

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

Z5–I–1

Do políček tabulky 3×3 doplňte všechna přirozená čísla od 1 do 9 tak, aby:

- součet čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný,
- číslo 1 bylo hned vpravo od čísla 6,
- číslo 7 bylo hned vlevo od čísla 5,
- číslo 8 bylo hned nad číslem 3.

Najděte všechny možnosti.

(K. Pazourek)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Součet tří různých přirozených čísel je roven 11. Jedno z těchto čísel je 7. Která čísla mohou být ta zbývající?

[Mohou to být pouze čísla 1 a 3.]

N2. Doplňte do tabulky chybějící čísla tak, aby součty čísel ve všech řádcích i sloupcích byly stejné:

11		2
		8
	3	9

[Součet čísel v řádku či sloupci je $2 + 8 + 9 = 19$. V prvním řádku chybí 6, ve třetím řádku 7, ve druhém řádku pak 1 a 10.]

N3. V řadě stojí přirozená čísla od 1 do 5 seřazená tak, že platí:

- Každá dvě sousední čísla se liší alespoň o dva.
- Číslo 5 stojí hned vpravo od čísla 3.
- Číslo 4 stojí hned vlevo od čísla 2.

V jakém pořadí může stát těchto pět čísel?

[Za sebou stojí čísla 3–5 a 4–2. Vpravo od čísla 2 nemůže být 1, ani 3, tedy 2 stojí úplně vpravo. Číslo 4 nemůže sousedit s 5, tedy 1 musí být před 4. Hledané pořadí je 3–5–1–4–2.]

- N4. Do tabulky se třemi řádky a pěti sloupci máme vepsat přirozená čísla od 1 do 15 tak, aby součet čísel ve všech řádcích byl stejný a také součet čísel ve všech sloupcích byl stejný. Jaký bude součet čísel v každém řádku a jaký bude součet čísel v každém sloupci?

[Součet čísel od 1 do 15 je 120. Tedy součet čísel v každém řádku musí být $120 : 3 = 40$ a součet čísel v každém sloupci musí být $120 : 5 = 24$. To, že takové vyplnění existuje, ukazuje tabulka níže.]

14	2	15	4	5
9	10	6	7	8
1	12	3	13	11

- D1. Mirka a Sandra vyplňovaly následující tabulku čísly:

		10		
		8		

Mirka vyplňovala čísla do horního řádku, Sandra do dolního.

Mirka řekla: „V mém řádku má každé číslo kromě prvního tu vlastnost, že když jej vynásobím číslem pod ním, dostanu číslo vlevo od něj.“

Sandra řekla: „V mém řádku je každé číslo kromě posledního o 3 větší než číslo napravo od něj.“

Doplňte tabulku podle těchto pravidel.

[Doplníme nejprve dolní řádek, poté horní.]

880	80	10	2	1
14	11	8	5	2

- D2. Doplňte tabulku různými lichými čísly menšími než 32 tak, aby součet všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na každé úhlopříčce byl stejný.

	23		27
		15	
	5		9
17		29	7

[Opakující se součet vidíme na jedné z úhlopříček: $27 + 15 + 5 + 17 = 64$. Odtud postupně doplníme chybějící čísla v posledním sloupci, v posledním řádku, ve druhém sloupci atd. Daná čísla byla lichá a součet je sudý, tedy při každém doplnění dostáváme liché číslo.]

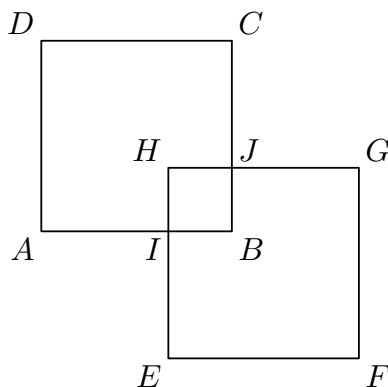
13	23	1	27
3	25	15	21
31	5	19	9
17	11	29	7

Z5–I–2

Dva stejné čtverce $ABCD$ a $EFGH$ se překrývají jako na obrázku. Společný čtyřúhelník $IBJH$ je čtverec, jehož strana je třikrát kratší než strana AB . Obvod mnohoúhelníku $AIEFGJCD$ je 180 cm .

Určete obvod čtverce $ABCD$.

(E. Semerádová)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

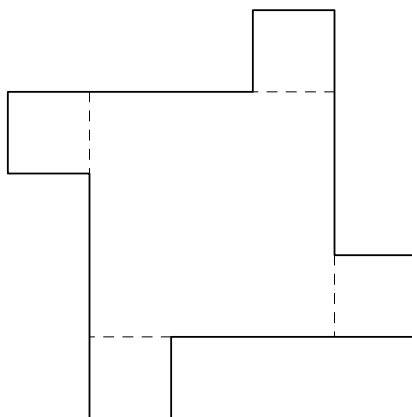
N1. Čtverec o obvodu 56 cm rozdělíme jednou úsečkou na dva stejné obdélníky. Určete obvod jednoho takového obdélníku.

[Strana čtverce měří $56 : 4 = 14\text{ cm}$, tedy strany obdélníku měří 14 cm a 7 cm . Obvod obdélníku je $2 \cdot (14 + 7) = 42\text{ cm}$.]

N2. Máme tři špejle, každá je dlouhá 32 cm . Slepíme je do dlouhé tyčky izolepou tak, že dvě sousední špejle se překrývají čtvrtinami svých délek. Jak dlouhá je výsledná tyčka?

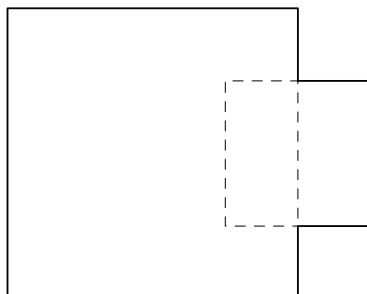
[Délka překryvu dvou špejlí je $32 : 4 = 8\text{ cm}$. Tedy délka tyčky je $3 \cdot 32 - 2 \cdot 8 = 80\text{ cm}$.]

N3. Na obrázku je útvar tvořený jedním velkým a čtyřmi menšími čtverci. Strana každého z menších čtverců je třikrát kratší než strana velkého čtverce. Obvod útvaru je 60 cm . Určete obvod velkého čtverce.



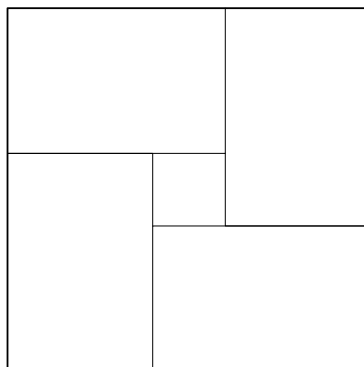
[Obvod celého útvaru lze rozdělit na čtyři stejné části omezené vrcholy velkého čtverce. Každá z těchto částí odpovídá $3 + 2 = 5$ stranám malého čtverce a měří $60 : 4 = 15$ cm. Tedy strana malého čtverce měří $15 : 5 = 3$ cm a strana velkého čtverce $3 \cdot 3 = 9$ cm. Obvod velkého čtverce je $4 \cdot 9 = 36$ cm.]

- N4. Na obrázku je útvar složený ze dvou překrývajících se čtverců, přičemž větší z nich má stranu dvakrát delší než menší čtverec. Strany čtverců jsou rovnoběžné a střed malého čtverce leží ve středu strany velkého čtverce. Obvod celého útvaru je 90 cm. Určete obvod malého čtverce.



[Zvolme si polovinu strany malého čtverce jako jednotkovou úsečku. Pak strana většího čtverce odpovídá 4 jednotkovým úsečkám a obvod celého útvaru 18. Tedy jedna jednotková úsečka měří $90 : 18 = 5$ cm, strana malého čtverce $2 \cdot 5 = 10$ cm a jeho obvod $4 \cdot 10 = 40$ cm.]

- D1. Na obrázku je čtvercová dlaždice se stranou délky 10 dm, která je složena ze čtyř shodných obdélníků a malého čtverce. Obvod malého čtverce je pětikrát kratší než obvod celé dlaždice. Určete rozměry obdélníků.



[Strana malého čtverce měří $10 : 5 = 2$ dm. Delší strana obdélníku je o 2 dm delší než jeho kratší strana a dohromady měří 10 dm. Rozměry obdélníků jsou 4 dm a 6 dm.[?]]

Z5–I–3

Výpravčí na vlakovém nádraží choval pět zvířat: žirafu, pštrosa, paviána, papouška a boxera. Každý den od pondělí do pátku vítalo cestující jedno z těchto zvířat:

- *pštros nevítal v pondělí, ani v pátek,*
- *pavián vítal hned následující den po žirafě,*
- *žirafa nevítala ve středu,*
- *papoušek vítal později v týdnu než žirafa,*
- *boxer první tři dny po víkendu nevítal.*

Které zvíře vítalo cestující v úterý?

(P. Antošová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Pan Řepa jedl v pondělí, úterý, středu a čtvrtek každý den jiné ovoce: jablka, hrušky, třešně a banány. Jablka jedl v úterý. Hrušky nejedl ve středu. Třešně jedl ve čtvrtek. Kdy pan Řepa jedl banány?

[Hrušky mohl jíst pouze v pondělí, tedy banány jedl ve středu.]

N2. Petr, Radek, Standa a Tomáš spolu závodili. Petr doběhl mezi Radkem a Standou. Tomáš doběhl mezi Petrem a Radkem. Kdo z nich mohl zvítězit? Najděte všechny možnosti.

[Zvítězit mohl Radek, nebo Standa.]

N3. Honza měl tři klece (černou, stříbrnou, zlatou) a tři zvířata (morče, potkana a tchoře). V každé kleci bylo jedno zvíře. Zlatá klec stála nalevo od černé klece. Stříbrná klec stála napravo od klece s morčetem. Potkan byl v kleci napravo od stříbrné klece. Určete, v které kleci bylo které zvíře.

[Stříbrná klec nemohla stát na krajích, tedy byla uprostřed. Zlatá klec stála nalevo od černé, tedy pořadí bylo: zlatá, stříbrná, černá. Zvířata v klecích byla postupně: morče, tchoř, potkan.[?]]

[?] Převzato ze 66. ročníku MO, úloha **Z5–I–3**.

[?] Převzato ze 67. ročníku MO, úloha **Z5–I–2**.

D1. Pan režisér Alík potřeboval do televizní pohádky čtyři psy. Dostal nabídku z Řecka, Belgie, Irska a z Dolní Lhoty. Vybral ovčáka, dalmatina, vlkodava a jezevčíka, každého z jiné země, s různým jménem a různým věkem.

- Nejstarší ze psů byl jezevčík, bylo mu 5 let.
- Bucki byl z nich druhý nejmladší.
- Vlkodav pocházel z Irska.
- Pes z Dolní Lhoty se jmenoval Punťa.
- Oddi oslavil včera své čtvrté narozeniny.
- Ovčák pocházel z Belgie.
- Rubby nebyl dalmatin.
- Vlkodav měl tři roky.
- Nejmladší z vybraných psů byl Rubby, byly mu dva roky.

Zjistěte, jak se každý vybraný pes jmenoval, odkud pocházel, jaké byl rasy a kolik mu bylo let.

[Rubbymu byly 2 roky, vlkodavovi (tedy Buckimu) 3, Oddimu 4 a jezevčíkovi 5 let. Jezevčík se tedy jmenoval Punťa a byl z Dolní Lhoty. Rubby nebyl dalmatin, byl to tedy ovčák z Belgie, a Oddi byl dalmatin z Řecka. Bucki byl vlkodav z Irska.[?]]

Z5–I–4

Heslo k trezoru je ukryto ve slově HUMBUK. Různá písmena zastupují různé číslice, stejná písmena zastupují stejné číslice a platí tyto vztahy:

$$H + U = 9, \quad M \cdot B = 12, \quad B - U = 2, \quad U > M, \quad H - K = 5.$$

Najděte heslo k trezoru.

(E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Najděte všechny dvojice navzájem různých čísel od 0 do 9 takových, že jejich a) součet je 13; b) součin je 8; c) rozdíl je 8; d) součet je 14.

[a) 9 a 4, nebo 8 a 5, nebo 7 a 6; b) 8 a 1, nebo 4 a 2; c) 9 a 1, nebo 8 a 0; d) 9 a 5, nebo 8 a 6 (dvojice 7 a 7 nevyhovuje).]

N2. Máme 3 krabičky, každá je označena jedním písmenem A , B , nebo C . V každé krabičce je schováno jedno číslo. V krabičce A je číslo o 5 větší než číslo v krabičce B . V krabičce C je číslo o 2 větší než číslo v krabičce B . Číslo v krabičce A je jedenácté nejmenší dvojčíslí. Která čísla jsou v jednotlivých krabičkách?

[V krabičce A je 20, v krabičce B je 15 a v krabičce C je 17.]

N3. V zápise $KLID$ představuje každé písmeno jinou číslici. Číslice jsou podle velikosti seřazeny stejně jako jim příslušná písmena v abecedě. Hodnota jedné číslice je rovna

[?] Převzato ze 70. ročníku MO, úloha Z5–I–3.

součinu všech ostatních tří číslic. Také platí, že jedna číslice je o 6 menší než jiná číslice. Určete číslo *KLID*.

