

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

Z5–I–1

Do políček tabulky 3×3 doplňte všechna přirozená čísla od 1 do 9 tak, aby:

- součet čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný,
- číslo 1 bylo hned vpravo od čísla 6,
- číslo 7 bylo hned vlevo od čísla 5,
- číslo 8 bylo hned nad číslem 3.

Najděte všechny možnosti.

(K. Pazourek)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Součet tří různých přirozených čísel je roven 11. Jedno z těchto čísel je 7. Která čísla mohou být ta zbývající?
- N2. Doplňte do tabulky chybějící čísla tak, aby součty čísel ve všech řádcích i sloupcích byly stejné:

11		2
		8
	3	9

- N3. V řadě stojí přirozená čísla od 1 do 5 seřazená tak, že platí:

- Každá dvě sousední čísla se liší alespoň o dva.
- Číslo 5 stojí hned vpravo od čísla 3.
- Číslo 4 stojí hned vlevo od čísla 2.

V jakém pořadí může stát těchto pět čísel?

- N4. Do tabulky se třemi řádky a pěti sloupci máme vepsat přirozená čísla od 1 do 15 tak, aby součet čísel ve všech řádcích byl stejný a také součet čísel ve všech sloupcích byl stejný. Jaký bude součet čísel v každém řádku a jaký bude součet čísel v každém sloupci?
- D1. Mirka a Sandra vyplňovaly následující tabulku čísly:

		10		
		8		

Mirka vyplňovala čísla do horního řádku, Sandra do dolního.

Mirka řekla: „V mém řádku má každé číslo kromě prvního tu vlastnost, že když jej vynásobím číslem pod ním, dostanu číslo vlevo od něj.“

Sandra řekla: „V mém řádku je každé číslo kromě posledního o 3 větší než číslo napravo od něj.“

Doplňte tabulku podle těchto pravidel.

D2. Doplňte tabulku různými lichými čísly menšími než 32 tak, aby součet všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na každé úhlopříčce byl stejný.

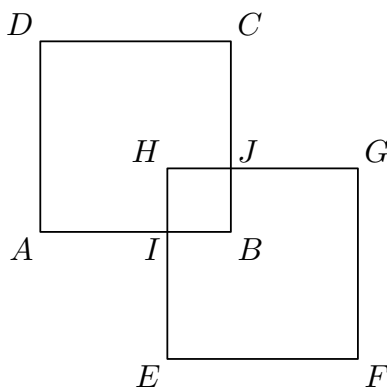
	23		27
		15	
	5		9
17		29	7

Z5–I–2

Dva stejné čtverce $ABCD$ a $EFGH$ se překrývají jako na obrázku. Společný čtyřúhelník $IBJH$ je čtverec, jehož strana je třikrát kratší než strana AB . Obvod mnohoúhelníku $AIEFGJCD$ je 180 cm.

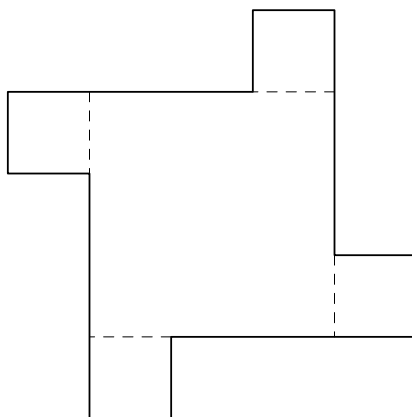
Určete obvod čtverce $ABCD$.

(E. Semerádová)

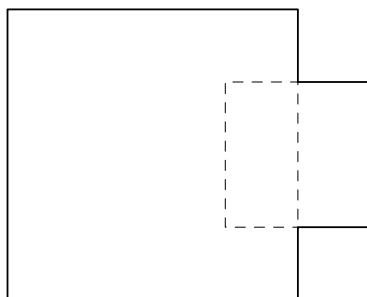


NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

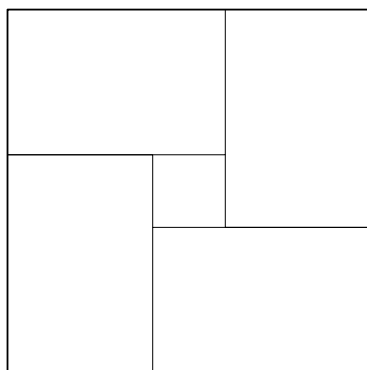
- N1. Čtverec o obvodu 56 cm rozdělíme jednou úsečkou na dva stejné obdélníky. Určete obvod jednoho takového obdélníku.
- N2. Máme tři špejle, každá je dlouhá 32 cm. Slepíme je do dlouhé tyčky izolepou tak, že dvě sousední špejle se překrývají čtvrtinami svých délek. Jak dlouhá je výsledná tyčka?
- N3. Na obrázku je útvar tvořený jedním velkým a čtyřmi menšími čtverci. Strana každého z menších čtverců je třikrát kratší než strana velkého čtverce. Obvod útvaru je 60 cm. Určete obvod velkého čtverce.



- N4. Na obrázku je útvar složený ze dvou překrývajících se čtverců, přičemž větší z nich má stranu dvakrát delší než menší čtverec. Strany čtverců jsou rovnoběžné a střed malého čtverce leží ve středu strany velkého čtverce. Obvod celého útvaru je 90 cm. Určete obvod malého čtverce.



- D1. Na obrázku je čtvercová dlaždice se stranou délky 10 dm, která je složena ze čtyř shodných obdélníků a malého čtverce. Obvod malého čtverce je pětkrát kratší než obvod celé dlaždice. Určete rozměry obdélníků.



Z5–I–3

Výpravčí na vlakovém nádraží choval pět zvířat: žirafu, pštrosa, paviána, papouška a boxera. Každý den od pondělí do pátku vítalo cestující jedno z těchto zvířat:

- pštros nevítal v pondělí, ani v pátek,
- pavián vítal hned následující den po žirafě,
- žirafa nevíkala ve středu,
- papoušek vítal později v týdnu než žirafa,

- boxer první tři dny po víkendu nevítal.

Které zvíře vítalo cestující v úterý?

