsečky KL a MN jako střední příčky trojúhelníků ABC a ACD jsou rovnoběžné se stranou AC (tedy i navzájem) a mají stejnou délku $\frac{1}{2}|AC|$.]
- N2. Necht $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Dokažte, že obsah jemu příslušného Varignonova rovnoběžníku $KLMN$ je roven polovině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$ a že jeho obvod je roven součtu délek úhlopříček AC a BD čtyřúhelníku $ABCD$. [Obsah trojúhelníku KBL je čtvrtinou obsahu trojúhelníku ABC , jelikož tyto trojúhelníky jsou podobné s koeficientem $\frac{1}{2}$. Podobně obsah trojúhelníku MDN je čtvrtinou obsahu trojúhelníku ACD . Součet obsahů trojúhelníků KBL a MDN je tak čtvrtinou obsahu čtyřúhelníku $ABCD$. Podobně je součet obsahů trojúhelníků NAK a LCM také čtvrtinou obsahu čtyřúhelníku $ABCD$. Jelikož tyto čtyři trojúhelníky doplňují rovnoběžník $KLMN$ do čtyřúhelníku $ABCD$, je obsah Varignonova rovnoběžníku $KLMN$ polovinou obsahu čtyřúhelníku $ABCD$. Z řešení úlohy N1 plyne $|KL| + |MN| = \frac{1}{2}|AC| + \frac{1}{2}|AC| = |AC|$. Podobnou úvahou dostaneme $|LM| + |KN| = |BD|$ a tedy obvod Varignonova rovnoběžníku $KLMN$ je součtem délek úhlopříček AC a BD .]
- N3. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž $AC \perp BD$. Dokažte, že jeho Varignonův rovnoběžník $KLMN$ je pravoúhelník. (Jsou-li navíc jeho úhlopříčky AC a BD shodné, je čtyřúhelník $KLMN$ čtverec.) [Podobnými úvahami jako v N1 jsou strany KL a MN resp. LM a KN rovnoběžné s kolmými úhlopříčkami AC resp. BD , tedy jsou navzájem kolmé.]
- D1. Uvažujme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a jeho Varignonův rovnoběžník $KLMN$. Necht P , Q značí středy po řadě jeho úhlopříček AC , BD . Dokažte, že přímky KM , LN a PQ procházejí společným bodem. [Průsečík U úhlopříček rovnoběžníku $KLMN$ pulí obě tyto úhlopříčky. Úsečky KQ a MP jsou jako střední příčky

trojúhelníků ABD a ACD rovnoběžné s jejich společnou stranou AD a mají poloviční délku, $KQMP$ je tak rovnoběžník a jeho úhlopříčky KM a PQ se navzájem půlí, speciálně bod U jako průsečík úhlopříček KM a LN je středem úsečky PQ .]

D2. Do polokružnice s průměrem AB je vepsán čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že střed spojnice středů jeho úhlopříček je stejně vzdálen od bodu C jako od bodu D . [75-B-III-3]

D3. Najděte všechny tětivové čtyřúhelníky $ABCD$ o obsahu 8 cm^2 , pro které platí $|AB| = |BC|$ a součet délek úhlopříček je 8 cm . [34-B-I-5]

4. Označme $D(a, b)$ největší společný dělitel kladných celých čísel a, b a $n(a, b)$ jejich nejmenší společný násobek. Určete všechna kladná celá čísla m , pro která platí

$$D(25, m) + n(26, m + 1) = 2027.$$

(Tomáš Jurík)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Nechť m je přirozené číslo. Určete všechny možné hodnoty $D(21, m)$. [Největší společný dělitel dvou čísel je dělitelem každého z nich. Proto je dělitelem i čísla 21, které má dělitele 1, 3, 7, 21. Tyto hodnoty nabude $D(21, m)$ například po řadě pro čísla $m = 1, 9, 49, 21$.]

N2. Pro kolik přirozených čísel m platí a) $n(19, m) = 75$; b) $n(19, m) = 76$; c) $n(76, m) = 2052$? [Nejmenší společný násobek dvou čísel je násobkem libovolného z nich. Jelikož 75 není násobkem 19, tak odpověď a) je 0. V případě b) platí $76 = 2^2 \cdot 19$. Číslo m je tak dělitelem čísla 76. Vzhledem k tomu, že $D(19, 2^2) = 1$, je násobkem $2^2 = 4$. Takoví dělitelé 76 existují jen 2, a to 4 a 76. c) Podobně jako v případě b) je m dělitelem čísla $2052 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 19$, který je násobkem 3^3 , takových čísel existuje 6, jsou to čísla $m \in \{2^0 \cdot 3^3 \cdot 19^0 = 27, 2^1 \cdot 3^3 \cdot 19^0 = 54, 2^2 \cdot 3^3 \cdot 19^0 = 108, 2^0 \cdot 3^3 \cdot 19^1 = 513, 2^1 \cdot 3^3 \cdot 19^1 = 1026, 2^2 \cdot 3^3 \cdot 19^1 = 2052\}$.]