[Žádná číslice nemůže být 0, neboť součin by byl 0. Nenulové dvojice číslic s rozdílem 6 jsou 1 a 7, nebo 2 a 8, nebo 3 a 9. Součinem tří číslic musí být největší číslice L a jediná vyhovující možnost je $L = 8 = 1 \cdot 2 \cdot 4$. Tedy číslo *KLID* je 4821.]

- D1. V následujícím algebrogramu stejná písmena znamenají stejné číslice, různá písmena různé číslice. Určete číslice A , B a C , aby platilo:

$$AAA + BB + C = 419$$

[Číslo AAA je menší než 419 a větší než $419 - 99 - 9 = 311$, tedy $A = 3$. Potom $BB + C = 419 - 333 = 86$, odkud dostaneme $B = 7$ a $C = 9$.]

Z5–I–5

Xavier, Yvona a Zina sbírají karty pokémonů. Xavier jich má dvakrát více než Zina. Yvona má třetinu Xavierova počtu karet. Některé dvě z dětí mají dohromady rovných 100 karet.

Kolik karet mají všichni tři dohromady? (M. Janičová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Janek, Kamil a Lída šli na houby, dohromady jich našli 50. Kamil našel dvakrát tolik hub, co Janek. Lída jich našla 23. Kolik hub našel Janek a kolik Kamil?

[Janek s Kamilem našli $50 - 23 = 27$ hub. Protože jich Janek našel dvakrát méně než Kamil, musel jich najít třetinu z 27 a Kamil dvě třetiny z 27. Tedy Janek našel 9 hub a Kamil 18 hub.]

- N2. Kabel nabíječky mobilu je dvakrát kratší než kabel od mikrovlnky. Kabel od sekačky trávy je dlouhý jako tři kabely od nabíječky a dva kabely od mikrovlnky dohromady. Kolikrát je kabel od sekačky delší než kabel od nabíječky?

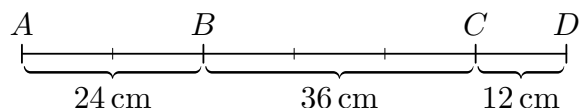
[Vzhledem k nabíječce od mobilu je kabel od mikrovlnky dvakrát delší, tedy kabel od sekačky je 7krát delší ($3 + 2 \cdot 2 = 7$).]

- N3. Adam má pětkrát více kuliček než Bára a ta má třikrát méně kuliček než Cyril. Mohou mít všichni dohromady 60 kuliček?

[Cyril má třikrát více kuliček než Bára a všichni dohromady mají devítinásobek počtu Bářiných kuliček ($1 + 3 + 5 = 9$). Číslo 60 není násobkem devíti, tedy 60 kuliček dohromady mít nemohou.]

- D1. Na úsečce AD jsou umístěny body B a C tak, že bod B leží ve třetině úsečky AD blíže bodu A a bod C leží ve čtvrtině úsečky BD blíže bodu D . Délka úsečky BC je 36 cm. Jak dlouhá je úsečka AD ?

[Bod C odděluje čtvrtinu z úsečky BD , tedy BC tvoří tři čtvrtiny úsečky BD neboli CD je třikrát kratší než BC . Odtud $|CD| = 36 : 3 = 12$ cm a $|BD| = |BC| + |CD| = 36 + 12 = 48$ cm. Podobně BD tvoří dvě třetiny AD , tedy $|AB| = |BD| : 2 = 24$ cm. Délka úsečky AD je $24 + 48 = 72$ cm.]



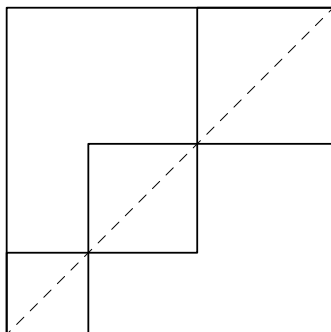
Z5–I–6

Marek měl sadu čtverců s délkami stran v centimetrech vyjádřených všemi přirozenými čísly od 1 do 9. Čtverce vybíral a skládal podle následujících pravidel:

- do největšího vybraného čtverce vložil několik menších čtverců,
- délky stran menších čtverců v centimetrech byly po sobě jdoucí čísla,
- žádné dva menší čtverce se nepřekrývaly,
- úhlopříčky menších čtverců ležely na úhlopříčce velkého čtverce a celou ji pokrývaly.

Jaké délky stran mohly mít čtverce v Markově útvaru? Najděte všechny možnosti.

(M. Macko)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Zapište číslo 9 jako součet několika po sobě jdoucích přirozených čísel. Najděte všechna řešení.

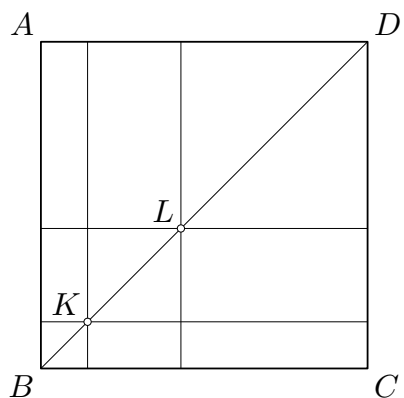
[Jediné možnosti jsou $4 + 5$ nebo $2 + 3 + 4$.]

N2. Je dán čtverec o straně 6 cm a na jeho úhlopříčce několik menších čtverců jako v soutěžní úloze, tj. sousední čtverce se dotýkají vrcholem a délky stran sousedních čtverců v cm jsou celočíselné a postupně se zvětšují o 1 cm. Jaké délky stran mohou mít tyto čtverce? Najděte všechny možnosti.

[Vyhovuje pouze trojice čtverců se stranami délek 1 cm, 2 cm a 3 cm.]

N3. Je dán čtverec $ABCD$ o straně 7 cm. Na jeho úhlopříčce BD sestrojte body K a L tak, aby úsečky BK , KL a LD byly úhlopříčkami čtverců o stranách 1 cm, 2 cm a 4 cm.

[Stačí některou ze stran čtverce rozdělit na úseky délek 1 cm, 2 cm a 4 cm a poté pomocí kolmic sestrojit body K a L na úhlopříčce, viz obrázek níže.]



- D1. Je dán čtverec o straně 10 cm a na jeho úhlopříčce a) dva; b) pět; c) libovolný počet čtverců, které na sebe navazují úhlopříčkami jako v soutěžní úloze. Délky stran těchto čtverců mohou být libovolné. Určete součet obvodů takto vložených čtverců.

[Kolmé průměty stran vložených čtverců na strany velkého čtverce pokryjí obvod tohoto čtverce, viz obrázek výše. Tedy součet obvodů vložených čtverců je roven obvodu daného čtverce, tj. 40 cm.]

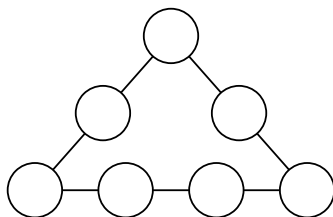
Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z6

Z6–I–1

Na stranách trojúhelníku je sedm prázdných kroužků jako na obrázku. Vepište do každého kroužku jedno přirozené číslo od 1 do 9 tak, aby žádné číslo nebylo použito vícekrát a aby součin čísel na všech stranách byl stejný.

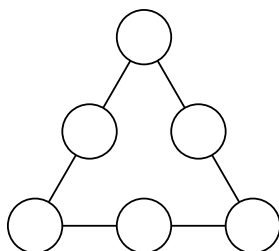
Která čísla mohou být na straně se čtyřmi kroužky?

(E. Novotná)

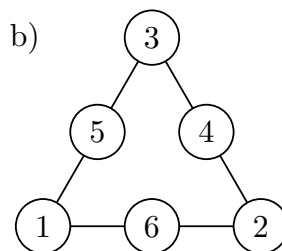
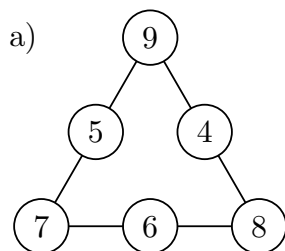


NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Do kroužků na obrázku vepište některé z čísel 1 až 9 (každé nejvýše jednou) tak, aby součet čísel na všech stranách trojúhelníku byl stejný a současně a) co největší; b) co nejmenší.



[Čísla ve vrcholech se započítávají dvakrát, ostatní jednou. Vyplnění s extrémními součty jsou na obrázcích níže.]

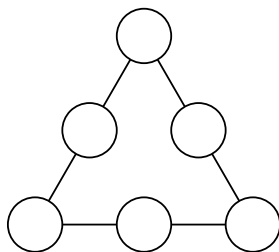


N2. Z přirozených čísel od 1 do 9 vyberte šest tak, aby je bylo možné rozdělit a) do dvou; b) do tří skupin se stejným součinem. Určete příslušné součiny.

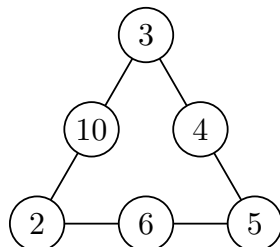
[V každé skupině musí být zastoupena stejná prvočísla ve stejném počtu. Tedy nelze použít 5, ani 7. V rozkladech zbylých čísel je sedmkrát 2 a čtyřikrát 3. a) Potřebujeme

vynechat 8, nebo 2; odpovídající součiny jsou $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 4 \cdot 9 = 36$, nebo $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 8 \cdot 9 = 72$.
 b) Takové rozdělení není možné kvůli zastoupení prvočísla 3 (v každé skupině by muselo být právě jednou a objevuje se jen v číslech 3, 6 a 9, přičemž v devítce dvakrát).]

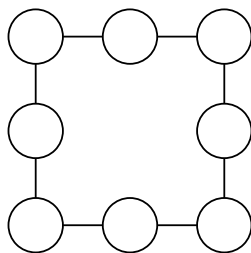
- N3. Do kroužků na obrázku vepište různá přirozená čísla větší než 1 (každé nejvýše jednou) tak, aby součin na každé straně trojúhelníku byl 60.



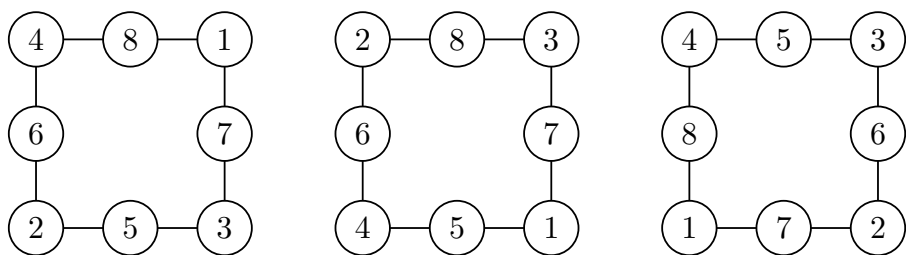
[Platí $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, tedy na každé straně musí být čísla složená z těchto činitelů. Až na otočení a překlopení je řešení jediné, viz obrázek níže.]



- D1. Do kroužků na obrázku vepište čísla od 1 do 8 (každé právě jednou) tak, aby součty čísel na stranách čtverce byly čtyři po sobě jdoucí čísla a byly co nejmenší. Najděte alespoň tři vyhovující doplnění. Která čísla budou ve vrcholech čtverce?



[Součet všech čtyř součtů na stranách je 36 (součet čísel od 1 do 8) plus ještě alespoň 10 (součet nejmenších čtyř čísel ve vrcholech, které se započítávají dvakrát), tj. alespoň 46. Čtyři po sobě jdoucí čísla se součtem 46 jsou 10, 11, 12, 13, tedy ve vrcholech musí být 1, 2, 3, 4. Tři z možných doplnění jsou na obrázku níže (celkem jich je až na otočení a překlopení 12).]

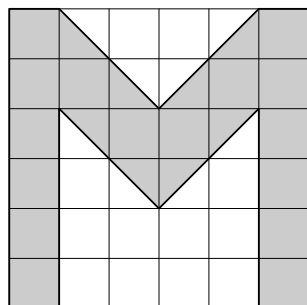


Z6–I–2

Viola ve čtvercové síti $6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ vybarvila útvar připomínající písmeno M jako na obrázku. Starší bratr Vilda poznamenal, že po vhodném otočení by útvar připomínal řecké písmeno Σ (velké sigma). Violu to zaujalo a otočený útvar nakreslila do stejné sítě přes ten původní, avšak jinou barvou.

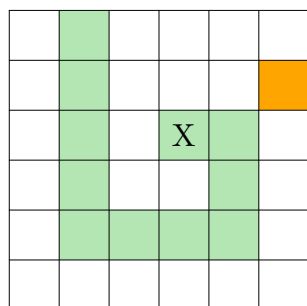
Určete obsah části sítě vybarvené oběma barvami.

(M. Macko)

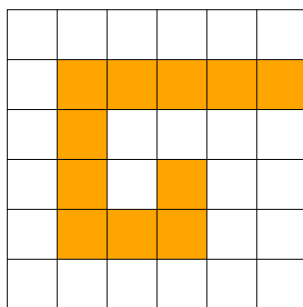


NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

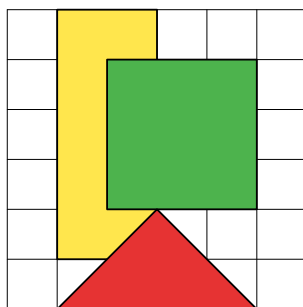
- N1. Po hrací desce jako na obrázku se pohybovaly figurky. Zelená figurka vstoupila na krajní zelené pole a po polích této barvy se dostala na pole označené X . Druhá figurka vstoupila na oranžové pole a pohybovala se po hrací desce obdobně jako zelená figurka (stejně počty kroků i otočení). Vyznačte, po kterých polích šla oranžová figurka. Na kolik polí stoupily obě figurky?



