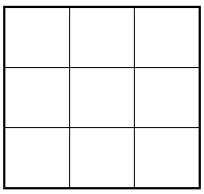
I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Do políček tabulky 3×3 doplňte všechna přirozená čísla od 1 do 9 tak, aby:

- součet čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný,
- číslo 1 bylo hned vpravo od čísla 6,
- číslo 7 bylo hned vlevo od čísla 5,
- číslo 8 bylo hned nad číslem 3.

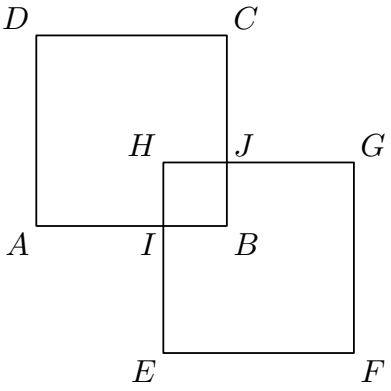
Najděte všechny možnosti. (*K. Pazourek*)



Z5–I–2

Dva stejné čtverce $ABCD$ a $EFGH$ se překrývají jako na obrázku. Společný čtyřúhelník $IBJH$ je čtverec, jehož strana je třikrát kratší než strana AB. Obvod mnohoúhelníku $AIEFGJCD$ je 180 cm.

Určete obvod čtverce $ABCD$. (*E. Semerádová*)



Z5–I–3

Výpravčí na vlakovém nádraží choval pět zvířat: žirafu, pštrosa, paviána, papouška a boxera. Každý den od pondělí do pátku vítalo cestující jedno z těchto zvířat:

- pštros nevítal v pondělí, ani v pátek,
- pavián vítal hned následující den po žirafě,
- žirafa nevítala ve středu,
- papoušek vítal později v týdnu než žirafa,
- boxer první tři dny po víkendu nevítal.

Které zvíře vítalo cestující v úterý? (*P. Antošová*)

Z5–I–4

Heslo k trezoru je ukryto ve slově $HUMBUK$. Různá písmena zastupují různé číslice, stejná písmena zastupují stejné číslice a platí tyto vztahy:

$$H + U = 9, \quad M \cdot B = 12, \quad B - U = 2, \quad U > M, \quad H - K = 5.$$

Najděte heslo k trezoru. (*E. Novotná*)

Z5–I–5

Xavier, Yvona a Zina sbírají karty pokémonů. Xavier jich má dvakrát více než Zina. Yvona má třetinu Xavierova počtu karet. Některé dvě z dětí mají dohromady rovných 100 karet.

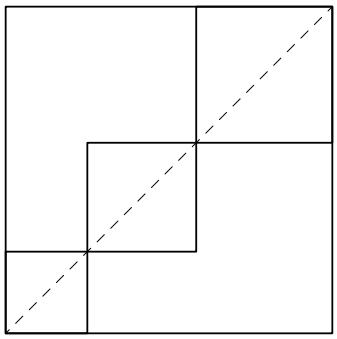
Kolik karet mají všichni tři dohromady? (*M. Janičová*)

Z5–I–6

Marek měl sadu čtverců s délkami stran v centimetrech vyjádřených všemi přirozenými čísly od 1 do 9. Čtverce vybíral a skládal podle následujících pravidel:

- do největšího vybraného čtverce vložil několik menších čtverců,
- délky stran menších čtverců v centimetrech byly po sobě jdoucí čísla,
- žádné dva menší čtverce se nepřekrývaly,
- úhlopříčky menších čtverců ležely na úhlopříčce velkého čtverce a celou ji pokrývaly.

Jaké délky stran mohly mít čtverce v Markově útvaru? Najděte všechny možnosti. (*M. Macko*)



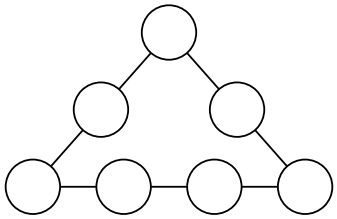
I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Na stranách trojúhelníku je sedm prázdných kroužků jako na obrázku. Vepište do každého kroužku jedno přirozené číslo od 1 do 9 tak, aby žádné číslo nebylo použito vícekrát a aby součin čísel na všech stranách byl stejný.