N3. Určete všechna trojmístná čísla, která při dělení 19 a 20 dávají po řadě zbytky a) 0 a 1; b) 1 a 2; c) 5 a 9. [a) Hledané trojmístné číslo m je násobkem 19, platí tak $m = 19k$, kde k je přirozené číslo. Současně $m - 1$ je násobkem 20, tedy číslo $19k - 1 = 20k - (k + 1)$ je násobkem 20. Číslo $k + 1$ tak musí být násobkem 20, tedy $k = 19, 39, 59 \dots$ Jelikož $59 \cdot 19 = 1121$, což je číslo čtyřmístné, připadají do úvahy jen čísla $k = 19, 39$. Těmto dvěma k odpovídají trojmístná čísla m po řadě 361, 741. b) Přirozené číslo m má vlastnost a), právě když číslo $m + 1$ má vlastnost b), hledaná čísla tak jsou 362 a 742. c) Podobně jako v a) zjistíme, že vyhovují jen čísla 309 a 689.]

N4. Určete všechna trojmístná čísla, která při dělení 19 dávají zbytek 5 a při dělení 23 zbytek 7. [214 a 651]

N5. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a a b platí $a \cdot b = n(a, b) \cdot D(a, b)$. [Zapíšeme prvočíselné rozklady čísel a, b ve tvaru $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \dots$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \dots$, kde α_i a β_i jsou celá nezáporná čísla a užijeme zřejmou identitu $\alpha_i + \beta_i = \max(\alpha_i, \beta_i) + \min(\alpha_i, \beta_i)$.]

- D1. Pro tři neznámá přirozená čísla platí, že největší společný dělitel prvního a druhého je 8, největší společný dělitel druhého a třetího je 2, největší společný dělitel prvního a třetího je 6, nejmenší společný násobek všech tří čísel je 1680, největší z čísel je větší než 100, ale není větší než 200, jedno z čísel je čtvrtou mocninou celého čísla. O která čísla jde? Určete všechny možnosti. [70–Z9–III–1]
- D2. Určete všechny dvojice přirozených čísel a a b , pro které platí $2n(a, b) + 3D(a, b) = ab$. [69–C–I–3]
- D3. Určete všechny dvojice a, b kladných celých čísel, pro která platí $a \cdot n(a, b) = 4 \cdot D(a, b)$. [62–C–S–2]
- D4. Rozdíl dvou přirozených čísel je 2010 a jejich největší společný dělitel je 2014-krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete všechny takové dvojice čísel. [64–C–I–5]
- D5. Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c , pro které platí množinová rovnost $\{D(a, b), D(a, c), D(b, c), n(a, b), n(a, c), n(b, c)\} = \{2, 3, 5, 60, 90, 180\}$. [61–C–I–3]
- D6. Necht a, b, c jsou kladná celá čísla, pro která se jedna z hodnot $D(a, b) \cdot n(b, c)$, $D(b, c) \cdot n(c, a)$, $D(c, a) \cdot n(a, b)$ rovná součinu zbývajících dvou. Dokažte, že některé z čísel a, b, c je násobkem jiného z nich. [73–A–IV–1]
5. Z číslic 0, 1, 2, 3, 6 a 7 sestavíme všechna možná šestimístná čísla, která obsahují každou z nich, a každé takové číslo zapíšeme na jinou kartičku. Rozhodněte, zda je možné rozdělit kartičky na sedm hromádek se stejnými součty čísel. (Jana Kopfová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Najděte prvočíselný rozklad čísla 1001. [$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$]
- N2. Dokažte, že každé šestimístné číslo, které získáme tak, že za sebe napíšeme dvě stejná trojmístná čísla, je dělitelné 1001. [Číslo má tvar $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001$.]
- N3. Kolika způsoby můžeme z číslic 1, 2, 3 sestavit trojmístná čísla, která obsahují každou z nich? [První číslici můžeme vybrat 3 způsoby, zbývají dvě číslice. Z nich druhou číslici můžeme vybrat 2 způsoby a poslední jedním. Takže takto lze sestavit $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ různých čísel. (Součin $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ značíme $n!$ a čteme n faktoriál, např. $5!$ čteme pět faktoriál.)]
- N4. Kolika způsoby můžeme z číslic 0, 1, 2, 3 sestavit čtyřmístná čísla, která obsahují každou z nich? [Postupujeme podobně jako v předcházející úloze. První číslice takového čísla musí být nenulová, tu můžeme vybrat 3 způsoby, druhá již může být libovolná, můžeme ji vybrat 3 způsoby atd. Vidíme, že tak lze sestavit $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 3! = 18$ různých čísel. Alternativně: čtyři číslice můžeme uspořádat $4! = 24$ způsoby, ovšem $3! = 6$ těchto pořadí začíná číslicí 0, což nedává čtyřmístná čísla. Proto takto můžeme sestavit $24 - 6 = 18$ čísel.]
- N5. Z číslic 3, 4, 5, 7 a 9 byla vytvořena všechna možná trojmístná čísla tak, aby se každá číslice vyskytovala v každém čísle nejvýše jednou. Určete počet takto vzniklých čísel a jejich celkový součet. [68–Z9–II–3]
- D1. Pat sečetl všechna čtyřmístná čísla, z nichž každé obsahovalo všechny číslice 1, 2, 3 a 4, a dospěl k součtu 58 126. Mat Pata upozornil, že výsledek není dobře, a zároveň mu prozradil, že součet lze získat jednodušším způsobem než

vypisováním a postupným sčítáním všech čísel. Pat si nechal poradit, úlohu vyřešil a zjistil, že původně sice počítal správně, ale na dva sčítance zapomněl. Zjistěte, na která čísla Pat původně zapomněl. [66–Z9–II–2]