[Druhá figurka vykročila doleva, viz obrázek níže. Společných polí měly obě figurky 6.]

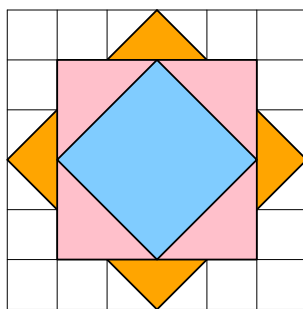


- N2. Ve čtvercové síti o rozměrech $18\text{ cm} \times 18\text{ cm}$ je umístěn zelený čtverec, žlutý obdélník a červený rovnoramenný trojúhelník jako na obrázku. Jaký je obsah části sítě, kterou pokrývá více než jeden z těchto tvarů?



[Čtverec a obdélník mají společná 3 pole, obdélník a trojúhelník půl pole, čtverec a trojúhelník žádné. Jedno pole má obsah 9 cm^2 , tedy 3,5 sdílených polí má obsah $31,5\text{ cm}^2$.]

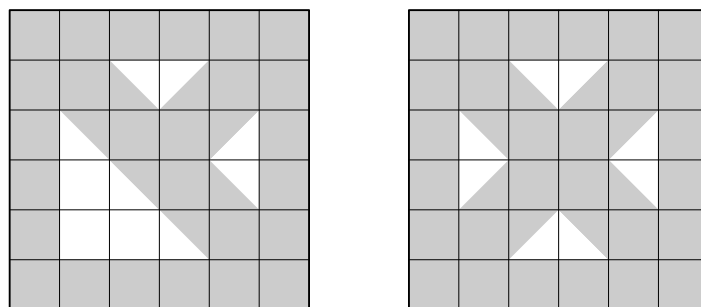
- D1. Na podlaze vydlážděné čtvercovými dlaždicemi s obsahem 4 dm^2 jsou položeny tři čtvercové koberce jako na obrázku. Jak velký povrch podlahy zakrývají právě dva koberce?



[Zajímá nás překryv oranžového a růžového koberce mimo oblast, kde je modrý koberec. Ten má obsah šesti dlaždic, tedy 24 dm^2 .]

- D2. Útvar ze soutěžní úlohy jsme třikrát po sobě otočili o čtvrt otáčky doprava kolem středu sítě a každý otočený útvar vybarvili do původní čtvercové sítě. Určete obsah části sítě, která zůstala nevybarvená.

[Výsledky po prvních dvou otočeních jsou znázorněny níže, při třetím otočení se už žádná nová pole nevybarví. Nevybarveno zůstalo osm polovin čtverečků, tedy 4 cm^2 .]



Z6–I–3

Jedna čokoláda stojí několik eur a několik desítek centů. Za 10 eur můžeme koupit nanejvýš tři čokolády, za 15 eur nanejvýš pět čokolád, za 30 eur nanejvýš jedenáct čokolád a pokaždé by nám prodavač nějaké peníze vrátil.

Jaká může být cena jedné čokolády? Najděte všechny možnosti. (M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Zbyněk si chce koupit balení sušenek v automatu, který nevrací peníze. Jedno balení stojí 1,40 eura a Zbyněk má jen hodně jednoeurových mincí. Kolik nejvýše balení si může koupit za 9 eur? Kolik nejméně balení si musí koupit, aby mohl zaplatit přesně?

[Za 9 eur si může koupit nejvýše 6 balení (za 8,40 eura). Aby zaplatil přesně, musí si koupit nejméně 5 balení (za 7 eur).]

- N2. Skupina kamarádů se snaží rozdělit do týmů pro hraní šifrovací hry. Dokázali by sestavit nejvýše čtyři týmy po třech hráčích, nebo nejvýše dva týmy po pěti hráčích, nebo nejvýše jeden tým po sedmi hráčích, ale pokaždé by někdo zůstal navíc. Kolik bylo ve skupině kamarádů?

[Z první podmínky plyne, že kamarádů bylo více než 12 a méně než 15, ze druhé, že jich bylo více než 10 a méně než 15, a ze třetí, že jich bylo více než 7 a méně než 14. Ve skupině bylo 13 kamarádů.]

- N3. Sofiin pokoj má rozměry $4\text{ m} \times 5\text{ m}$. Na vzdálenost 4 m mezi pravou a levou stěnou Sofie udělá 5 stejně dlouhých kroků a zbyde jí kousek kratší než krok. Na vzdálenost 5 m mezi přední a zadní stěnou udělá 6 stejně dlouhých kroků a opět jí zbyde kousek kratší než krok. Jak dlouhý může být Sofiin krok, jestliže měří celý počet centimetrů? Najděte všechny možnosti.

[Z první podmínky plyne, že Sofiin krok měří nejméně 67 cm a nejvýše 79 cm, z druhé podmínky, že měří nejméně 72 cm a nejvýše 83 cm. Sofiin krok může měřit 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, nebo 79 cm.]

- D1. Cena lanýže i pralinky je vyjádřena v celých desítkách centů a je menší než jedno euro. Za 2 eura by si Lída mohla koupit nejvýše 2 pralinky. Za 4 eura by si mohla koupit 1

pralinku a k ní nejvýše 5 lanýžů. Pokaždé by jí v obchodě nějaké peníze vrátili. Kolik stojí lanýž a kolik pralinka? Najděte všechny možnosti.

[Z první podmínky plyne, že pralinka mohla stát 0,70, nebo 0,80, nebo 0,90 eura. Ze 4 eur by Lídě na 5 lanýžů zůstalo 3,30, nebo 3,20, nebo 3,10 eura. V každém případě lanýž stojí 0,60 eura.]

Z6–I–4

Z následujících kartiček máme skládat desetinná čísla, jejichž zápis nezačíná nulou a za desetinnou čárkou je alespoň jedna číslice:

01	12	23	34	5	,	,
----	----	----	----	---	---	---

- a) Ze všech kartiček složte dvě čísla s největším možným součtem.
b) Ze všech kartiček složte dvě čísla s nejmenším možným kladným rozdílem.

V obou případech určete všechny možné dvojice vyhovujících čísel. (K. Pazourek)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Z čísel 52, 17, 8, 94, 36, 88 vyberte dvě, jejichž a) součet; b) rozdíl je největší možný.
[Největší možný součet mají čísla 94 a 88, největší rozdíl čísla 94 a 8.]

N2. Máme šest kartiček s čísly 52, 17, 8, 94, 36, 88. Přikládáním kartiček vedle sebe složte ze všech kartiček dvě čísla tak, aby byl jejich součet a) největší; b) nejmenší možný.
[a) Jedno číslo má být co nejdelší a začínat co největšími kartičkami. Největší součet je $9488523617 + 8 = 9488523625$. b) Obě čísla mají mít co nejméně číslic a začínat co nejmenšími kartičkami. Nejmenší součet je $175294 + 36888 = 212182$.]

N3. Z některých čtyř číslic 1, 4, 5, 6 a 9 složte dvě desetinná čísla menší než 10 s jedním desetinným místem tak, aby byl jejich a) součet; b) rozdíl největší možný.
[a) Na místě jednotek mají být co největší číslice 9 a 6, na místě desetin 5 a 4. Největší součet je $9,5 + 6,4 = 15,9$, případně vyjádřený jako $9,4 + 6,5 = 15,9$. b) Menšenec má být co největší a menšitel co nejmenší. Největší rozdíl je $9,6 - 1,4 = 8,2$.]

D1. Jirka měl v osudí 9 míčků označených číslicemi od 1 do 9. Vytáhl čtyři míčky a z jejich číslic složil dvě dvojmístná čísla s největším možným rozdílem, který byl 82. Jaká mohla být vzniklá dvojmístná čísla? Určete všechny možnosti.
[Menšenec byl tvořen dvěma největšími, menšitel dvěma nejmenšími taženými číslicemi. Tedy rozdíl číslic na místě desítek byl 8 (jedině 9 a 1) a na místě jednotek 2 (pět možností). Vzniklá čísla mohla být 98 a 16, nebo 97 a 15, nebo 96 a 14, nebo 95 a 13, nebo 94 a 12.]

Z6–I–5

V jistém trojúhelníku platí:

- jedna strana měří 10 cm,
- délky dvou stran se liší o 4 cm,
- obvod je 32 cm.

Najděte délky stran všech trojúhelníků s těmito vlastnostmi.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Bohouš měl doma prkénka délek 3, 4, 5, 6, 7 a 8 decimetrů. Ze tří prkének chtěl sestavit výběh pro křečka ve tvaru trojúhelníku. Jaké trojice prkének nemohl použít?

[Nemohl použít trojice prkének o délkách (3, 4, 7), (3, 4, 8) a (3, 5, 8): v žádné z nich není součet dvou kratších délek větší než délka třetí.]

- N2. Maruška, Anička a Bára sbíraly třešně do společné misky. Anička dala do misky 16 třešní, počty třešní Báry a Marušky se lišily o 3 a nakonec bylo v misce 27 třešní. Kolik třešní dala do misky Maruška, jestliže sbírá třešně zásadně po dvou?

[Bára a Maruška daly do misky dohromady 11 třešní. Protože se jejich počty lišily o 3, musela jedna z nich dát do misky 7 třešní a druhá 4. Maruška sbírá třešně po dvou, dala tedy do misky 4 třešně.]

- N3. Pat a Mat postavili ke své chatě tři schody, ale nepovedlo se jim udělat schody stejně vysoké. Dohromady měly výšku 1 metr, jeden ze schodů měřil 20 cm a dva se od sebe lišily o 10 centimetrů. Jaká mohla být výška nejvyššího schodu? Uveďte všechny možnosti.

[Rozlišíme, zda se o 10 cm liší schod o výšce 20 cm od jiného, nebo zbylé dva schody. Výšky schodů v cm mohly být 20, 10, 70, nebo 20, 30, 50, nebo 20, 35, 45. Nejvyšší schod mohl měřit 70, 50, nebo 45 cm.]

- D1. Erika, Karel, Iva a Vojta se bavili o jistém trojúhelníku, jehož strany mají navzájem různé délky vyjádřené v centimetrech celými čísly:

- Erika: „Jedna strana měří 12 cm.“
- Karel: „Délky jedné dvojice stran se liší o 3 cm a délky jiné dvojice stran se také liší o 3 cm.“
- Iva: „Obvod trojúhelníku je mezi 44 a 50 cm.“
- Vojta: „Délky dvou stran jsou vyjádřeny lichými čísly.“

Jeden z kamarádů nemluví pravdu, ale Ivě a Karlovi určitě věřit můžeme. Jaké mohou být délky stran trojúhelníku?

[Podle Karla strany měří a , $a+3$ a $a+6$, kde a značí délku nejkratší strany v cm. Obvod $3a+9$ je dělitelný třemi, tedy podle Ivy je buď 45, nebo 48 cm. Pokud nemluví pravdu Erika, měří strany 13, 16 a 19 cm. Pokud nemluví pravdu Vojta, měří strany 12, 15 a 18 cm.]

Z6–I–6

V posluchárně je skupina žáků a lavice, z nichž každá má dvě místa. Kdyby se dívky posadily samostatně a chlapci po dvojicích, zbylo by 9 lavic neobsazených. Kdyby se chlapci posadili samostatně a dívky po dvojicích, zbylo by 12 lavic neobsazených. Kdyby všichni seděli po dvojicích, obsazených lavic by bylo stejně jako neobsazených.

Kolik lavic je v posluchárně?

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Ve třídě je 18 dvoulístných lavic. Na hodině matematiky je dnes 14 dívek a 10 chlapců. Kolik lavic by zůstalo volných, kdyby si sedli

- a) všichni po dvojicích;
- b) dívky po dvojicích a chlapci samostatně;
- c) chlapci po dvojicích a dívky samostatně?

[a) Všichni po dvojicích obsadí 12 lavic, volných zůstane 6 lavic. b) Dívky obsadí 7 lavic a chlapci 10 lavic, volná zůstane 1 lavice. c) Chlapci obsadí 5 lavic a dívky 14 lavic, tedy 19 lavic. Takové usazení není možné, jedna lavice by chyběla.]

N2. Třída 3. B se přesunula na výuku do auly s dvoulístnými lavicemi. Když si všichni žáci sedli po dvojicích, bylo v aule o 9 neobsazených lavic víc, než když si sedl každý z nich sám. Když seděli všichni sami, zbývalo v aule 5 volných lavic. Kolik lavic je v aule?

[Rozdíl devíti neobsazených lavic znamená, že žáků bylo 18. Když seděli samostatně, zabírali 18 lavic a 5 bylo volných. V aule je 23 lavic.]

N3. Ve třídě s dvoulístnými lavicemi se dnes sešlo 32 dětí. Kdyby si každá dívka sedla s chlapcem a zbylí chlapci si sedli jednotlivě, bylo by obsazených lavic o 4 víc, než kdyby si všichni sedli po dvojicích. Kolik je ve třídě dívek a kolik chlapců?

[Chlapců je o 8 víc než dívek. Ve třídě je 12 dívek a 20 chlapců.]