(P. Antošová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Pan Řepa jedl v pondělí, úterý, středu a čtvrtek každý den jiné ovoce: jablka, hrušky, třešně a banány. Jablka jedl v úterý. Hrušky nejedl ve středu. Třešně jedl ve čtvrtek. Kdy pan Řepa jedl banány?
- N2. Petr, Radek, Standa a Tomáš spolu závodili. Petr doběhl mezi Radkem a Standou. Tomáš doběhl mezi Petrem a Radkem. Kdo z nich mohl zvítězit? Najděte všechny možnosti.
- N3. Honza měl tři klece (černou, stříbrnou, zlatou) a tři zvířata (morče, potkana a tchoře). V každé kleci bylo jedno zvíře. Zlatá klec stála nalevo od černé klece. Stříbrná klec stála napravo od klece s morčetem. Potkan byl v kleci napravo od stříbrné klece. Určete, v které kleci bylo které zvíře.
- D1. Pan režisér Alík potřeboval do televizní pohádky čtyři psy. Dostal nabídku z Řecka, Belgie, Irska a z Dolní Lhoty. Vybral ovčáka, dalmatina, vlkodava a jezevčíka, každého z jiné země, s různým jménem a různým věkem.

- Nejstarší ze psů byl jezevčík, bylo mu 5 let.
- Bucki byl z nich druhý nejmladší.
- Vlkodav pocházel z Irska.
- Pes z Dolní Lhoty se jmenoval Punťa.
- Oddi oslavil včera své čtvrté narozeniny.
- Ovčák pocházel z Belgie.
- Rubby nebyl dalmatin.
- Vlkodav měl tři roky.
- Nejmladší z vybraných psů byl Rubby, byly mu dva roky.

Zjistěte, jak se každý vybraný pes jmenoval, odkud pocházel, jaké byl rasy a kolik mu bylo let.

Z5–I–4

Heslo k trezoru je ukryto ve slově HUMBUK. Různá písmena zastupují různé číslice, stejná písmena zastupují stejné číslice a platí tyto vztahy:

$$H + U = 9, \quad M \cdot B = 12, \quad B - U = 2, \quad U > M, \quad H - K = 5.$$

Najděte heslo k trezoru.

(E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Najděte všechny dvojice navzájem různých čísel od 0 do 9 takových, že jejich a) součet je 13; b) součin je 8; c) rozdíl je 8; d) součet je 14.
- N2. Máme 3 krabičky, každá je označena jedním písmenem A , B , nebo C . V každé krabičce je schováno jedno číslo. V krabičce A je číslo o 5 větší než číslo v krabičce B . V krabičce C je číslo o 2 větší než číslo v krabičce B . Číslo v krabičce A je jedenácté nejmenší dvojmístné číslo. Která čísla jsou v jednotlivých krabičkách?

- N3. V zápise $KLID$ představuje každé písmeno jinou číslici. Číslice jsou podle velikosti seřazeny stejně jako jim příslušná písmena v abecedě. Hodnota jedné číslice je rovna součinu všech ostatních tří číslic. Také platí, že jedna číslice je o 6 menší než jiná číslice. Určete číslo $KLID$.
- D1. V následujícím algebrogramu stejná písmena znamenají stejné číslice, různá písmena různé číslice. Určete číslice A , B a C , aby platilo:

$$AAA + BB + C = 419$$

Z5–I–5

Xavier, Yvona a Zina sbírají karty pokémonů. Xavier jich má dvakrát více než Zina. Yvona má třetinu Xavierova počtu karet. Některé dvě z dětí mají dohromady rovných 100 karet.

Kolik karet mají všichni tři dohromady? (M. Janičová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Janek, Kamil a Lída šli na houby, dohromady jich našli 50. Kamil našel dvakrát tolik hub, co Janek. Lída jich našla 23. Kolik hub našel Janek a kolik Kamil?
- N2. Kabel nabíječky mobilu je dvakrát kratší než kabel od mikrovlnky. Kabel od sekačky trávy je dlouhý jako tři kabely od nabíječky a dva kabely od mikrovlnky dohromady. Kolikrát je kabel od sekačky delší než kabel od nabíječky?
- N3. Adam má pětkrát více kuliček než Bára a ta má třikrát méně kuliček než Cyril. Mohou mít všichni dohromady 60 kuliček?
- D1. Na úsečce AD jsou umístěny body B a C tak, že bod B leží ve třetině úsečky AD blíže bodu A a bod C leží ve čtvrtině úsečky BD blíže bodu D . Délka úsečky BC je 36 cm. Jak dlouhá je úsečka AD ?

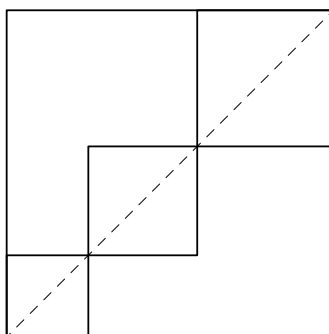
Z5–I–6

Marek měl sadu čtverců s délkami stran v centimetrech vyjádřených všemi přirozenými čísly od 1 do 9. Čtverce vybíral a skládal podle následujících pravidel:

- *do největšího vybraného čtverce vložil několik menších čtverců,*
- *délky stran menších čtverců v centimetrech byly po sobě jdoucí čísla,*
- *žádné dva menší čtverce se nepřekrývaly,*
- *úhlopříčky menších čtverců ležely na úhlopříčce velkého čtverce a celou ji pokrývaly.*

Jaké délky stran mohly mít čtverce v Markově útvaru? Najděte všechny možnosti.

(M. Macko)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Zapište číslo 9 jako součet několika po sobě jdoucích přirozených čísel. Najděte všechna řešení.
- N2. Je dán čtverec o straně 6 cm a na jeho úhlopříčce několik menších čtverců jako v soutěžní úloze, tj. sousední čtverce se dotýkají vrcholem a délky stran sousedních čtverců v cm jsou celočíselné a postupně se zvětšují o 1 cm. Jaké délky stran mohou mít tyto čtverce? Najděte všechny možnosti.
- N3. Je dán čtverec $ABCD$ o straně 7 cm. Na jeho úhlopříčce BD sestrojte body K a L tak, aby úsečky BK , KL a LD byly úhlopříčkami čtverců o stranách 1 cm, 2 cm a 4 cm.
- D1. Je dán čtverec o straně 10 cm a na jeho úhlopříčce a) dva; b) pět; c) libovolný počet čtverců, které na sebe navazují úhlopříčkami jako v soutěžní úloze. Délky stran těchto čtverců mohou být libovolné. Určete součet obvodů takto vložených čtverců.

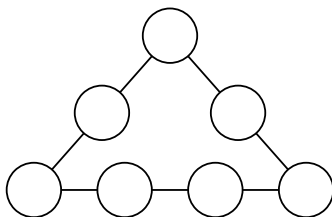
Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z6

Z6–I–1

Na stranách trojúhelníku je sedm prázdných kroužků jako na obrázku. Vepište do každého kroužku jedno přirozené číslo od 1 do 9 tak, aby žádné číslo nebylo použito vícekrát a aby součin čísel na všech stranách byl stejný.