Která čísla mohou být na straně se čtyřmi kroužky?

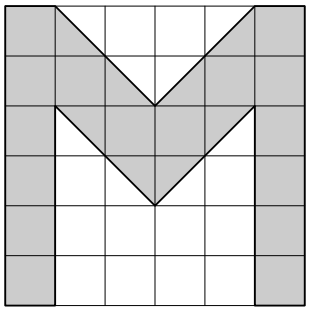
(*E. Novotná*)



Z6–I–2

Viola ve čtvercové síti 6 cm × 6 cm vybarvila útvar připomínající písmeno M jako na obrázku. Starší bratr Vilda poznamenal, že po vhodném otočení by útvar připomínal řecké písmeno Σ (velké sigma). Violu to zaujalo a otočený útvar nakreslila do stejné sítě přes ten původní, avšak jinou barvou.

Určete obsah části sítě vybarvené oběma barvami. (*M. Macko*)



Z6–I–3

Jedna čokoláda stojí několik eur a několik desítek centů. Za 10 eur můžeme koupit nanejvýš tři čokolády, za 15 eur nanejvýš pět čokolád, za 30 eur nanejvýš jedenáct čokolád a pokaždé by nám prodavač nějaké peníze vrátil.

Jaká může být cena jedné čokolády? Najděte všechny možnosti. (*M. Macko*)

Z6–I–4

Z následujících kartiček máme skládat desetinná čísla, jejichž zápis nezačíná nulou a za desetinnou čárkou je alespoň jedna číslice:

a) Ze všech kartiček složte dvě čísla s největším možným součtem.
b) Ze všech kartiček složte dvě čísla s nejmenším možným kladným rozdílem.

V obou případech určete všechny možné dvojice vyhovujících čísel. (*K. Pazourek*)

Z6–I–5

V jistém trojúhelníku platí:

- jedna strana měří 10 cm,
- délky dvou stran se liší o 4 cm,
- obvod je 32 cm.

Najděte délky stran všech trojúhelníků s těmito vlastnostmi. (*M. Macko*)

Z6–I–6

V posluchárně je skupina žáků a lavice, z nichž každá má dvě místa. Kdyby se dívky posadily samostatně a chlapci po dvojicích, zbylo by 9 lavic neobsazených. Kdyby se chlapci posadili samostatně a dívky po dvojicích, zbylo by 12 lavic neobsazených. Kdyby všichni seděli po dvojicích, obsazených lavic by bylo stejně jako neobsazených.

Kolik lavic je v posluchárně? (*M. Macko*)

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Je dán čtverec, který je složen z 52 nepřekrývajících se menších čtverců. Z nich 51 má obsah $1\,\mathrm{cm}^2$ a zbylý čtverec má délku strany v centimetrech vyjádřenou přirozeným číslem.

Jaký obsah může mít daný čtverec? Určete všechny možnosti. (*E. Novotná*)

Z7–I–2

Ve čtyřech zásuvkách bylo dohromady 62 kuliček. Postupně jsme do některých zásuvek přesouvali kuličky z ostatních tří zásuvek, a to ze všech stejně:

- nejprve po šesti kuličkách do třetí zásuvky,
- poté po třech kuličkách do druhé zásuvky,
- poté po jedné kuličce do první zásuvky.

Nakonec bylo ve druhé zásuvce o pět kuliček víc než v první, ve třetí o pět víc než ve druhé a ve čtvrté o pět víc než ve třetí.

Kolik kuliček bylo v jednotlivých zásuvkách před přesouváním? (*V. Dedek*)

Z7–I–3

Ciferník čarodějných hodin má obvyklý tvar kruhu, ale neobvyklý počet hodin. Čísla hodin jsou rozmístěna rovnoměrně po obvodu kruhu, je jich více než 50 a méně než 80. Proti číslu 36 vzhledem ke středu ciferníku je číslo dělitelné pěti.