D1. Marek dělal průzkum, jak lidé z jeho vesnice jezdí do práce. Zjistil, že někteří jezdí autobusem, někteří autem sami, někteří autem ve dvou a někteří autem ve třech. Kdyby všichni jeli autobusem, vyjelo by z vesnice o 13 aut méně a v autobuse by bylo o 24 lidí více. Kdyby si ti, kteří jezdí autem sami, přisedli k jiným do aut, vyjelo by stejně aut, jako kdyby ti, kteří jezdí autem ve dvou, jeli autobusem. Kolik lidí jezdí do práce autem ve dvou?

[Z první informace plyne, že ve 13 autech jezdí celkem 24 lidí. Ze druhé informace plyne, že aut s jedním člověkem je stejně jako aut se dvěma. Jediná možnost vychází tak, že je 5 aut s jedním, 5 aut se dvěma a 3 auta se třemi lidmi. Autem ve dvou jezdí 10 lidí.]

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z7

Z7–I–1

Je dán čtverec, který je složen z 52 nepřekrývajících se menších čtverců. Z nich 51 má obsah 1 cm^2 a zbylý čtverec má délku strany v centimetrech vyjádřenou přirozeným číslem.

Jaký obsah může mít daný čtverec? Určete všechny možnosti. (E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Míša měla v krabici dílky skládačky, celkem 8 čtverců o straně 1 cm a 5 čtverců o straně 2 cm. Opakovaně z těchto dílků sestavovala čtverce. Jaké obsahy mohly mít sestavené čtverce? Najděte všechny možnosti.

[Lze sestavit čtverec o obsahu 1 cm^2 , 4 cm^2 , 9 cm^2 a 16 cm^2 . Na čtverec s obsahem 25 cm^2 nemá Míša dost vhodných dílků a útvar s obsahem větším než 28 cm^2 ze svých dílků nesloží.]

- N2. Máme obdélníkové dílky o rozměrech $3 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$. Jaký je obsah nejmenšího čtverce sestaveného z takových dílků?

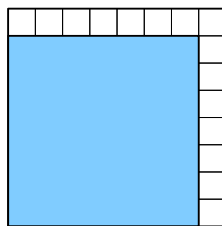
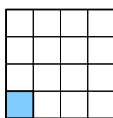
[Obsah čtverce je násobkem 15, nejmenší obsah je $15 \cdot 15 = 225 \text{ cm}^2$. Takový čtverec poskládat lze: 5 dílků podél jedné strany, 3 podél druhé.]

- N3. Máme obdélníkové dílky o rozměrech $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$. Jaký je obsah nejmenšího čtverce sestaveného z takových dílků?

[Obsah čtverce je násobkem 24, nejmenší takový obsah je $12 \cdot 12 = 6 \cdot 24 = 144 \text{ cm}^2$. Takový čtverec poskládat lze: 3 dílky podél jedné strany, 2 podél druhé.]

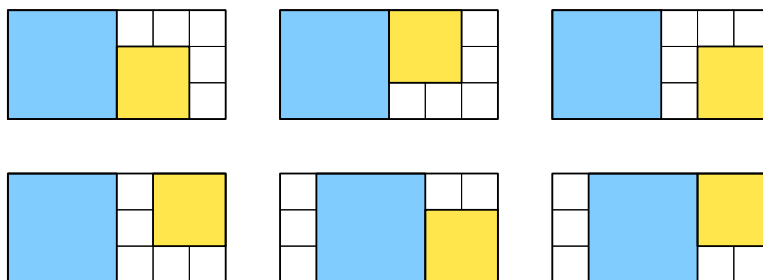
- N4. Strana čtverce je v centimetrech vyjádřena přirozeným číslem. Čtverec jsme doplnili 15 čtverečky o straně 1 cm na větší čtverec. Jakou stranu mohl mít původní čtverec? Najděte všechny možnosti.

[Rozdíl obsahů většího a menšího čtverce je 15 cm^2 . Postupným zkoušením zjistíme, že původní čtverec mohl mít stranu 1 cm, nebo 7 cm ($1 \cdot 1 + 15 = 4 \cdot 4$, $7 \cdot 7 + 15 = 8 \cdot 8$).]



- D1. Máme k dispozici pět čtvercových dílků o straně 1 cm, jeden čtvercový dílek o straně 2 cm a jeden čtvercový dílek o straně 3 cm. Kolika způsoby můžeme ze všech těchto dílků poskládat obdélník? Záleží jen na poloze čtvercových dílků v obdélníku. Dvě poskládání budeme považovat za stejná, pokud se dají na sebe převést otočením.

[Obsah obdélníku musí být $5 \cdot 1 + 4 + 9 = 18 \text{ cm}^2$ a obě jeho strany musí měřit alespoň 3 cm. Jediný vyhovující obdélník má rozměry 3 cm a 6 cm. Možná poskládání jsou znázorněna na obrázku níže.]



Z7–I–2

Ve čtyřech zásuvkách bylo dohromady 62 kuliček. Postupně jsme do některých zásuvek přesouvali kuličky z ostatních tří zásuvek, a to ze všech stejně:

- nejprve po šesti kuličkách do třetí zásuvky,
- poté po třech kuličkách do druhé zásuvky,
- poté po jedné kuličce do první zásuvky.

Nakonec bylo ve druhé zásuvce o pět kuliček víc než v první, ve třetí o pět víc než ve druhé a ve čtvrté o pět víc než ve třetí.

Kolik kuliček bylo v jednotlivých zásuvkách před přesouváním? (V. Dedek)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. V každé ze dvou misek bylo 15 kuliček. Kolik kuliček musíme přendat z první misky do druhé, aby

- jich ve druhé misce bylo o 8 více než v první misce;
- jich ve druhé misce bylo o 9 více než v první misce;
- jich ve druhé misce bylo čtyřikrát více než v první misce?

[Každá přendaná kulička zvětší rozdíl o 2. a) 4 kuličky; b) nelze, rozdíl musí být sudý; c) 9 kuliček.]

N2. Máme tři misky a v nich kuličky. V první misce je o 7 kuliček méně než ve druhé misce. Ve druhé misce je o polovinu více kuliček než ve třetí misce. Ve třetí misce je 60 kuliček. Kolik kuliček je v první misce?

[Ve druhé misce je $60 + 30 = 90$ kuliček, v první je $90 - 7 = 83$ kuliček.]

N3. Ve dvou miskách byl stejný počet kuliček. Když jsme z první misky přendali 4 kuličky do druhé misky, bylo ve druhé misce třikrát tolik kuliček jako v první misce. Kolik kuliček bylo původně v první misce?

[Po přendání byla v první misce čtvrtina a ve druhé tři čtvrtiny všech kuliček, předtím v každé polovina. Přendané 4 kuličky tvoří čtvrtinu všech kuliček, tedy všech kuliček je 16 a v první misce jich původně bylo 8.]

D1. V každé ze čtyř misek máme stejný počet kuliček. Z první misky přesuneme polovinu kuliček do čtvrté misky a z druhé misky přesuneme dvě kuličky do třetí misky. Nyní

je v každé následující misce o stejný počet kuliček více než v předchozí misce. Kolik kuliček dohromady bylo ve všech miskách?

[Po přesunu je ve třetí misce o 4 kuličky více než ve druhé. Stejně se musí lišit počty kuliček v první a druhé misce, tedy z první misky jsme odebrali 6 kuliček. V první misce tak původně bylo $6 \cdot 2 = 12$ kuliček a ve všech miskách bylo dohromady $4 \cdot 12 = 48$ kuliček.]

- D2. Sněhurka dala každému trpaslíkovi stejný počet kuliček. Trpaslíci házeli hrací kostkou. Kolik jim padlo teček, tolik kuliček museli vrátit Sněhurce. Každému ze šesti trpaslíků padl jiný počet teček. Kolik teček padlo sedmému trpaslíkovi, když trpaslíkům zbylo dohromady 46 kuliček? Kolik kuliček dala Sněhurka každému trpaslíkovi na začátku?

[Šest trpaslíků hodilo navzájem různá čísla, tedy 1, 2, 3, 4, 5 a 6, a vrátili dohromady 21 kuliček. Sedmý vrátil nejvýše 6 kuliček, takže Sněhurka rozdala nejméně $46 + 21 + 1 = 68$ a nejvýše $46 + 21 + 6 = 73$ kuliček. Toto číslo musí být dělitelné sedmi, jediné takové je 70, tedy každý trpaslík dostal $70 : 7 = 10$ kuliček. Sedmému trpaslíkovi padly $70 - 46 - 21 = 3$ tečky.[?]]

Z7–I–3

Ciferník čarodějných hodin má obvyklý tvar kruhu, ale neobvyklý počet hodin. Čísla hodin jsou rozmístěna rovnoměrně po obvodu kruhu, je jich více než 50 a méně než 80. Proti číslu 36 vzhledem ke středu ciferníku je číslo dělitelné pěti.

Kolik hodin mohou mít čarodějné hodiny? Určete všechny možnosti. (M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Uvažme ciferník běžných ručičkových hodin (s dvanácti hodinami). Která čísla leží proti číslům dělitelným pěti vzhledem ke středu ciferníku?

[Násobky pěti jsou 5 a 10. Proti nim leží 11 a 4.]

- N2. Které číslo by bylo proti číslu 36 vzhledem ke středu ciferníku, kdyby čarodějné hodiny měly a) 40 hodin; b) 41 hodin; c) 42 hodin?

[a) Proti 40 leží $40 : 2 = 20$, proti 39 leží 19 atd., tedy proti 36 leží 16. b) Počet hodin je lichý, tedy žádná dvě čísla na ciferníku nejsou středově souměrná. c) Podobně jako v a) odvodíme, že proti 36 leží číslo 15.]

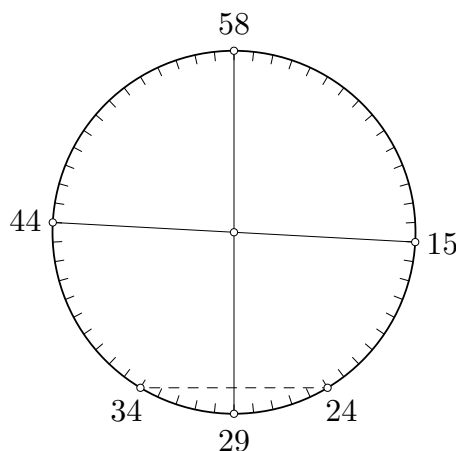
- N3. Na obyčejných hodinách je úplně nahoře číslo 12, úplně vpravo 3, úplně dole 6 a úplně vlevo 9. Také na čarodějných hodinách je největší číslo úplně nahoře, vpravo od něj je 1 a ve stejném směru jako na obyčejných hodinách čísla přibývají. Kolik hodin by měly čarodějné hodiny, kdyby číslo 36 bylo a) úplně vpravo; b) úplně vlevo; c) druhé vpravo od čísla úplně dole; d) druhé vlevo od čísla úplně nahoře?

[a) Číslo 36 je ve čtvrtině, hodin je $36 \cdot 4 = 144$. b) Číslo 36 je ve třech čtvrtinách, hodin je $36 : 3 \cdot 4 = 48$. c) Úplně dole je $36 + 2 = 38$, hodin je $38 \cdot 2 = 76$. d) Úplně nahoře je $36 + 2 = 38$, což je počet hodin.]

[?] Převzato z 55. ročníku MO, úloha Z6–II–3.

- D1. Na ciferníku elfích hodin jsou čísla 24 a 34 souměrná podle přímky procházející středem ciferníku a jeho největším číslem. Které číslo je středově souměrné s číslem 15 vzhledem ke středu ciferníku?

[Aritmetický průměr čísel 24 a 34 je 29. To je číslo na ose souměrnosti proti největšímu číslu, tedy největší číslo na ciferníku je $2 \cdot 29 = 58$. Proti číslu 15 je číslo $15 + 29 = 44$.]



Z7–I–4

Anna a Zina bydlí na stejné ulici. Jednou vyrazily současně proti sobě od svých domů, každá svojí konstantní rychlostí. Zina zjistila, že zapoměla mobil, v osmině vzdálenosti mezi oběma domy se otočila a vrátila se ke svému domu. Tam jí maminka mobil podala a Zina se ihned vydala původním směrem. Když se dívky potkaly, byly v polovině cesty mezi svými domy a od jejich současného startu uplynulo 15 minut.

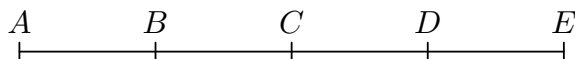
Za jak dlouho by se dívky potkaly, kdyby se Zina nevracela? (M. Janičová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Z místa A vede do místa B cesta dlouhá 12 km, z místa B vede do místa C cesta dlouhá 24 km. Arnošt vyšel z A a současně proti němu vyšel Ctirad z C , každý svou stálou rychlostí. Setkali se uprostřed mezi místy B a C . Jak daleko od C by se setkali, kdyby Arnošt nevycházel z místa A , ale z místa B ?

[Arnošt ušel $12 + 12 = 24$ km a Ctirad 12 km. Arnošt ušel dvojnásobek toho, co Ctirad neboli Arnošt je dvakrát rychlejší než Ctirad. Ze vzdálenosti 24 km mezi B a C by Ctirad ušel třetinu, tedy by se setkali 8 km od místa C .]

- N2. Úsečka AE je body B, C, D rozdělena na čtyři stejně dlouhé úseky. Mravenec vyšel z bodu A do B a vrátil se zpět do A . Potom šel do C , zpět do A , pak do D , zpět do A a nakonec do E . Beruška šla rovnou z bodu A do bodu E . Kolikrát byla cesta беруšky kratší než cesta mravence?