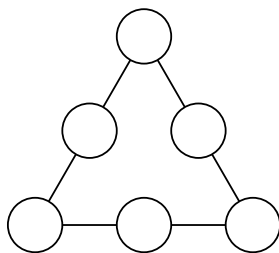
Která čísla mohou být na straně se čtyřmi kroužky?

(E. Novotná)



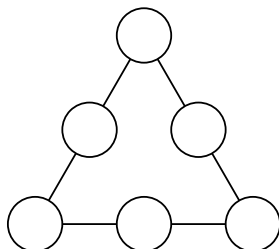
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Do kroužků na obrázku vepište některé z čísel 1 až 9 (každé nejvýše jednou) tak, aby součet čísel na všech stranách trojúhelníku byl stejný a současně a) co největší; b) co nejmenší.

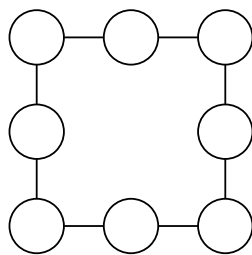


N2. Z přirozených čísel od 1 do 9 vyberte šest tak, aby je bylo možné rozdělit a) do dvou; b) do tří skupin se stejným součinem. Určete příslušné součiny.

N3. Do kroužků na obrázku vepište různá přirozená čísla větší než 1 (každé nejvýše jednou) tak, aby součin na každé straně trojúhelníku byl 60.



D1. Do kroužků na obrázku vepište čísla od 1 do 8 (každé právě jednou) tak, aby součty čísel na stranách čtverce byly čtyři po sobě jdoucí čísla a byly co nejmenší. Najděte alespoň tři vyhovující doplnění. Která čísla budou ve vrcholech čtverce?

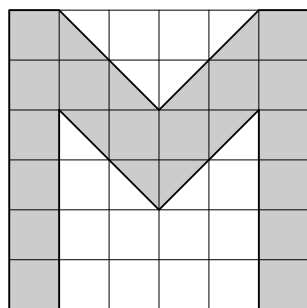


Z6–I–2

Viola ve čtvercové síti $6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ vybarvila útvar připomínající písmeno *M* jako na obrázku. Starší bratr Vilda poznamenal, že po vhodném otočení by útvar připomínal řecké písmeno Σ (velké sigma). Violu to zaujalo a otočený útvar nakreslila do stejné sítě přes ten původní, avšak jinou barvou.

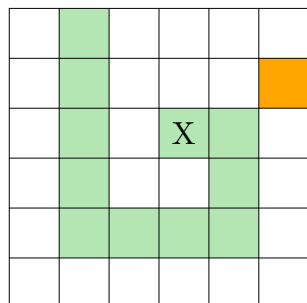
Určete obsah části sítě vybarvené oběma barvami.

(M. Macko)

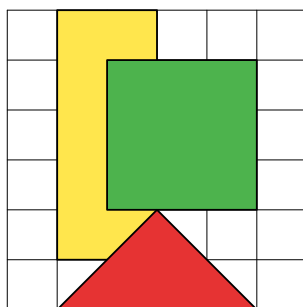


NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

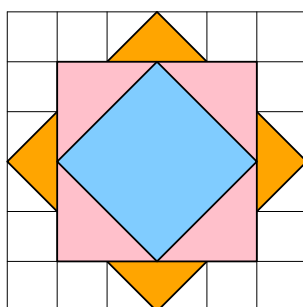
- N1. Po hrací desce jako na obrázku se pohybovaly figurky. Zelená figurka vstoupila na krajní zelené pole a po polích této barvy se dostala na pole označené X. Druhá figurka vstoupila na oranžové pole a pohybovala se po hrací desce obdobně jako zelená figurka (stejně počty kroků i otočení). Vyznačte, po kterých polích šla oranžová figurka. Na kolik polí stoupily obě figurky?



- N2. Ve čtvercové síti o rozměrech $18\text{ cm} \times 18\text{ cm}$ je umístěn zelený čtverec, žlutý obdélník a červený rovnoramenný trojúhelník jako na obrázku. Jaký je obsah části sítě, kterou pokrývá více než jeden z těchto tvarů?



- D1. Na podlaze vydlážděné čtvercovými dlaždicemi s obsahem 4 dm^2 jsou položeny tři čtvercové koberce jako na obrázku. Jak velký povrch podlahy zakrývají právě dva koberce?



- D2. Útvar ze soutěžní úlohy jsme třikrát po sobě otočili o čtvrt otáčky doprava kolem středu sítě a každý otočený útvar vybarvili do původní čtvercové sítě. Určete obsah části sítě, která zůstala nevybarvená.

Z6–I–3

Jedna čokoláda stojí několik eur a několik desítek centů. Za 10 eur můžeme koupit nanejvýš tři čokolády, za 15 eur nanejvýš pět čokolád, za 30 eur nanejvýš jedenáct čokolád a pokaždé by nám prodavač nějaké peníze vrátil.

Jaká může být cena jedné čokolády? Najděte všechny možnosti. (M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Zbyněk si chce koupit balení sušenek v automatu, který nevrací peníze. Jedno balení stojí 1,40 eura a Zbyněk má jen hodně jedneurových mincí. Kolik nejvýše balení si může koupit za 9 eur? Kolik nejméně balení si musí koupit, aby mohl zaplatit přesně?
- N2. Skupina kamarádů se snaží rozdělit do týmů pro hraní šifrovací hry. Dokázali by sestavit nejvýše čtyři týmy po třech hráčích, nebo nejvýše dva týmy po pěti hráčích, nebo nejvýše jeden tým po sedmi hráčích, ale pokaždé by někdo zůstal navíc. Kolik bylo ve skupině kamarádů?
- N3. Sofiin pokoj má rozměry $4\text{ m} \times 5\text{ m}$. Na vzdálenost 4 m mezi pravou a levou stěnou Sofie udělá 5 stejně dlouhých kroků a zbyde jí kousek kratší než krok. Na vzdálenost 5 m mezi přední a zadní stěnou udělá 6 stejně dlouhých kroků a opět jí zbyde kousek kratší než krok. Jak dlouhý může být Sofiin krok, jestliže měří celý počet centimetrů? Najděte všechny možnosti.
- D1. Cena lanýže i pralinky je vyjádřena v celých desítkách centů a je menší než jedno euro. Za 2 eura by si Lída mohla koupit nejvýše 2 pralinky. Za 4 eura by si mohla koupit 1

pralinku a k ní nejvýše 5 lanýžů. Pokaždé by jí v obchodě nějaké peníze vrátili. Kolik stojí lanýž a kolik pralinka? Najděte všechny možnosti.