D2. Zapišeme všechna pětímístná čísla, v nichž se každá z číslic 4, 5, 6, 7, 8 vyskytuje právě jednou. Pak jedno (libovolné z nich) škrtneme a všechna zbývajících sečteme. Jaké jsou možné hodnoty ciferného součtu takového výsledku? [60–B–II–4]

D3. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme L počet těch vyplnění, kde jsou navíc součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla. Určete poměr $L : M$. [72–B–I–2]

6. Nechť M je střed základny AB rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$. Označme K druhý průsečík přímky DM s kružnicí k opsanou danému lichoběžníku a P průsečík tečny kružnice k v bodě K s přímkou AB .

a) Dokažte, že body C , M , K , P leží na téže kružnici.

b) Dokažte, že přímka BD je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BCP .

(Zdeněk Pezlar, Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte větu o obvodovém a středovém úhlu. [Viz str. 3–4 brožury [Kružnice](#) ze Školy mladých matematiků, nebo také komentovaný výklad na <https://www.youtube.com/watch?v=REi-iU55oog>.]

N2. Dokažte větu shodnosti obvodového a úsekového úhlu, tj. větu: Je dán trojúhelník ABC a bod K v polorovině opačné k polorovině ABC . Dokažte, že přímka KA je tečnou kružnice opsané trojúhelníku ABC , právě když platí $|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle ACB|$. [Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC . V případě, že úhel ACB je ostrý, leží bod O v polorovině ABC a $|\sphericalangle AOB| = 2|\sphericalangle ACB|$. Jelikož AOB je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB , je tato rovnost ekvivalentní s $|\sphericalangle BAO| = 90^\circ - |\sphericalangle ACB|$. Přímka AK je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku ABC , právě když $OA \perp AK$, tedy právě když $|\sphericalangle KAB| = 90^\circ - |\sphericalangle BAO| = 90^\circ - (90^\circ - |\sphericalangle ACB|) = |\sphericalangle ACB|$. V případě, že úhel ACB je pravý, plyne tvrzení přímo z Thaletovy věty. Pokud je úhel ACB tupý, leží bod O v polorovině opačné k ABC a $|\sphericalangle BOA| = 360^\circ - 2|\sphericalangle ACB|$. Jelikož AOB je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB , je tato rovnost ekvivalentní s $|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle ACB| - 90^\circ$. Přímka AK je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku ABC , právě když $OA \perp AK$, tedy právě když $|\sphericalangle KAB| = 90^\circ + |\sphericalangle OAB| = 90^\circ + (|\sphericalangle ACB| - 90^\circ) = |\sphericalangle ACB|$.]

N3. Dvě kružnice se protínají v bodech A a B ($A \neq B$). Bodem B prochází přímka, která protíná obě kružnice v bodech C a D ($C \neq B \neq D$). V bodech C a D jsou sestrojeny tečny k oběma kružnicím, které se protínají v bodě E . Dokažte, že body A , C , D a E leží na téže kružnici. [Řešení úlohy naleznete v článku *J. Švrčka a L. Juklové Jak dokázat, že čtyři body leží na kružnici*, který vyšel v čísle 3 aktuálního 35. ročníku časopisu [Matematika–fyzika–informatika](#).]

D1. Dokažte, že osa vnitřního úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC protíná kružnici jemu opsanou v bodě S ($S \neq C$), který je středem (kružnicového) oblouku

AB neobsahujícího vrchol C (tzv. *Švrčkův bod*). [Nechť O je středem kružnice trojúhelníku opsané. Podle věty o středovém úhlu se (rovnoramenné) trojúhelníky ASO a BSO shodují v délkách ramen AO , SO a BO a v úhlech jimi sevřených, jsou tak podle věty *sus* shodné, tedy bod S leží na ose strany AB , která protíná oblouk AB v jeho středu.]

- D2. Je dána kružnice k a její tětiva PQ . Uvažujme kružnice ℓ , m , které obě leží v téže polorovině vyřazené přímkou PQ tak, že každá z nich se dotýká jak tětivy PQ , tak i zevnitř kružnice k . Dokažte, že obě dvojice A , B a C , D dotykových bodů kružnic ℓ a m po řadě s tětivou PQ a s kružnicí k leží na téže kružnici. [Řešení úlohy naleznete v článku *J. Švrčka a L. Juklové Jak dokázat, že čtyři body leží na kružnici*, který vyšel v čísle **3** aktuálního 35. ročníku časopisu *Matematika–fyzika–informatika*.]