[Mravenec ušel $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 16$ úseků, беруška jen 4 úseky. Beruška ušla čtyřikrát kratší vzdálenost.]

- N3. Petr by za 5 minut ujel na kole $\frac{1}{6}$ trasy. Pěšky by za 40 minut ušel $\frac{1}{4}$ téže trasy. Vyrazil na kole, v polovině trasy píchl duši, a zbytek došel pěšky. Jak dlouho mu trvalo překonat celou trasu?

[Polovina jsou tři šestiny, resp. dvě čtvrtiny. Petr na kole jel $3 \cdot 5 = 15$ minut a pěšky šel $2 \cdot 40 = 80$ minut. Celou trasu překonal za 95 minut.]

- N4. Želvy Žaneta a Žofie jsou sestry a žijí v jednom domě se zahradou. Žaneta potřebuje na ujití stejné dráhy o třetinu více času než Žofie.

- a) Pokud Žofie obejde zahradu za 3 hodiny, za jak dlouho by ji obešla Žaneta?
- b) Pokud Žaneta obejde dům za 2 hodiny, za jak dlouho by ho obešla Žofie?
- c) Pokud má Žaneta ujit dráhu dvanáctkrát delší než Žofie, kolikrát více času bude potřebovat?

[Stejnou dráhu ujede Žaneta za $\frac{4}{3}$ doby Žofie, tj. Žofie za $\frac{3}{4}$ doby Žanety. a) Žaneta obejde zahradu za $\frac{4}{3} \cdot 3 = 4$ hodiny. b) Žofie obejde dům za $\frac{3}{4} \cdot 2 = 1,5$ hodiny. c) Žaneta bude potřebovat $12 \cdot \frac{4}{3} = 16$ krát více času.]

Z7–I–5

Kolik je trojic číslic a, b, c takových, že dvojmístná čísla $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ac}$ a trojmístné číslo $\overline{abc}$ jsou všechna dělitelná třemi? (P. Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Připomeňte si kritérium dělitelnosti třemi a rozhodněte, která z následujících čísel jsou dělitelná třemi:

44, 555, 6 666, 789.

[Stačí kontrolovat ciferné součty; dělitelná třemi jsou čísla 555, 6 666 a 789.]

- N2. Kterou číslici v čísle a) 45 678; b) 5 678 910 můžeme odstranit, aby vzniklo číslo dělitelné třemi?

[Obě čísla jsou dělitelná třemi, tedy odstraněná číslice musí být dělitelná třemi. V prvním čísle je to jedině 6, ve druhém 6, 9, nebo 0.]

- N3. Jakou hodnotu může mít číslice a , aby pětímístné číslo $\overline{647aa}$ bylo dělitelné třemi?

[Ciferný součet je dělitelný třemi pro $a = 2, 5$, nebo 8 .]

- N4. Je dána posloupnost čísel

1, 12, 123, 1 234, 12 345, ... 123 456 789.

Najděte v ní dvojice sousedních čísel, která jsou obě dělitelná třemi.

[Ciferné součty čísel posloupnosti jsou postupně 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 a 45. Hledané dvojice jsou 12 a 123, 12 345 a 123 456, 12 345 678 a 123 456 789.]

- D1. Kolik je dvojic číslic a, b takových, že sedmimístné číslo $\overline{ab05baa}$ je dělitelné třemi?

[Ciferný součet $3a + 2b + 5$ je dělitelný třemi, právě když je $2b + 5$ dělitelné třemi. Tedy číslice b může být 2, 5, nebo 8 a číslice a může být libovolná nenulová. Vyhovujících dvojic je $9 \cdot 3 = 27$.]

Z7–I–6

V daném obdélníku $ABCD$ leží na straně CD bod E tak, že úsečky AE a EC jsou shodné. Osa úsečky AE prochází bodem D a protíná úhlopříčku AC v bodě G .

Určete velikost úhlu DGC .

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. V trojúhelníku ABC leží vrchol A na ose strany BC a platí a) $|\sphericalangle ABC| = 70^\circ 40'$; b) $|\sphericalangle CAB| = 70^\circ 40'$. Vypočítejte velikost úhlu BCA .

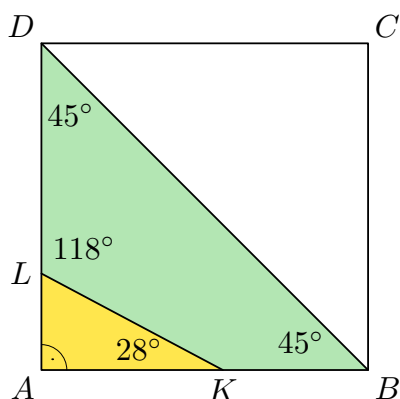
[Trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou BC , tedy vnitřní úhly u vrcholů B a C jsou shodné. Velikost úhlu BCA je a) $70^\circ 40'$; b) $(180^\circ - 70^\circ 40') : 2 = 54^\circ 40'$.]

- N2. Osa strany AB kosočtverce $ABCD$ prochází vrcholem D . Určete velikosti všech vnitřních úhlů kosočtverce $ABCD$.

[Trojúhelník ABD je rovnoramenný se základnou AB . Protože kosočtverec má všechny strany shodné, je trojúhelník ABD dokonce rovnostranný. Vnitřní úhly u vrcholů A a C mají velikost 60° a zbylé vnitřní úhly mají velikost 120° .]

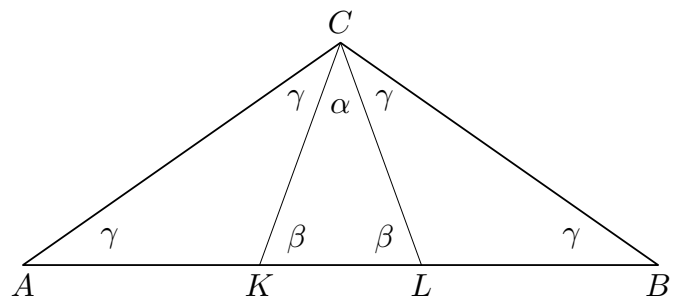
- N3. V daném čtverci $ABCD$ leží na straně AB bod K a na straně AD bod L tak, že $|\sphericalangle AKL| = 28^\circ$. Vypočítejte velikost úhlu DLK pomocí a) trojúhelníku AKL ; b) čtyřúhelníku $KBDL$.

[Vychází $|\sphericalangle DLK| = 118^\circ$, což lze zdůvodnit pomocí a) vztahu mezi vnějším úhlem a nepřiléhajícími vnitřními úhly trojúhelníku ($90^\circ + 28^\circ = 118^\circ$); b) součtu vnitřních úhlů čtyřúhelníku ($360^\circ - (180^\circ - 28^\circ) - 45^\circ - 45^\circ = 118^\circ$).]



- D1. V trojúhelníku ABC jsou na straně AB umístěny body K, L tak, že $|AK| = |KC| = |CL| = |LB|$, přičemž $|AK| < |AL|$ a $|\sphericalangle KCL| = 40^\circ$. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC .

[Trojúhelník KLC je rovnoramenný se základnou KL a trojúhelníky ACK a BCL jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky se základnami AC a BC . Navzájem shodné úhly jsou na obrázku níže označeny stejnými symboly. Součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABC je $\alpha + 4\gamma = 180^\circ$. Ze zadání známe $\alpha = 40^\circ$, tedy $\gamma = (180^\circ - 40^\circ) : 4 = 35^\circ$. To jsou velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC u vrcholů A a B , vnitřní úhel u vrcholu C má velikost $\alpha + 2\gamma = 110^\circ$.]



Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z8

Z8–I–1

Klasická hrací kostka má na svých stěnách tečky v počtech od 1 do 6 tak, že součet teček na každých dvou protilehlých stěnách je sedm. Tři kamarádky si rozdělily 24 stejných hracích kostek a každá ze svých osmi kostek slepila kvádr či krychli. Žádné dva z těchto tří útvarů neměly stejné rozměry a každý byl slepen tak, aby součet teček na jeho povrchu byl co největší.

Jaké součty teček mohly kamarádky dostat?

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

Stejně jako v soutěžní úloze má i v následujících úlohách hrací kostka na každé stěně jednu až šest teček a na každých dvou protilehlých stěnách je součet teček sedm.

- N1. Mirek k sobě slepil dvě hrací kostky a získal tak kvádr. Jaký největší a jaký nejmenší počet teček mohl být dohromady na stěnách takto vzniklého kvádrů?

[Na slepených stěnách mohlo být nejméně 2 a nejvíce 12 teček. Součet všech teček na dvou kostkách je 42, na povrchu kvádrů tedy mohlo být nejvíce 40 a nejméně 30 teček.]

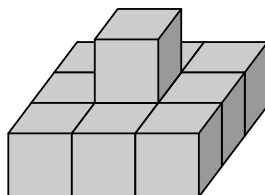
- N2. Jana slepila čtyři hrací kostky tak, že nebyly všechny v jedné řadě a dohromady tvořily kvádr. Jaký největší a jaký nejmenší počet teček mohl být na povrchu kvádrů?

[Kvádr měl rozměry $2 \times 2 \times 1$. Každá kostka má na čtvercových stěnách kvádrů dvojici protilehlých stěn (7 teček) a další dvě viditelné sousední stěny s nejvýše $5 + 6 = 11$ a nejméně $1 + 2 = 3$ tečkami. Na povrchu kvádrů tedy mohlo být nejvíce $4 \cdot (7 + 11) = 72$ a nejméně $4 \cdot (7 + 3) = 40$ teček.]

- N3. Radim skládal tělesa, pokaždé z 12 shodných krychlí, které slepoval k sobě celými stěnami. Kolik různých kvádrů takto mohl vytvořit? Kvádry, které lze na sebe převést otočením, považujeme za stejné.

[Krychle je možné slepit k sobě v řadě (kvádr $12 \times 1 \times 1$), ve dvou řadách (kvádr $6 \times 2 \times 1$), ve třech řadách (kvádr $4 \times 3 \times 1$) a ve dvou řadách a dvou vrstvách (kvádr $3 \times 2 \times 2$). Radim mohl vytvořit 4 různé kvádry.]

- D1. Jenda má 100 hracích kostek, ze kterých skládal pyramidu se čtvercovou základnou. Každé patro pyramidy je čtverec a každé nižší patro přechází na všech čtyřech stranách o šířku jedné kostky. Horní dvě patra pyramidy jsou na obrázku níže. Kolik nejvýše pater mohla mít Jendova pyramida a kolik nejvíce teček mohlo být na povrchu stavby? Tečky na spodku pyramidy nezapočítáváme.



[Počty kostek v patrech jsou 1, 9, 25, 49 atd. Pyramida může mít nejvýše 4 patra ($1+9+25+49 = 84$). Horní kostka má na povrchu 5 stěn (nejvýše 20 teček). Dvanáct rohových kostek pater má na povrchu 3 stěny (nejvýše 15 teček) a zbylých 36 kostek na okrajích pater 2 stěny (nejvýše 11 teček). Na povrchu může být nejvýše $20 + 12 \cdot 15 + 36 \cdot 11 = 596$ teček.]

Z8–I–2

Najděte všechny dvojice kladných celých čísel a a b s následujícími vlastnostmi:

- *obě čísla a a b jsou menší než 50,*
- *součin $a \cdot b$ je dělitelný 11, ale součet $a + b$ není dělitelný 11,*
- *součin $a \cdot b$ je dělitelný 17, ale součet $a + b$ není dělitelný 17,*
- *jak součin $a \cdot b$, tak součet $a + b$ jsou dělitelné 2.*

(E. Semerádová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Najděte všechny dvojice různých jednomístných přirozených čísel, jejichž a) součet; b) součin je dělitelný sedmi.

[a) Součet je buď 7, nebo 14. Vyhovují dvojice 1 a 6, 2 a 5, 3 a 4, 5 a 9, 6 a 8. b) Jedno z čísel je dělitelné sedmi, a to je jen 7. Vyhovují dvojice, kde jedno číslo je 7 a druhé kterékoli z 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.]

N2. Z čísel 3, 5, 12, 25, 9, 17 vyberte všechny dvojice, jejichž

- a) součin je dělitelný pěti, ale součet není dělitelný pěti;
- b) součin i součet jsou dělitelné třemi.

[a) Právě jedno z čísel je dělitelné pěti. Vyhovuje 5 nebo 25 s kterýmkoli z čísel 3, 12, 9, 17 (8 dvojic). b) Obě čísla jsou dělitelná třemi. Vyhovují dvojice 3 a 12, 3 a 9, 12 a 9.]

N3. Najděte všechny dvojice různých dvojmístných čísel, jejichž součin i součet jsou dělitelné číslem 19 a jejichž a) součin; b) součet je dělitelný dvěma.

[Obě čísla jsou dělitelná 19. Dvojmístné násobky 19 jsou 19, 38, 57, 76, 95. a) Alespoň jedno číslo je sudé. Vyhovuje 38 nebo 76 s kterýmkoli dalším z vyjmenovaných čísel (7 dvojic). b) Obě čísla jsou sudá, nebo obě lichá. Vyhovují dvojice 38 a 76, 19 a 57, 19 a 95, 57 a 95.]

D1. Vyslovte pravidlo, kdy pro dvě přirozená čísla a , b platí:

- a) součin $a \cdot b$ je dělitelný 11;
- b) součet $a + b$ je dělitelný 7;
- c) součin $a \cdot b$ je dělitelný 6.