Z6–I–4

Z následujících kartiček máme skládat desetinná čísla, jejichž zápis nezačíná nulou a za desetinnou čárkou je alespoň jedna číslice:

01	12	23	34	5	,	,
----	----	----	----	---	---	---

- a) Ze všech kartiček složte dvě čísla s největším možným součtem.
b) Ze všech kartiček složte dvě čísla s nejmenším možným kladným rozdílem.

V obou případech určete všechny možné dvojice vyhovujících čísel. (K. Pazourek)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Z čísel 52, 17, 8, 94, 36, 88 vyberte dvě, jejichž a) součet; b) rozdíl je největší možný.
N2. Máme šest kartiček s čísly 52, 17, 8, 94, 36, 88. Přikládáním kartiček vedle sebe složte ze všech kartiček dvě čísla tak, aby byl jejich součet a) největší; b) nejmenší možný.
N3. Z některých čtyř číslic 1, 4, 5, 6 a 9 složte dvě desetinná čísla menší než 10 s jedním desetinným místem tak, aby byl jejich a) součet; b) rozdíl největší možný.
D1. Jirka měl v osudí 9 míčků označených číslicemi od 1 do 9. Vytáhl čtyři míčky a z jejich číslic složil dvě dvojmístná čísla s největším možným rozdílem, který byl 82. Jaká mohla být vzniklá dvojmístná čísla? Určete všechny možnosti.

Z6–I–5

V jistém trojúhelníku platí:

- jedna strana měří 10 cm,
- délky dvou stran se liší o 4 cm,
- obvod je 32 cm.

Najděte délky stran všech trojúhelníků s těmito vlastnostmi. (M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Bohouš měl doma prkénka délek 3, 4, 5, 6, 7 a 8 decimetrů. Ze tří prkének chtěl sestavit výběh pro křečku ve tvaru trojúhelníku. Jaké trojice prkének nemohl použít?
N2. Maruška, Anička a Bára sbíraly třešně do společné misky. Anička dala do misky 16 třešní, počty třešní Bary a Marušky se lišily o 3 a nakonec bylo v misce 27 třešní. Kolik třešní dala do misky Maruška, jestliže sbírá třešně zásadně po dvou?
N3. Pat a Mat postavili ke své chatě tři schody, ale nepovedlo se jim udělat schody stejně vysoké. Dohromady měly výšku 1 metr, jeden ze schodů měřil 20 cm a dva se od sebe lišily o 10 centimetrů. Jaká mohla být výška nejvyššího schodu? Uveďte všechny možnosti.
D1. Erika, Karel, Iva a Vojta se bavili o jistém trojúhelníku, jehož strany mají navzájem různé délky vyjádřené v centimetrech celými čísly:
- Erika: „Jedna strana měří 12 cm.“

- Karel: „Délky jedné dvojice stran se liší o 3 cm a délky jiné dvojice stran se také liší o 3 cm.“
- Iva: „Obvod trojúhelníku je mezi 44 a 50 cm.“
- Vojta: „Délky dvou stran jsou vyjádřeny lichými čísly.“

Jeden z kamarádů nemluví pravdu, ale Ivě a Karlovi určitě věřit můžeme. Jaké mohou být délky stran trojúhelníku?

Z6–I–6

V posluchárně je skupina žáků a lavice, z nichž každá má dvě místa. Kdyby se dívky posadily samostatně a chlapci po dvojicích, zbylo by 9 lavic neobsazených. Kdyby se chlapci posadili samostatně a dívky po dvojicích, zbylo by 12 lavic neobsazených. Kdyby všichni seděli po dvojicích, obsazených lavic by bylo stejně jako neobsazených.

Kolik lavic je v posluchárně?

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Ve třídě je 18 dvoulístných lavic. Na hodině matematiky je dnes 14 dívek a 10 chlapců. Kolik lavic by zůstalo volných, kdyby si sedli
- a) všichni po dvojicích;
 - b) dívky po dvojicích a chlapci samostatně;
 - c) chlapci po dvojicích a dívky samostatně?
- N2. Třída 3. B se přesunula na výuku do auly s dvoulístnými lavicemi. Když si všichni žáci sedli po dvojicích, bylo v aule o 9 neobsazených lavic víc, než když si sedl každý z nich sám. Když seděli všichni sami, zbývalo v aule 5 volných lavic. Kolik lavic je v aule?
- N3. Ve třídě s dvoulístnými lavicemi se dnes sešlo 32 dětí. Kdyby si každá dívka sedla s chlapcem a zbylí chlapci si sedli jednotlivě, bylo by obsazených lavic o 4 víc, než kdyby si všichni sedli po dvojicích. Kolik je ve třídě dívek a kolik chlapců?
- D1. Marek dělal průzkum, jak lidé z jeho vesnice jezdí do práce. Zjistil, že někteří jezdí autobusem, někteří autem sami, někteří autem ve dvou a někteří autem ve třech. Kdyby všichni jeli autobusem, vyjelo by z vesnice o 13 aut méně a v autobuse by bylo o 24 lidí více. Kdyby si ti, kteří jezdí autem sami, přisedli k jiným do aut, vyjelo by stejně aut, jako kdyby ti, kteří jezdí autem ve dvou, jeli autobusem. Kolik lidí jezdí do práce autem ve dvou?

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z7

Z7–I–1

Je dán čtverec, který je složen z 52 nepřekrývajících se menších čtverců. Z nich 51 má obsah 1 cm^2 a zbylý čtverec má délku strany v centimetrech vyjádřenou přirozeným číslem. Jaký obsah může mít daný čtverec? Určete všechny možnosti. (E. Novotná)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Míša měla v krabici dílky skládačky, celkem 8 čtverců o straně 1 cm a 5 čtverců o straně 2 cm. Opakovaně z těchto dílků sestavovala čtverce. Jaké obsahy mohly mít sestavené čtverce? Najděte všechny možnosti.
- N2. Máme obdélníkové dílky o rozměrech $3 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$. Jaký je obsah nejmenšího čtverce sestaveného z takových dílků?
- N3. Máme obdélníkové dílky o rozměrech $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$. Jaký je obsah nejmenšího čtverce sestaveného z takových dílků?
- N4. Strana čtverce je v centimetrech vyjádřena přirozeným číslem. Čtverec jsme doplnili 15 čtverečky o straně 1 cm na větší čtverec. Jakou stranu mohl mít původní čtverec? Najděte všechny možnosti.
- D1. Máme k dispozici pět čtvercových dílků o straně 1 cm, jeden čtvercový dílek o straně 2 cm a jeden čtvercový dílek o straně 3 cm. Kolika způsoby můžeme ze všech těchto dílků poskládat obdélník? Záleží jen na poloze čtvercových dílků v obdélníku. Dvě poskládání budeme považovat za stejná, pokud se dají na sebe převést otočením.