Kolik hodin mohou mít čarodějné hodiny? Určete všechny možnosti. (*M. Macko*)

Z7–I–4

Anna a Zina bydlí na stejné ulici. Jednou vyrazily současně proti sobě od svých domů, každá svojí konstantní rychlostí. Zina zjistila, že zapomněla mobil, v osmině vzdálenosti mezi oběma domy se otočila a vrátila se ke svému domu. Tam jí maminka mobil podala a Zina se ihned vydala původním směrem. Když se dívky potkaly, byly v polovině cesty mezi svými domy a od jejich současného startu uplynulo 15 minut.

Za jak dlouho by se dívky potkaly, kdyby se Zina nevracela? (*M. Janičová*)

Z7–I–5

Kolik je trojic číslic a, b, c takových, že dvojmístná čísla $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$ a trojmístné číslo $\overline{abc}$ jsou všechna dělitelná třemi? (*P. Bak*)

Z7–I–6

V daném obdélníku $ABCD$ leží na straně CD bod E tak, že úsečky AE a EC jsou shodné. Osa úsečky AE prochází bodem D a protíná úhlopříčku AC v bodě G.

Určete velikost úhlu DGC. (*M. Macko*)

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Klasická hrací kostka má na svých stěnách tečky v počtech od 1 do 6 tak, že součet teček na každých dvou protilehlých stěnách je sedm. Tři kamarádky si rozdělily 24 stejných hracích kostek a každá ze svých osmi kostek slepila kvádr či krychli. Žádné dva z těchto tří útvarů neměly stejné rozměry a každý byl slepen tak, aby součet teček na jeho povrchu byl co největší.

Jaké součty teček mohly kamarádky dostat? (*M. Macko*)

Z8–I–2

Najděte všechny dvojice kladných celých čísel a a b s následujícími vlastnostmi:

- obě čísla a a b jsou menší než 50,
- součin $a \cdot b$ je dělitelný 11, ale součet $a + b$ není dělitelný 11,
- součin $a \cdot b$ je dělitelný 17, ale součet $a + b$ není dělitelný 17,
- jak součin $a \cdot b$, tak součet $a + b$ jsou dělitelné 2.

(*E. Semerádová*)

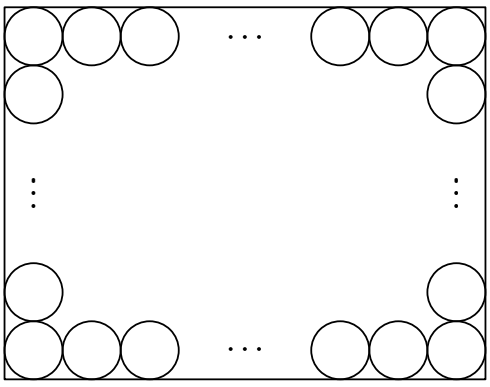
Z8–I–3

Alfons poskládal 56 kruhových etiket s poloměry 4 cm na stůl ve tvaru obdélníku tak, že platilo:

- každé strany stolu se dotýkala nějaká etiketa,
- rohové etikety se dotýkaly dvou stran stolu,
- ostatní etikety se dotýkaly jedné strany stolu,
- sousední etikety se dotýkaly navzájem.

Na druhý stůl stejných rozměrů začal skládat kruhové etikety s poloměry 3 cm a snažil se dodržet všechny podmínky ze stolu prvního. Po uložení celé řady podél jedné strany zjistil, že použil o 6 etiket více než podél stejné strany na prvním stole.

Zjistěte rozměry stolu. (*M. Macko*)



Z8–I–4

V prvním ročníku naší školy jsou dvě třídy — 1. A a 1. B. V 1. A je o polovinu více chlapců než v 1. B, o čtvrtinu více děvčat než v 1. B a celkově o třetinu více žáků než v 1. B.