[a) Součin $a \cdot b$ je dělitelný 11, právě když alespoň jedno z čísel a , b je dělitelné 11 (11 je prvočíslo). b) Součet $a + b$ je dělitelný 7, právě když součet zbytků čísel a , b po dělení sedmi je 0, nebo 7 (zejména je-li jedno z čísel dělitelné 7, musí být i druhé dělitelné 7). c) Součin $a \cdot b$ je dělitelný 6, právě když alespoň jedno z čísel a , b je dělitelné 2 a alespoň jedno je dělitelné 3 (prvočíselný rozklad 6 je $2 \cdot 3$).]

- D2. Kolik existuje trojmístných čísel složených ze tří různých nenulových číslic takových, že součin i součet jejich číslic jsou dělitelné třemi?

[Pro součin dělitelný třemi musí být alespoň jedna z číslic dělitelná třemi. Pro součet dělitelný třemi mohou nastat dva případy: buď jsou všechny číslice dělitelné třemi (3, 6, 9 v libovolném pořadí), nebo je jedna číslice dělitelná třemi (3, 6, nebo 9), jedna dává po dělení třemi zbytek 1 (1, 4, nebo 7) a jedna dává zbytek 2 (2, 5, nebo 8). V prvním případě dostáváme 6 možností (pořadí číslic) a ve druhém $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 162$ možností (výběr a pořadí číslic). Takových čísel je 168.]

Z8–I–3

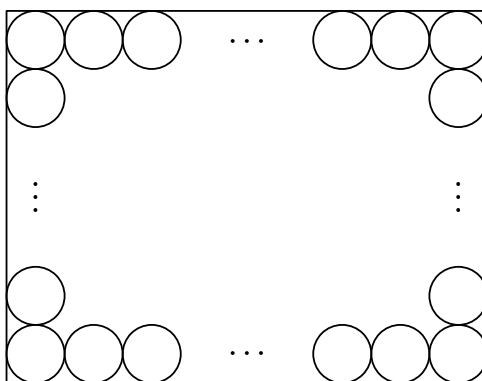
Alfons poskládal 56 kruhových etiket s poloměry 4 cm na stůl ve tvaru obdélníku tak, že platilo:

- každé strany stolu se dotýkala nějaká etiketa,
- rohové etikety se dotýkaly dvou stran stolu,
- ostatní etikety se dotýkaly jedné strany stolu,
- sousední etikety se dotýkaly navzájem.

Na druhý stůl stejných rozměrů začal skládat kruhové etikety s poloměry 3 cm a snažil se dodržet všechny podmínky ze stolu prvního. Po uložení celé řady podél jedné strany zjistil, že použil o 6 etiket více než podél stejné strany na prvním stole.

Zjistěte rozměry stolu.

(M. Macko)

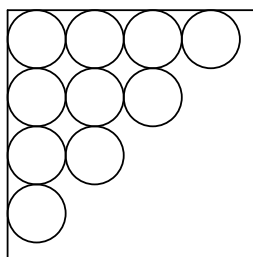


NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Kolik etiket o průměru 4 cm lze poskládat podél čtyř stran desky obdélníkového stolu o rozměrech 120 cm $\times$ 100 cm tak jako v soutěžní úloze?

[Podél delší strany stolu se vejde 30 etiket, podél kratší strany 25 etiket, rohové etikety jsou společné dvěma stranám. Na stůl se vejde $2 \cdot 30 + 2 \cdot 25 - 4 = 106$ etiket.]

- N2. Iva připravuje občerstvení na sportovní den a zjistila, že pokud všech 45 kelímků s limonádou vyskládá na obdélníkový stůl o rozměrech 60 cm $\times$ 108 cm tak, jak je naznačeno na obrázku, zaplní jimi celý stůl. Určete průměr kelímku.

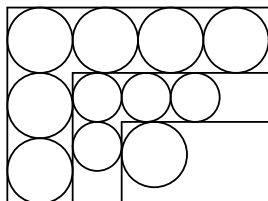


[Poměr stran stolu je $60 : 108 = 5 : 9$ a $5 \cdot 9 = 45$, tedy podél kratší strany je 5 kelímků a podél delší 9. Průměr kelímku je $60 : 5 = 108 : 9 = 12$ cm.]

- N3. Bořek ohraničil část rovné cesty špalíky, které skládal těsně k sobě. Na jedné straně použil špalíky o průměru 18 centimetrů, na druhé straně špalíky o průměru 12 centimetrů a malých špalíků použil o 11 více než velkých. Jak dlouhý byl ohraničený úsek?

[Na každé tři malé špalíky připadají dva velké. Malých bylo o 11 více než velkých, tedy malých bylo 33 a velkých 22. Délka ohraničeného úseku byla $33 \cdot 12 = 22 \cdot 18 = 396$ cm.]

- D1. Richard skládal na stolek o rozměrech 80 cm $\times$ 40 cm etikety o průměrech 4 cm a 3 cm, jak je naznačeno na obrázku. Začal skládat větší etikety podél dvou sousedních stran stolu, aby se jich dotýkaly a dotýkaly se i navzájem. V obou směrech jich položil tolik, kolik se na stolek vešlo celých. Poté narýsoval dvě úsečky rovnoběžné s hranami stolu, které se etiket dotýkaly. Podél těchto úseček skládal menší etikety podle stejných pravidel, opět narýsoval dvě úsečky a takto pokračoval, dokud to bylo možné. Kolik velkých etiket Richard použil?



[Po každém kole skládání se volná část stolku zmenšila v obou směrech o průměr právě použitých etiket. Richard postupně skládal velké etikety do částí o rozměrech 80×40 , 73×33 , 66×26 , 59×19 , 52×12 , 45×5 (všechny rozměry v cm). Odpovídající počty velkých etiket byly 29, 25, 21, 17, 15, 11, jejich součet je 118.]

Z8–I–4

V prvním ročníku naší školy jsou dvě třídy — 1. A a 1. B. V 1. A je o polovinu více chlapců než v 1. B, o čtvrtinu více děvčat než v 1. B a celkově o třetinu více žáků než v 1. B. Jakou část všech žáků prvního ročníku tvoří děvčata? (J. Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Zita a Dita se domluvily, že o víkendu budou hodně sportovat. Zita ujela na kole stejnou vzdálenost jako na kolečkových bruslích, dohromady ujela 72 kilometrů. Dita ujela na kole o čtvrtinu větší vzdálenost než Zita, na kolečkových bruslích však ujela

o dvě třetiny menší vzdálenost než Zita. Kolik kilometrů překonala Dita na kole a kolečkových bruslích dohromady?

[Zita ujela na kole 36 kilometrů, Dita tedy ujela 45 kilometrů. Zita ujela na kolečkových bruslích 36 kilometrů, Dita jen 12 kilometrů. Dohromady Dita ujela 57 kilometrů.]

- N2. V osmém ročníku jsou dvě třídy, 8. A a 8. B, v každé z nich je 24 žáků. V 8. A je o polovinu více chlapců než v 8. B a v 8. B tvoří chlapci třetinu třídy. Jak velkou část ročníku tvoří chlapci?

[V 8. B je 8 chlapců, v 8. A jich je 12, tj. dohromady 20 chlapců. Celkem je v ročníku 48 žáků, tedy chlapci tvoří $\frac{20}{48} = \frac{5}{12}$ ročníku.]

- N3. Karel, Kuba a Kryštof trhali třešně. Karel natrhal o čtvrtinu více než Kuba, Kryštof o třetinu méně než Karel, dohromady natrhali 37 kilogramů třešní. Kolik kilogramů třešní natrhal Karel?

[Poměr třešní Kuby a Karla je 4 : 5, poměr třešní Karla a Kryštofa 3 : 2. Rozdělíme-li Karlovy třešně na 15 stejných dílů, má Kuba 12 a Kryštof 10 dílů. To je celkem 37 dílů, tedy jeden díl odpovídá 1 kg třešní. Karel natrhal 15 kg třešní.]

- D1. Včera vydojili na farmě Doj dvakrát více mléka než na farmě Hoj a na farmě Joj dvakrát více mléka než na farmě Doj. Každá farma poslala část vydojeného mléka ke zpracování na máslo. Farma Doj poslala na výrobu másla $\frac{7}{8}$ svého mléka, farma Hoj $\frac{3}{4}$ svého mléka. Z mléka vydojeného na všech třech farmách dohromady šlo na výrobu másla 90 %. Jakou část svého mléka poslala na výrobu másla farma Joj?

[Farmy Hoj, Doj a Joj vydojily 1, 2 a 4 díly mléka, celkem 7 dílů. Na máslo šlo celkem $\frac{9}{10} \cdot 7 = 6,3$ dílu, přitom z farem Hoj a Doj šlo $\frac{3}{4} + \frac{7}{8} \cdot 2 = 2,5$ dílu. Farma Joj poslala na máslo $6,3 - 2,5 = 3,8$ ze svých 4 dílů, což je $\frac{38}{40} = 95\%$.[?]]

Z8–I–5

Honza, Mikuláš a Víťa si vytyčili cyklokrosový okruh. Honza odstartoval závod Mikuláše a Víti na 12 okruhů. Když Mikuláš poprvé projížděl kolem Honzy, vydal se Honza v protisměru naproti Víťovi, který byl pozadu. Honza ušel 150 metrů, než Víťu potkal. V tom okamžiku měl Víťa zdolánu čtrnáctinu celkové délky závodu.

Kolik metrů měřil jeden okruh?

(L. Dedková)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Eliška se rozhodla, že dvakrát oběhne školu. Spolu s Davidem odstartovali před hlavním vchodem, ale opačným směrem. Eliška potkala Davida po 100 metrech svého běhu a do splnění plánu jí zbývala ještě dvakrát delší vzdálenost. Kolik metrů uběhl do setkání s Eliškou David?

[Eliška se potkala s Davidem ve třetině své cesty. Tedy měla uběhnout 300 metrů a jeden okruh měřil 150 metrů. Do setkání uběhli Eliška s Davidem dohromady jeden okruh, tedy David uběhl 50 metrů.]

- N2. Marek, Eva a Jakub se domluvili, že se odpoledne sejdou v parku. Marek a Eva dorazili včas, ale Jakub měl zpoždění. Marek s Evou si čekání na Jakuba krátily obcházením

[?] Převzato ze 74. ročníku MO, úloha **Z9–II–3**.

parku. Marek park obcházel po vnějším okraji, Eva obcházela menší okruh kolem květinového záhonu. Markův okruh měřil 1,2 kilometru a stihl ho obejít přesně třikrát. Eva za stejný čas stejným tempem obešla svůj okruh přesně osmkrát. Jak dlouhý byl okruh kolem květinového záhonu?

[Marek ušel celkem 3,6 kilometru, stejně jako Eva. Evin okruh byl dlouhý $3,6 : 8 = 0,45$ kilometru, tj. 450 metrů.]

- N3. Natálka pletla věnce z pampelišek. Dopoledne pletla velké věnce, každý ze 45 pampelišek, a odpoledne malé věnce, které měly o 18 pampelišek méně než velké věnce. Odpoledne upletla o 10 věnců více než dopoledne, přičemž její práce dopoledne i odpoledne trvala stejně dlouho a čas potřebný na upletení věnce byl přímo úměrný počtu pampelišek. Kolik věnců celkem Natálka upletla?

[Dopoledne i odpoledne zapletla stejné množství pampelišek. Malý věnec měl $45 - 18 = 27$ pampelišek, tedy deset malých věnců navíc mělo 270 pampelišek. Velkých věnců bylo $270 : 18 = 15$, malých $15 + 10 = 25$, celkem 40 věnců.]

- D1. Pat a Mat se vykoupli v rybníce a pak si dali závod do své chaloupky. V jistém okamžiku platilo, že kdyby Mat měl zdolánu polovinu vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběl by mu do chaloupky trojnásobek oné poloviční vzdálenosti. V tomtéž okamžiku platilo, že kdyby Pat měl zdolán dvojnásobek vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběla by mu do chaloupky třetina oné dvojnásobné vzdálenosti. Kdo byl v daném okamžiku blíž chaloupce?

[Celá trať odpovídá čtyřem polovinám vzdálenosti, kterou Mat uběhl od rybníka, a současně čtyřem třetinám dvojnásobku Patovy vzdálenosti od rybníka. Tedy Mat uběhl $\frac{1}{2}$ a Pat $\frac{3}{8}$ vzdálenosti od rybníka k chaloupce. Blíž chaloupce byl Mat.[?]]

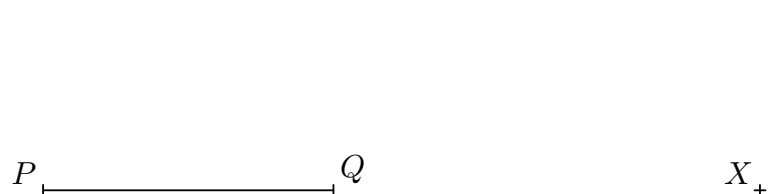
Z8–I–6

Jsou dány body X , Y a úsečka PQ jako na obrázku. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby platilo:

- poloměr kružnice opsané trojúhelníku BCD je roven délce úsečky PQ ,
- bod X leží na úhlopříčce BD a bod Y leží na úhlopříčce AC ,
- body X a Y jsou souměrné podle osy rovnoběžné s přímkou AB .

Popište a zdůvodněte svoji konstrukci.