Z7–I–2

Ve čtyřech zásuvkách bylo dohromady 62 kuliček. Postupně jsme do některých zásuvek přesouvali kuličky z ostatních tří zásuvek, a to ze všech stejně:

- nejprve po šesti kuličkách do třetí zásuvky,
- poté po třech kuličkách do druhé zásuvky,
- poté po jedné kuličce do první zásuvky.

Nakonec bylo ve druhé zásuvce o pět kuliček víc než v první, ve třetí o pět víc než ve druhé a ve čtvrté o pět víc než ve třetí.

Kolik kuliček bylo v jednotlivých zásuvkách před přesouváním? (V. Dedek)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. V každé ze dvou misek bylo 15 kuliček. Kolik kuliček musíme přendat z první misky do druhé, aby
- a) jich ve druhé misce bylo o 8 více než v první misce;
 - b) jich ve druhé misce bylo o 9 více než v první misce;
 - c) jich ve druhé misce bylo čtyřikrát více než v první misce?
- N2. Máme tři misky a v nich kuličky. V první misce je o 7 kuliček méně než ve druhé misce. Ve druhé misce je o polovinu více kuliček než ve třetí misce. Ve třetí misce je 60 kuliček. Kolik kuliček je v první misce?

- N3. Ve dvou miskách byl stejný počet kuliček. Když jsme z první misky přendali 4 kuličky do druhé misky, bylo ve druhé misce třikrát tolik kuliček jako v první misce. Kolik kuliček bylo původně v první misce?
- D1. V každé ze čtyř misek máme stejný počet kuliček. Z první misky přesuneme polovinu kuliček do čtvrté misky a z druhé misky přesuneme dvě kuličky do třetí misky. Nyní je v každé následující misce o stejný počet kuliček více než v předchozí misce. Kolik kuliček dohromady bylo ve všech miskách?
- D2. Sněhurka dala každému trpaslíkovi stejný počet kuliček. Trpaslíci házeli hrací kostkou. Kolik jim padlo teček, tolik kuliček museli vrátit Sněhurce. Každému ze šesti trpaslíků padl jiný počet teček. Kolik teček padlo sedmému trpaslíkovi, když trpaslíkům zbylo dohromady 46 kuliček? Kolik kuliček dala Sněhurka každému trpaslíkovi na začátku?

Z7–I–3

Ciferník čarodějných hodin má obvyklý tvar kruhu, ale neobvyklý počet hodin. Čísla hodin jsou rozmístěna rovnoměrně po obvodu kruhu, je jich více než 50 a méně než 80. Proti číslu 36 vzhledem ke středu ciferníku je číslo dělitelné pěti.

Kolik hodin mohou mít čarodějné hodiny? Určete všechny možnosti. (M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Uvažme ciferník běžných ručičkových hodin (s dvanácti hodinami). Která čísla leží proti číslům dělitelným pěti vzhledem ke středu ciferníku?
- N2. Které číslo by bylo proti číslu 36 vzhledem ke středu ciferníku, kdyby čarodějné hodiny měly a) 40 hodin; b) 41 hodin; c) 42 hodin?
- N3. Na obyčejných hodinách je úplně nahoře číslo 12, úplně vpravo 3, úplně dole 6 a úplně vlevo 9. Také na čarodějných hodinách je největší číslo úplně nahoře, vpravo od něj je 1 a ve stejném směru jako na obyčejných hodinách čísla přibývají. Kolik hodin by měly čarodějné hodiny, kdyby číslo 36 bylo a) úplně vpravo; b) úplně vlevo; c) druhé vpravo od čísla úplně dole; d) druhé vlevo od čísla úplně nahoře?
- D1. Na ciferníku elfích hodin jsou čísla 24 a 34 souměrná podle přímky procházející středem ciferníku a jeho největším číslem. Které číslo je středově souměrné s číslem 15 vzhledem ke středu ciferníku?

Z7–I–4

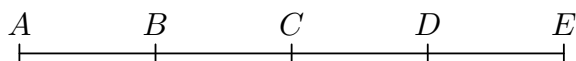
Anna a Zina bydlí na stejné ulici. Jednou vyrazily současně proti sobě od svých domů, každá svojí konstantní rychlostí. Zina zjistila, že zapoměla mobil, v osmině vzdálenosti mezi oběma domy se otočila a vrátila se ke svému domu. Tam jí maminka mobil podala a Zina se ihned vydala původním směrem. Když se dívky potkaly, byly v polovině cesty mezi svými domy a od jejich současného startu uplynulo 15 minut.

Za jak dlouho by se dívky potkaly, kdyby se Zina nevracela? (M. Janičová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Z místa A vede do místa B cesta dlouhá 12 km, z místa B vede do místa C cesta dlouhá 24 km. Arnošt vyšel z A a současně proti němu vyšel Ctirad z C , každý svou stálou rychlostí. Setkali se uprostřed mezi místy B a C . Jak daleko od C by se setkali, kdyby Arnošt nevycházel z místa A , ale z místa B ?
- N2. Úsečka AE je body B, C, D rozdělena na čtyři stejně dlouhé úseky. Mravenec vyšel z bodu A do B a vrátil se zpět do A . Potom šel do C , zpět do A , pak do D , zpět

do A a nakonec do E . Beruška šla rovnou z bodu A do bodu E . Kolikrát byla cesta berušky kratší než cesta mravence?



- N3. Petr by za 5 minut ujel na kole $\frac{1}{6}$ trasy. Pěšky by za 40 minut ušel $\frac{1}{4}$ téže trasy. Vyzrazil na kole, v polovině trasy píchl duši, a zbytek došel pěšky. Jak dlouho mu trvalo překonat celou trasu?
- N4. Želvy Žaneta a Žofie jsou sestry a žijí v jednom domě se zahradou. Žaneta potřebuje na ujítí stejné dráhy o třetinu více času než Žofie.
- Pokud Žofie obejde zahradu za 3 hodiny, za jak dlouho by ji obešla Žaneta?
 - Pokud Žaneta obejde dům za 2 hodiny, za jak dlouho by ho obešla Žofie?
 - Pokud má Žaneta ujít dráhu dvanáctkrát delší než Žofie, kolikrát více času bude potřebovat?

Z7–I–5

Kolik je trojic čísel a, b, c takových, že dvojmístná čísla $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$ a trojmístné číslo $\overline{abc}$ jsou všechna dělitelná třemi? (P. Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Připomeňte si kritérium dělitelnosti třemi a rozhodněte, která z následujících čísel jsou dělitelná třemi:

44, 555, 6 666, 789.

- N2. Kterou číslici v čísle a) 45 678; b) 5 678 910 můžeme odstranit, aby vzniklo číslo dělitelné třemi?