Jakou část všech žáků prvního ročníku tvoří děvčata? (*J. Tkadlec*)

Z8–I–5

Honza, Mikuláš a Víťa si vytyčili cyklokrosový okruh. Honza odstartoval závod Mikuláše a Víti na 12 okruhů. Když Mikuláš poprvé projížděl kolem Honzy, vydal se Honza v protisměru naproti Víťovi, který byl pozadu. Honza ušel 150 metrů, než Víťu potkal. V tom okamžiku měl Víťa zdolánu čtrnáctinu celkové délky závodu.

Kolik metrů měřil jeden okruh? (*L. Dedková*)

Z8–I–6

Jsou dány body X, Y a úsečka PQ jako na obrázku. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby platilo:

- poloměr kružnice opsané trojúhelníku BCD je roven délce úsečky PQ,
- bod X leží na úhlopříčce BD a bod Y leží na úhlopříčce AC,
- body X a Y jsou souměrné podle osy rovnoběžné s přímkou AB.

Popište a zdůvodněte svoji konstrukci. (*M. Janičová*)

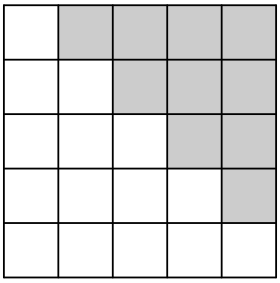
I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Do políček tabulky 5×5 doplňte čísla od 1 do 5 tak, aby:

- každé z čísel bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou,
- součet deseti čísel v šedě vyznačené části byl 21.

Najděte všechny možnosti. (*J. Tkadlec*)



Z9–I–2

Pro reálná čísla d, e, s, t a v platí:

$$\begin{aligned} d \cdot v \cdot e &= 2, \\ s \cdot e \cdot s \cdot t &= 6, \\ d \cdot e \cdot v \cdot e \cdot t &= 9. \end{aligned}$$

Určete všechny možné hodnoty součinu $d \cdot v \cdot e \cdot s \cdot t \cdot e$. (*J. Tkadlec*)

Z9–I–3

Jsou dány soustředné kružnice k, l a body A, B, C, D tak, že platí:

- poloměr kružnice k je 10 cm a poloměr kružnice l je větší,
- úsečka AB je tětivou kružnice k a měří 16 cm,
- úsečka CD je tětivou kružnice l, je kolmá k tětivě AB a prochází bodem B,
- trojúhelník ABC je rovnoramenný.

Jaká může být délka tětivy CD? Určete všechny možnosti. (*M. Macko*)

Z9–I–4

Ve vstupní hale kina bylo několik jednomístných a několik trojmístných sedaček. Jednou si uvaděčka všimla, že v hale sedělo 25 lidí a 10 sedaček bylo prázdných. Jindy si uvaděčka všimla, že v hale sedělo 14 lidí a 7 sedaček bylo prázdných. V obou případech byla každá trojmístná sedačka buď prázdná, nebo plně obsazená.

Kolik jednomístných a kolik trojmístných sedaček mohlo být v hale? Najděte všechny možnosti. (*M. Macko*)

Z9–I–5

Na tabuli je napsáno číslo 100. Dva kamarádi hrají hru podle následujících pravidel:

- Hráči se u tabule pravidelně střídají.
- V každém tahu hráč číslo smaže a nahradí číslem novým.
- Nové číslo je z předchozího vytvořeno buď odečtením jedné, nebo vydělením dvěma.
- Všechna napsaná čísla jsou přirozená.
- Vyhrává hráč, který napíše číslo 1.

Ukázalo se, že jeden z hráčů může postupovat tak, aby zaručeně vyhrál. Který hráč to je a kolik nejméně tahů k výhře potřebuje? (*I. Jančigová*)

Z9–I–6

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a jeho vnitřní bod P s těmito vlastnostmi:

- $|BC| = |CP| = |PD|$,
- $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PCB|$,
- $|\sphericalangle BAP| = 15°$.

Určete velikost úhlu APB. (*P. Bak*)