(M. Janičová)



[?] Převzato ze 73. ročníku MO, úloha Z9–I–1.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

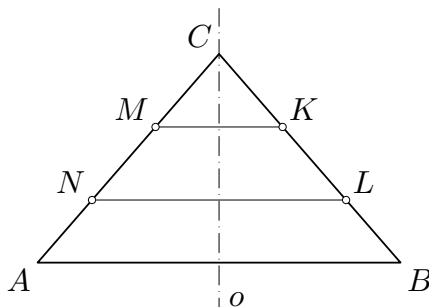
N1. Popište polohu středu kružnice opsané trojúhelníku

- ABC , jehož strana AB má délku 6 centimetrů a obě zbylé strany jsou o třetinu kratší;
- KLM , ve kterém jsou všechny vnitřní úhly shodné;
- PQR , ve kterém úhel u vrcholu P je pravý a strany PQ a PR mají délku 4 cm.

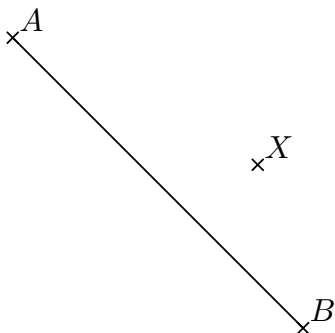
[Střed kružnice opsané je průsečíkem os stran trojúhelníku. a) Trojúhelník je rovnoramenný a tupouhlý. Střed leží na ose základny AB mimo trojúhelník. b) Trojúhelník je rovnostranný, osy stran splývají s výškami. Střed je jejich průsečíkem a leží uvnitř. c) Trojúhelník je rovnoramenný a pravoúhlý. Střed kružnice opsané je středem přepony QR .]

N2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB . Na straně BC leží dva různé body K, L a na straně AC leží dva různé body M, N tak, že body K, M jsou osově souměrné podle osy o a body L, N jsou osově souměrné podle téže osy. Načrtněte a popište, kudy osa o prochází.

[Souměrnost podle osy o zobrazí přímku KL na přímku MN . Tedy o je osou úhlu ACB , což je osa souměrnosti trojúhelníku ABC , resp. výška na základnu AB .]

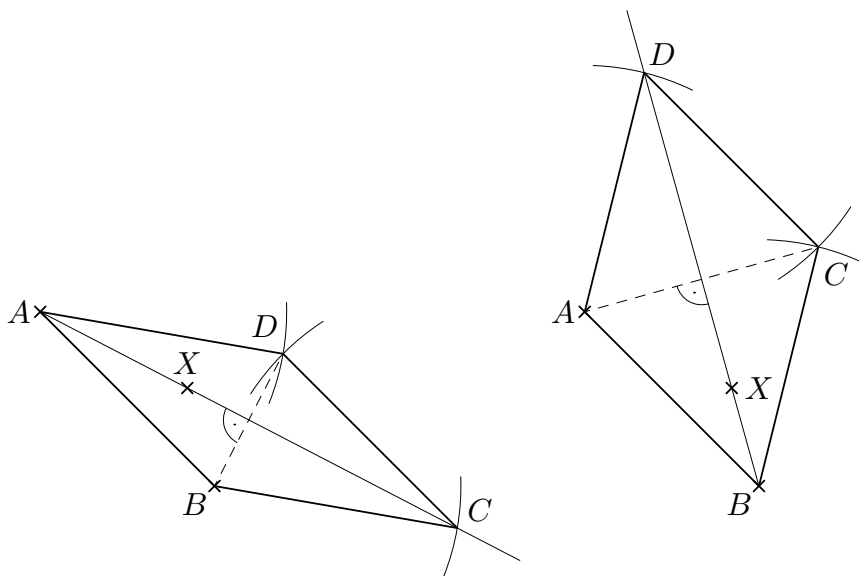


D1. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dána jeho strana AB a bod X , který leží na přímce obsahující některou úhlopříčku kosočtverce. Najděte všechny možnosti.



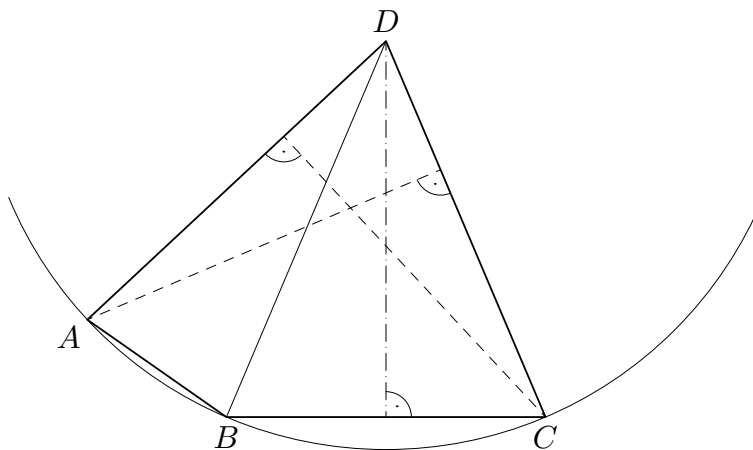
[Úloha má dvě řešení podle toho, zda bod X leží na úhlopříčce AC , nebo na BD . V prvním případě je vrchol C na přímce AX a zároveň platí $|BC| = |AB|$, tedy C je průsečíkem různým od A přímky AX s kružnicí $k(B, |AB|)$. Vrchol D lze sestrojit doplněním do rovnoběžníku nebo pomocí shodných kružnic s poloměrem $|AB|$ a středy A a C . Druhý případ

je obdobný. V obou případech lze využít osových souměrností podle úhlopříček (úhlopříčky kosočtverce jsou kolmé), příp. středové souměrnosti podle středu kosočtverce (střed leží na Thaletově kružnici s průměrem AB).]



- D2. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že bod D leží na ose úsečky BC a vzdálenost bodu A od přímky CD je stejná jako vzdálenost bodu C od přímky AD . Dokažte, že čtyřúhelníku $ABCD$ nelze opsat kružnici.

[Z rovnosti výšek trojúhelníku ACD a dvojího vyjádření jeho obsahu plyne $|AD| = |CD|$. To spolu s $|BD| = |CD|$ znamená, že D je středem kružnice procházející body A , B , C . Tato kružnice je jediná a bod D na ní neleží.[?]]



[?] Převzato ze 75. ročníku MO, úloha **Z9-III-4**.

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Do políček tabulky 5×5 doplňte čísla od 1 do 5 tak, aby:

- každé z čísel bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou,
- součet deseti čísel v šedě vyznačené části byl 21.

Najděte všechny možnosti.

(J. Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Do následující tabulky doplňte čísla 1, 2, 3 tak, aby každé z nich bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou.

1		
	2	
		3

[Ve druhém řádku i ve druhém sloupci musí být na prvním místě 3 a na posledním 1.
Na zbylá dvě místa patří 2.]

- N2. Do následující tabulky doplňte čísla 1, 2, 3 tak, aby každé z nich bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou a součet čísel v orámované části byl co největší. Určete tento součet.

[Co největší čísla v orámované části mohou být 3, 3, 2 a 1, tedy největší možný součet je 9. Jedno z možných doplnění je na obrázku.]

1	2	3
2	3	1
3	1	2

- N3. Do následující tabulky doplňte čísla od 1 do 9 (každé libovolněkrát) tak, aby se v žádném řádku ani sloupci žádné číslo neopakovalo a aby součet všech čísel v tabulce byl a) co největší; b) co nejmenší.

[V prvním případě doplňujeme co nejvíc co největších čísel, ve druhém případě naopak, viz obrázek níže. V obou případech má úloha několik řešení, která se liší umístěním čísel. Největší možný součet je 68 a nejmenší 22.]

a)

9	8	7	6	5
	9	8	7	
		9		

b)

1	2	3	4	5
	1	2	3	
		1		

- D1. Hvězdný čtverec je taková čtvercová tabulka čísel, pro kterou platí, že součty čísel v jednotlivých řádcích a sloupcích jsou všechny stejné. Na obrázku je pozůstatek hvězdného čtverce, ve kterém byla čísla v jednom řádku a jednom sloupci smazána. Doplňte chybějící čísla tak, aby všechna byla celá a právě čtyři záporná. Určete všechny možnosti.

1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	

[Smazaná čísla lze vyjádřit pomocí neznámého součtu, který označíme s . V posledním sloupci jsou shora čísla $s - 6$, $s - 15$, $s - 24$, v posledním řádku zleva $s - 12$, $s - 15$, $s - 18$

a v rohu $45 - 2s$. Právě čtyři z nich jsou záporná jedině pro $s = 12, 13$, nebo 14 . Úloha má tři řešení, viz tabulky níže.[?]]

1	2	3	6
4	5	6	-3
7	8	9	-12
0	-3	-6	21

1	2	3	7
4	5	6	-2
7	8	9	-11
1	-2	-5	19

1	2	3	8
4	5	6	-1
7	8	9	-10
2	-1	-4	17

Z9–I–2

Pro reálná čísla d, e, s, t a v platí:

$$d \cdot v \cdot e = 2,$$

$$s \cdot e \cdot s \cdot t = 6,$$

$$d \cdot e \cdot v \cdot e \cdot t = 9.$$

Určete všechny možné hodnoty součinu $d \cdot v \cdot e \cdot s \cdot t \cdot e$.

(J. Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b \cdot c = 14,$$

$$a \cdot c = 20.$$

Určete hodnotu b .

[Dosazením druhé rovnosti do první dostaneme $20b = 14$, a tedy $b = \frac{7}{10}$.]

N2. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b = 3,$$

$$b \cdot c = 6,$$

$$a \cdot c = 9.$$

Určete všechny možné hodnoty součinu $a \cdot b \cdot c$.

[Součin všech tří rovností dává $(a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c) = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 3 \cdot 6 \cdot 9$, tedy $a \cdot b \cdot c = \pm\sqrt{3 \cdot 6 \cdot 9} = \pm 9\sqrt{2}$. (Obě hodnoty nastanou, a to pro $a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{2}$, resp. pro čísla opačná.)]

N3. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b \cdot c^2 = 12\sqrt{6},$$

$$a^2 \cdot c^2 = 12.$$

Jakých hodnot může nabývat součin $b \cdot c$?

[Z druhé rovnosti plyne $a \cdot c = \pm 2\sqrt{3}$. Tedy $b \cdot c = (a \cdot b \cdot c^2) : (a \cdot c) = \pm 12\sqrt{6} : 2\sqrt{3} = \pm 6\sqrt{2}$. (Obě hodnoty nastanou, např. pro $c = 1$ a $a = 2\sqrt{3}$, $b = 6\sqrt{2}$, resp. $a = -2\sqrt{3}$, $b = -6\sqrt{2}$.)]

[?] Převzato z 69. ročníku MO, úloha **Z7–I–5**.

D1. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$\begin{aligned}a^3 \cdot b^4 \cdot c^5 &= 2, \\a^6 \cdot b^5 \cdot c^2 &= 12, \\a^3 \cdot b^3 \cdot c &= 3.\end{aligned}$$

Jakých hodnot může nabývat součin $a \cdot b \cdot c$?

[Z uvedených rovností plyne

$$(a^3 \cdot b^4 \cdot c^5) \cdot (a^6 \cdot b^5 \cdot c^2) : (a^3 \cdot b^3 \cdot c) = a^6 \cdot b^6 \cdot c^6 = 2 \cdot 12 : 3 = 8.$$

Tedy $(a \cdot b \cdot c)^2 = 2$ neboli $a \cdot b \cdot c = \pm\sqrt{2}$. Odtud také plyne $(a \cdot b \cdot c)^3 = 2a \cdot b \cdot c$, což pomocí třetí rovnosti dává $3c^2 = 2a \cdot b \cdot c$. Tedy součin $a \cdot b \cdot c$ musí být kladný a jediná možnost je $\sqrt{2}$. (Tato hodnota nastane pro $c = \pm\sqrt[4]{\frac{8}{9}}$, $a = 2c$ a $b = \frac{3}{4}$, jiná řešení soustava nemá.)]

Z9–I–3

Jsou dány soustředné kružnice k, l a body A, B, C, D tak, že platí:

- *poloměr kružnice k je 10 cm a poloměr kružnice l je větší,*
- *úsečka AB je tětivou kružnice k a měří 16 cm,*
- *úsečka CD je tětivou kružnice l , je kolmá k tětivě AB a prochází bodem B ,*
- *trojúhelník ABC je rovnoramenný.*

Jaká může být délka tětivy CD ? Určete všechny možnosti.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících úlohách opakovaně využíváme Pythagorovu větu.

N1. Určete poloměr kružnice opsané obdélníku o rozměrech 4 cm $\times$ 6 cm.

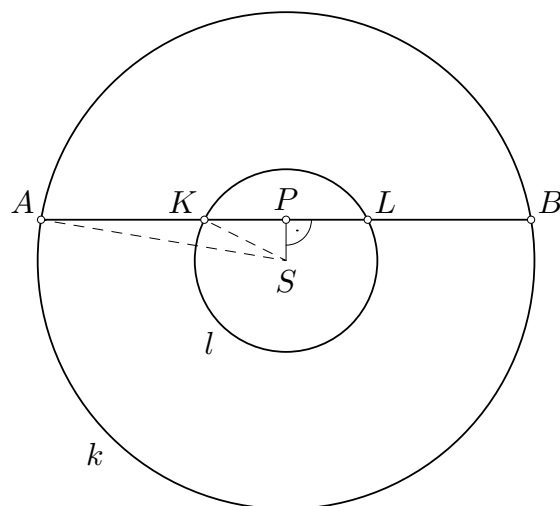
[Průměrem kružnice je úhlopříčka obdélníku. Ta měří $\sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$ cm, tedy poloměr kružnice je $\sqrt{13}$ cm.]