- N3. Jakou hodnotu může mít číslice a , aby pětímístné číslo $\overline{647aa}$ bylo dělitelné třemi?

- N4. Je dána posloupnost čísel

1, 12, 123, 1 234, 12 345, ... 123 456 789.

Najděte v ní dvojice sousedních čísel, která jsou obě dělitelná třemi.

- D1. Kolik je dvojic čísel a, b takových, že sedmimístné číslo $\overline{ab05baa}$ je dělitelné třemi?

Z7–I–6

V daném obdélníku $ABCD$ leží na straně CD bod E tak, že úsečky AE a EC jsou shodné. Osa úsečky AE prochází bodem D a protíná úhlopříčku AC v bodě G .

Určete velikost úhlu DGC .

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. V trojúhelníku ABC leží vrchol A na ose strany BC a platí a) $|\sphericalangle ABC| = 70^\circ 40'$; b) $|\sphericalangle CAB| = 70^\circ 40'$. Vypočítejte velikost úhlu BCA .
- N2. Osa strany AB kosočtverce $ABCD$ prochází vrcholem D . Určete velikosti všech vnitřních úhlů kosočtverce $ABCD$.
- N3. V daném čtverci $ABCD$ leží na straně AB bod K a na straně AD bod L tak, že $|\sphericalangle AKL| = 28^\circ$. Vypočítejte velikost úhlu DLK pomocí a) trojúhelníku AKL ; b) čtyřúhelníku $KBDL$.

- D1. V trojúhelníku ABC jsou na straně AB umístěny body K, L tak, že $|AK| = |KC| = |CL| = |LB|$, přičemž $|AK| < |AL|$ a $|\sphericalangle KCL| = 40^\circ$. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC .

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z8

Z8–I–1

Klasická hrací kostka má na svých stěnách tečky v počtech od 1 do 6 tak, že součet teček na každých dvou protilehlých stěnách je sedm. Tři kamarádky si rozdělily 24 stejných hracích kostek a každá ze svých osmi kostek slepila kvádr či krychli. Žádné dva z těchto tří útvarů neměly stejné rozměry a každý byl slepen tak, aby součet teček na jeho povrchu byl co největší.

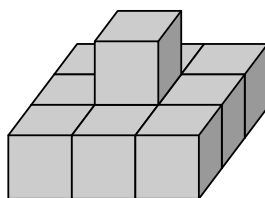
Jaké součty teček mohly kamarádky dostat?

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

Stejně jako v soutěžní úloze má i v následujících úlohách hrací kostka na každé stěně jednu až šest teček a na každých dvou protilehlých stěnách je součet teček sedm.

- N1. Mirek k sobě slepil dvě hrací kostky a získal tak kvádr. Jaký největší a jaký nejmenší počet teček mohl být dohromady na stěnách takto vzniklého kvádrů?
- N2. Jana slepila čtyři hrací kostky tak, že nebyly všechny v jedné řadě a dohromady tvořily kvádr. Jaký největší a jaký nejmenší počet teček mohl být na povrchu kvádrů?
- N3. Radim skládal tělesa, pokaždé z 12 shodných krychlí, které slepoval k sobě celými stěnami. Kolik různých kvádrů takto mohl vytvořit? Kvádry, které lze na sebe převést otočením, považujeme za stejné.
- D1. Jenda má 100 hracích kostek, ze kterých skládal pyramidu se čtvercovou základnou. Každé patro pyramidy je čtverec a každé nižší patro přechází na všech čtyřech stranách o šířku jedné kostky. Horní dvě patra pyramidy jsou na obrázku níže. Kolik nejvýše pater mohla mít Jendova pyramida a kolik nejvíce teček mohlo být na povrchu stavby? Tečky na spodku pyramidy nezapočítáváme.



Z8–I–2

Najděte všechny dvojice kladných celých čísel a a b s následujícími vlastnostmi:

- obě čísla a a b jsou menší než 50,
- součin $a \cdot b$ je dělitelný 11, ale součet $a + b$ není dělitelný 11,
- součin $a \cdot b$ je dělitelný 17, ale součet $a + b$ není dělitelný 17,
- jak součin $a \cdot b$, tak součet $a + b$ jsou dělitelné 2.

(E. Semerádová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Najděte všechny dvojice různých jednomístných přirozených čísel, jejichž a) součet; b) součin je dělitelný sedmi.

N2. Z čísel 3, 5, 12, 25, 9, 17 vyberte všechny dvojice, jejichž

- a) součin je dělitelný pěti, ale součet není dělitelný pěti;
- b) součin i součet jsou dělitelné třemi.

N3. Najděte všechny dvojice různých dvojmístných čísel, jejichž součin i součet jsou dělitelné číslem 19 a jejichž a) součin; b) součet je dělitelný dvěma.

D1. Vyslovte pravidlo, kdy pro dvě přirozená čísla a , b platí:

- a) součin $a \cdot b$ je dělitelný 11;
- b) součet $a + b$ je dělitelný 7;
- c) součin $a \cdot b$ je dělitelný 6.

D2. Kolik existuje trojmístných čísel složených ze tří různých nenulových číslic takových, že součin i součet jejich číslic jsou dělitelné třemi?

Z8–I–3

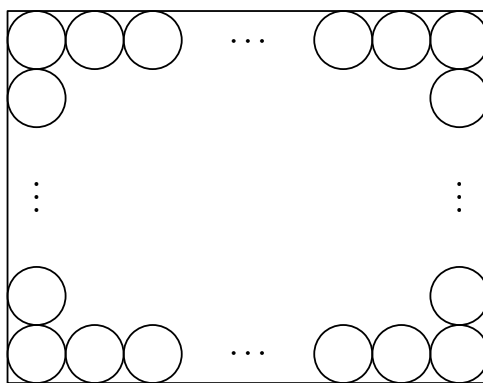
Alfons poskládal 56 kruhových etiket s poloměry 4 cm na stůl ve tvaru obdélníku tak, že platilo:

- každé strany stolu se dotýkala nějaká etiketa,
- rohové etikety se dotýkaly dvou stran stolu,
- ostatní etikety se dotýkaly jedné strany stolu,
- sousední etikety se dotýkaly navzájem.

Na druhý stůl stejných rozměrů začal skládat kruhové etikety s poloměry 3 cm a snažil se dodržet všechny podmínky ze stolu prvního. Po uložení celé řady podél jedné strany zjistil, že použil o 6 etiket více než podél stejné strany na prvním stole.

Zjistěte rozměry stolu.

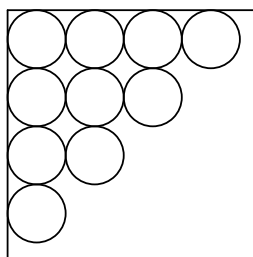
(M. Macko)



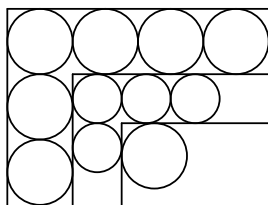
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Kolik etiket o průměru 4 cm lze poskládat podél čtyř stran desky obdélníkového stolu o rozměrech 120 cm $\times$ 100 cm tak jako v soutěžní úloze?

N2. Iva připravuje občerstvení na sportovní den a zjistila, že pokud všech 45 kelímků s limonádou vyskládá na obdélníkový stůl o rozměrech 60 cm $\times$ 108 cm tak, jak je naznačeno na obrázku, zaplní jimi celý stůl. Určete průměr kelímku.



- N3. Bořek ohraničil část rovné cesty špalíky, které skládal těsně k sobě. Na jedné straně použil špalíky o průměru 18 centimetrů, na druhé straně špalíky o průměru 12 centimetrů a malých špalíků použil o 11 více než velkých. Jak dlouhý byl ohraničený úsek?
- D1. Richard skládal na stůl o rozměrech $80\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ etikety o průměrech 4 cm a 3 cm, jak je naznačeno na obrázku. Začal skládat větší etikety podél dvou sousedních stran stolu, aby se jich dotýkaly a dotýkaly se i navzájem. V obou směrech jich položil tolik, kolik se na stůl vešlo celých. Poté narýsoval dvě úsečky rovnoběžné s hranami stolu, které se etiket dotýkaly. Podél těchto úseček skládal menší etikety podle stejných pravidel, opět narýsoval dvě úsečky a takto pokračoval, dokud to bylo možné. Kolik velkých etiket Richard použil?



Z8–I–4

V prvním ročníku naší školy jsou dvě třídy — 1. A a 1. B. V 1. A je o polovinu více chlapců než v 1. B, o čtvrtinu více děvčat než v 1. B a celkově o třetinu více žáků než v 1. B. Jakou část všech žáků prvního ročníku tvoří děvčata? (J. Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Zita a Dita se domluvily, že o víkendu budou hodně sportovat. Zita ujela na kole stejnou vzdálenost jako na kolečkových bruslích, dohromady ujela 72 kilometrů. Dita ujela na kole o čtvrtinu větší vzdálenost než Zita, na kolečkových bruslích však ujela o dvě třetiny menší vzdálenost než Zita. Kolik kilometrů překonala Dita na kole a kolečkových bruslích dohromady?
- N2. V osmém ročníku jsou dvě třídy, 8. A a 8. B, v každé z nich je 24 žáků. V 8. A je o polovinu více chlapců než v 8. B a v 8. B tvoří chlapci třetinu třídy. Jak velkou část ročníku tvoří chlapci?
- N3. Karel, Kuba a Kryštof trhali třešně. Karel natrhal o čtvrtinu více než Kuba, Kryštof o třetinu méně než Karel, dohromady natrhal 37 kilogramů třešní. Kolik kilogramů třešní natrhal Karel?
- D1. Včera vydojili na farmě Doj dvakrát více mléka než na farmě Hoj a na farmě Joj dvakrát více mléka než na farmě Doj. Každá farma poslala část vydojeného mléka ke zpracování na máslo. Farma Doj poslala na výrobu másla $\frac{7}{8}$ svého mléka, farma Hoj $\frac{3}{4}$ svého mléka. Z mléka vydojeného na všech třech farmách dohromady šlo na výrobu másla 90 %. Jakou část svého mléka poslala na výrobu másla farma Joj?

Z8–I–5

Honza, Mikuláš a Víťa si vytyčili cyklokrosový okruh. Honza odstartoval závod Mikuláše a Víti na 12 okruhů. Když Mikuláš poprvé projížděl kolem Honzy, vydal se Honza v protisměru naproti Víťovi, který byl pozadu. Honza ušel 150 metrů, než Víťu potkal. V tom okamžiku měl Víťa zdolánu čtrnáctinu celkové délky závodu.

Kolik metrů měřil jeden okruh?

(L. Dedková)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Eliška se rozhodla, že dvakrát oběhne školu. Spolu s Davidem odstartovali před hlavním vchodem, ale opačným směrem. Eliška potkala Davida po 100 metrech svého běhu a do splnění plánu jí zbývala ještě dvakrát delší vzdálenost. Kolik metrů uběhl do setkání s Eliškou David?
- N2. Marek, Eva a Jakub se domluvili, že se odpoledne sejdou v parku. Marek a Eva dorazili včas, ale Jakub měl zpoždění. Marek s Evou si čekání na Jakuba krátili obcházením parku. Marek park obcházel po vnějším okraji, Eva obcházela menší okruh kolem květinového záhonu. Markův okruh měřil 1,2 kilometru a stihl ho obejít přesně třikrát. Eva za stejný čas stejným tempem obešla svůj okruh přesně osmkrát. Jak dlouhý byl okruh kolem květinového záhonu?
- N3. Natálka pletla věnce z pampelišek. Dopoledne pletla velké věnce, každý ze 45 pampelišek, a odpoledne malé věnce, které měly o 18 pampelišek méně než velké věnce. Odpoledne upletla o 10 věnců více než dopoledne, přičemž její práce dopoledne i odpoledne trvala stejně dlouho a čas potřebný na upletení věnce byl přímo úměrný počtu pampelišek. Kolik věnců celkem Natálka upletla?
- D1. Pat a Mat se vykoupli v rybníce a pak si dali závod do své chaloupky. V jistém okamžiku platilo, že kdyby Mat měl zdolánu polovinu vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběl by mu do chaloupky trojnásobek oné poloviční vzdálenosti. V tomtéž okamžiku platilo, že kdyby Pat měl zdolán dvojnásobek vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběla by mu do chaloupky třetina oné dvojnásobné vzdálenosti. Kdo byl v daném okamžiku blíž chaloupce?

Z8–I–6

Jsou dány body X , Y a úsečka PQ jako na obrázku. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby platilo:

- *poloměr kružnice opsané trojúhelníku BCD je roven délce úsečky PQ ,*
- *bod X leží na úhlopříčce BD a bod Y leží na úhlopříčce AC ,*
- *body X a Y jsou souměrné podle osy rovnoběžné s přímkou AB .*

Popište a zdůvodněte svoji konstrukci.