N2. Kružnice k má střed S a poloměr 13 cm. Její tětiva AB je od bodu S vzdálena 5 cm. Vypočítejte délku tětivy AB .

[Označme P střed tětivy AB . Trojúhelník APS je pravoúhlý a $|AP| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm. Délka tětivy je 24 cm.]

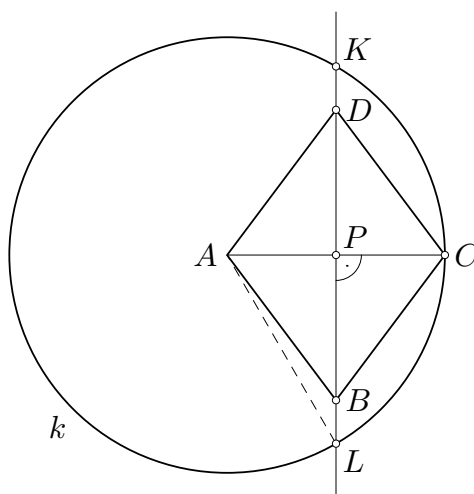
N3. Jsou dány soustředné kružnice k a l , z nichž l má menší poloměr než k . Tětiva AB kružnice k je od společného středu kružnic vzdálena 1 cm a kružnice l ji rozděluje na tři úseky, každý o délce 4 cm. Určete poloměry kružnic k a l .

[Označme S společný střed kružnic, P střed tětivy AB a K, L její průsečíky s kružnicí l . Z pravoúhlých trojúhelníků APS a KPS vypočítáme poloměry kružnic k a l jako $\sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$ cm a $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ cm.]



- D1. Je dán kosočtverec $ABCD$ a kružnice k se středem A procházející bodem C . Strana kosočtverce měří 10 cm a poloměr kružnice je 12 cm. Kružnice k vytíná na přímce BD tětivu. Určete vzdálenosti bodu B od krajních bodů této tětivy.

[Označme P průsečík úhlopříček kosočtverce a K, L krajní body tětivy jako na obrázku níže. Úhlopříčky kosočtverce se půlí a jsou na sebe kolmé, tedy $|AP| = 6$ cm a tětiva KL je kolmá k AC . Z pravoúhlých trojúhelníků ABP a ALP vypočítáme $|PB| = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm a $|PL| = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$ cm. Hledané vzdálenosti jsou $(6\sqrt{3} - 8)$ cm a $(6\sqrt{3} + 8)$ cm.]



Z9–I–4

Ve vstupní hale kina bylo několik jednomístných a několik trojmístných sedaček. Jednou si uvaděčka všimla, že v hale sedělo 25 lidí a 10 sedaček bylo prázdných. Jindy si uvaděčka všimla, že v hale sedělo 14 lidí a 7 sedaček bylo prázdných. V obou případech byla každá trojmístná sedačka buď prázdná, nebo plně obsazená.

Kolik jednomístných a kolik trojmístných sedaček mohlo být v hale? Najděte všechny možnosti. (M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. K čočce nakyselo dávali v restauraci podle přání zákazníka buď dvě, nebo tři vejce natvrdo.

- a) Kolik nejvýše porcí připravili, jestliže spotřebovali právě 20 vajec?
- b) Kolik nejméně porcí připravili, jestliže spotřebovali právě 20 vajec?
- c) Kolik nejvíce a kolik nejméně vajec je třeba na 20 porcí?

[a) Připravili nejvýše $20 : 2 = 10$ porcí. b) $20 = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 1$, tedy připravili nejméně $6 + 1 = 7$ porcí. c) Potřebovali nejméně $20 \cdot 2 = 40$ a nejvýše $20 \cdot 3 = 60$ vajec.]

N2. Máme rozdělit 15 bonbónů na hromádky, z nichž každá má tři, nebo čtyři bonbóny. Kolik takových hromádek bude? Najděte všechny možnosti.

[Číslo 15 lze vyjádřit jako součet násobků tří a čtyř buď $15 = 5 \cdot 3$, nebo $15 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4$. Hromádek bude pět, nebo čtyři.]

N3. Děti na táboře získávaly za splnění úlohy body. Ty bylo možné dále směňovat: pět bodů za samolepku, šest bodů za tiskátko. Jára si propočítal, že kdyby chtěl jenom samolepky, zbyl by mu jeden bod nevyužitý. Kdyby si vybral jenom tiskátka, nevyužil by tři body. Nakonec dokázal uplatnit všechny svoje body, přičemž získal dvakrát více tiskátek než samolepek. Kolik nejméně bodů měl Jára před směňováním?

[Jedna samolepka a dvě tiskátka stojí 17 bodů, počet bodů je tedy násobkem 17. Čísla 17 a 34 nevyhovují, 51 dává po dělení pěti zbytek 1 a po dělení šesti zbytek 3. Jára měl nejméně 51 bodů.[?]]

D1. Na statku žilo 30 lidí. Statkář nařídil, aby mezi ně rozdělili 30 měric obilí tak, že každý muž dostane 3 měrice, každá žena 2 měrice a každé dítě půl měrice obilí. Obilí vystačilo přesně. Kolik mužů, žen a dětí žilo na statku? Najděte všechny možnosti.

[Označme m , z a d počty mužů, žen a dětí. Pro množství obilí a počet lidí platí:

$$3m + 2z + \frac{1}{2}d = 30,$$

$$m + z + d = 30.$$

Odečtením druhé rovnice od dvojnásobku první rovnice dostaneme $5m + 3z = 30$. Tedy z je násobek pěti a m násobek tří. Odtud dostáváme tři řešení: $z = 0$, $m = 6$, $d = 24$, nebo $z = 5$, $m = 3$, $d = 22$, nebo $z = 10$, $m = 0$, $d = 20$. (Poslední možnost má smysl, pouze když statkář na statku nežil.)[?]]

[?] Převzato ze 70. ročníku MO, úloha **Z8–II–1**.

[?] Úloha ze středověké sbírky Alkuina z Yorku upravená podle publikace K. Mačák: **Tři středověké sbírky matematických úloh**, Prometheus, Praha, 2001.

Z9–I–5

Na tabuli je napsáno číslo 100. Dva kamarádi hrají hru podle následujících pravidel:

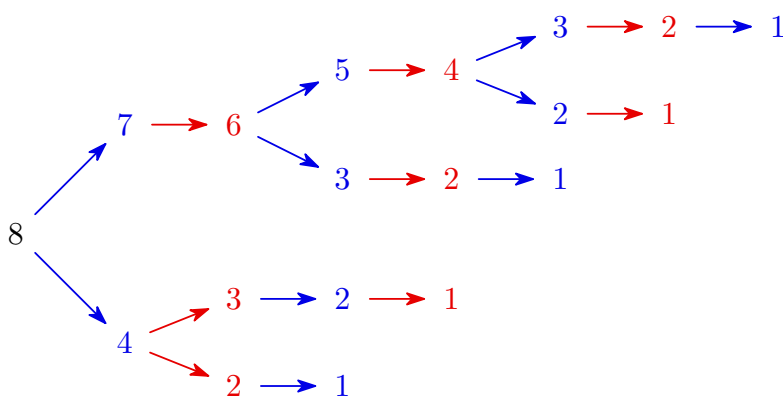
- Hráči se u tabule pravidelně střídají.
- V každém tahu hráč číslo smaže a nahradí číslem novým.
- Nové číslo je z předchozího vytvořeno buď odečtením jedné, nebo vydělením dvěma.
- Všechna napsaná čísla jsou přirozená.
- Vyhrává hráč, který napíše číslo 1.

Ukázalo se, že jeden z hráčů může postupovat tak, aby zaručeně vyhrál. Který hráč to je a kolik nejméně tahů k výhře potřebuje? (I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Uvažme hru ze soutěžní úlohy, v níž je na začátku napsáno číslo 8 místo 100. Najděte všechny možné průběhy této hry.

[Hra má 5 různých průběhů, které jsou znázorněny v následujícím grafu: modře jsou vyznačeny tahy prvního hráče, červeně tahy druhého hráče.]



N2. Jak by probíhala hra ze soutěžní úlohy s nejmenším možným počtem tahů? Kdo by vyhrál?

[Hráči by dělili dvěma, kdykoli by to bylo možné. Vyhrál by druhý hráč, viz následující schéma.]

$$100 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

N3. Najděte tři nejmenší počáteční čísla hry ze soutěžní úlohy, pro která může druhý hráč postupovat tak, aby zaručeně vyhrál.

[Jsou to čísla 3, 5 a 7: liché číslo může první hráč jen zmenšit o 1, druhý pak hraje např. jako v následujícím schématu.]

$$\begin{aligned}
 &3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \\
 &5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \\
 &7 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1
 \end{aligned}$$

- D1. Hra NIM má mnoho variant, uvažujme tuto: Na hromádce je 12 sirek. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. V každém tahu hráč odebere jednu, nebo dvě sirky. Prohrává ten hráč, který odebere poslední sirku. Pokud to je možné, najděte vítěznou strategii pro prvního hráče.

[Možné to je: stačí, když po tahu prvního hráče zůstane na hromádce 10, 7, 4 a nakonec 1 sirka. Tedy první hráč odebere dvě sirky a dále po každém tahu soupeře doplní jeho tah na tři sirky.]

Z9–I–6

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a jeho vnitřní bod P s těmito vlastnostmi:

- $|BC| = |CP| = |PD|$,
- $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PCB|$,
- $|\sphericalangle BAP| = 15^\circ$.

Určete velikost úhlu APB .

(P. Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. V rovnoběžníku $ABCD$ je vnitřní úhel u vrcholu A o 30° větší než vnitřní úhel u vrcholu B . Určete velikosti vnitřních úhlů rovnoběžníku.

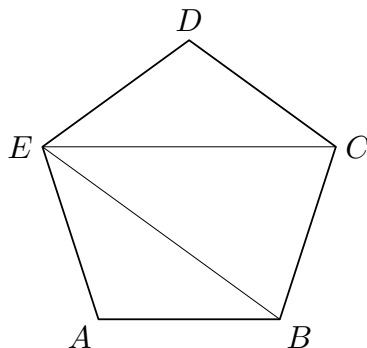
[V rovnoběžníku jsou protější úhly shodné a sousední úhly dávají dohromady 180° . Tedy úhly u vrcholů A a C mají velikost 105° , u vrcholů B a D mají velikost 75° .]

- N2. V rovnoramenném trojúhelníku RST se základnou RS značí φ velikost vnitřního úhlu u vrcholu T . Vyjádřete pomocí φ velikosti ostatních vnitřních a všech vnějších úhlů trojúhelníku RST .

[Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180° a úhly u základny rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné. Vnitřní úhly u vrcholů R a S mají velikost $90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Vnější úhly u vrcholů R, S, T mají velikosti $90^\circ + \frac{1}{2}\varphi, 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi, 180^\circ - \varphi$.]

- N3. Rozdělte pravidelný pětiúhelník na tři rovnoramenné trojúhelníky a jejich rovnoramennost zdůvodněte.

[Pětiúhelník $ABCDE$ lze rozdělit např. na trojúhelníky ABE, BCE a CDE . Všechny strany, resp. všechny úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku jsou navzájem shodné. Proto jsou shodné strany AB a AE v trojúhelníku ABE , strany EB a EC v trojúhelníku BCE a strany DC a DE v trojúhelníku CDE .]



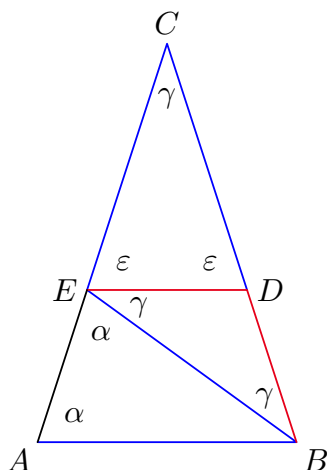
D1. V trojúhelníku ABC leží bod D na straně BC , bod E na straně AC a platí

$$|AB| = |BE| = |EC| = |CD|, \quad |BD| = |DE|.$$

Určete velikosti úhlů ACB a BAD .

[Na obrázku níže jsou shodné úsečky zvýrazněny stejnými barvami a shodné úhly stejnými symboly. Úhel EDC je vnějším úhlem trojúhelníku EDB , tedy $\varepsilon = 2\gamma$. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku EDC je 180° , tedy $2\varepsilon + \gamma = 5\gamma = 180^\circ$. Velikost úhlu ACB je 36° .

Úhel CEA je přímý, tedy $\varepsilon + \gamma + \alpha = 180^\circ$. Z předchozího víme $\varepsilon = 2\gamma$ a $180^\circ = 5\gamma$, tedy $\alpha = 2\gamma$. Odtud plyne shodnost úhlů CED a CAB , tedy rovnoběžnost úseček ED a AB , a tedy rovnoramennost trojúhelníku ABC . Ze souměrnosti trojúhelníku ABC je úhel BAD shodný s úhlem ABE a jeho velikost je $\alpha - \gamma = \gamma = 36^\circ$.[?]]



[?] Převzato ze 74. ročníku MO, úloha **Z8-II-3**.