(M. Janičová)

Y
+

P ————— Q

X
+

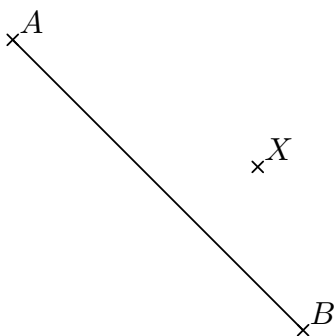
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Popište polohu středu kružnice opsané trojúhelníku

- a) ABC , jehož strana AB má délku 6 centimetrů a obě zbylé strany jsou o třetinu kratší;
- b) KLM , ve kterém jsou všechny vnitřní úhly shodné;
- c) PQR , ve kterém úhel u vrcholu P je pravý a strany PQ a PR mají délku 4 cm.

N2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB . Na straně BC leží dva různé body K, L a na straně AC leží dva různé body M, N tak, že body K, M jsou osově souměrné podle osy o a body L, N jsou osově souměrné podle téže osy. Načrtněte a popište, kudy osa o prochází.

D1. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dána jeho strana AB a bod X , který leží na přímce obsahující některou úhlopříčku kosočverce. Najděte všechny možnosti.



D2. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že bod D leží na ose úsečky BC a vzdálenost bodu A od přímky CD je stejná jako vzdálenost bodu C od přímky AD . Dokažte, že čtyřúhelníku $ABCD$ nelze opsat kružnici.

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Do políček tabulky 5×5 doplňte čísla od 1 do 5 tak, aby:

- každé z čísel bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou,
- součet deseti čísel v šedě vyznačené části byl 21.

Najděte všechny možnosti.

(J. Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Do následující tabulky doplňte čísla 1, 2, 3 tak, aby každé z nich bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou.

1		
	2	
		3

- N2. Do následující tabulky doplňte čísla 1, 2, 3 tak, aby každé z nich bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou a součet čísel v orámované části byl co největší. Určete tento součet.

- N3. Do následující tabulky doplňte čísla od 1 do 9 (každé libovolněkrát) tak, aby se v žádném řádku ani sloupci žádné číslo neopakovalo a aby součet všech čísel v tabulce byl a) co největší; b) co nejmenší.

- D1. Hvězdný čtverec je taková čtvercová tabulka čísel, pro kterou platí, že součty čísel v jednotlivých řádcích a sloupcích jsou všechny stejné. Na obrázku je pozůstatek hvězdného čtverce, ve kterém byla čísla v jednom řádku a jednom sloupci smazána. Doplňte chybějící čísla tak, aby všechna byla celá a právě čtyři záporná. Určete všechny možnosti.

1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	

Z9–I–2

Pro reálná čísla d, e, s, t a v platí:

$$d \cdot v \cdot e = 2,$$

$$s \cdot e \cdot s \cdot t = 6,$$

$$d \cdot e \cdot v \cdot e \cdot t = 9.$$

Určete všechny možné hodnoty součinu $d \cdot v \cdot e \cdot s \cdot t \cdot e$.

(J. Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b \cdot c = 14,$$

$$a \cdot c = 20.$$

Určete hodnotu b .

- N2. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b = 3,$$

$$b \cdot c = 6,$$

$$a \cdot c = 9.$$

Určete všechny možné hodnoty součinu $a \cdot b \cdot c$.

- N3. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b \cdot c^2 = 12\sqrt{6},$$

$$a^2 \cdot c^2 = 12.$$

Jakých hodnot může nabývat součin $b \cdot c$?

- D1. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a^3 \cdot b^4 \cdot c^5 = 2,$$

$$a^6 \cdot b^5 \cdot c^2 = 12,$$

$$a^3 \cdot b^3 \cdot c = 3.$$

Jakých hodnot může nabývat součin $a \cdot b \cdot c$?

Z9–I–3

Jsou dány soustředné kružnice k , l a body A , B , C , D tak, že platí:

- *poloměr kružnice k je 10 cm a poloměr kružnice l je větší,*
- *úsečka AB je tětivou kružnice k a měří 16 cm,*
- *úsečka CD je tětivou kružnice l , je kolmá k tětivě AB a prochází bodem B ,*
- *trojúhelník ABC je rovnoramenný.*

Jaká může být délka tětivy CD ? Určete všechny možnosti.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících úlohách opakovaně využíváme Pythagorovu větu.

- N1. Určete poloměr kružnice opsané obdélníku o rozměrech 4 cm $\times$ 6 cm.
- N2. Kružnice k má střed S a poloměr 13 cm. Její tětiva AB je od bodu S vzdálena 5 cm. Vypočítejte délku tětivy AB .
- N3. Jsou dány soustředné kružnice k a l , z nichž l má menší poloměr než k . Tětiva AB kružnice k je od společného středu kružnic vzdálena 1 cm a kružnice l ji rozděluje na tři úseky, každý o délce 4 cm. Určete poloměry kružnic k a l .
- D1. Je dán kosočtverec $ABCD$ a kružnice k se středem A procházející bodem C . Strana kosočtverce měří 10 cm a poloměr kružnice je 12 cm. Kružnice k vytíná na přímce BD tětivu. Určete vzdálenosti bodu B od krajních bodů této tětivy.

Z9–I–4

Ve vstupní hale kina bylo několik jednomístných a několik trojmístných sedaček. Jednou si uvaděčka všimla, že v hale sedělo 25 lidí a 10 sedaček bylo prázdných. Jindy si uvaděčka všimla, že v hale sedělo 14 lidí a 7 sedaček bylo prázdných. V obou případech byla každá trojmístná sedačka buď prázdná, nebo plně obsazená.

Kolik jednomístných a kolik trojmístných sedaček mohlo být v hale? Najděte všechny možnosti.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. K čochce nakyselo dávali v restauraci podle přání zákazníka buď dvě, nebo tři vejce natvrdo.
- a) Kolik nejvýše porcí připravili, jestliže spotřebovali právě 20 vajec?
 - b) Kolik nejméně porcí připravili, jestliže spotřebovali právě 20 vajec?
 - c) Kolik nejvíce a kolik nejméně vajec je třeba na 20 porcí?
- N2. Máme rozdělit 15 bonbónů na hromádky, z nichž každá má tři, nebo čtyři bonbóny. Kolik takových hromádek bude? Najděte všechny možnosti.
- N3. Děti na táboře získávaly za splnění úlohy body. Ty bylo možné dále směňovat: pět bodů za samolepku, šest bodů za tiskátko. Jára si propočítal, že kdyby chtěl jenom samolepky, zbyl by mu jeden bod nevyužitý. Kdyby si vybral jenom tiskátka, nevyužil by tři body. Nakonec dokázal uplatnit všechny svoje body, přičemž získal dvakrát více tiskátek než samolepek. Kolik nejméně bodů měl Jára před směňováním?
- D1. Na statku žilo 30 lidí. Statkář nařídil, aby mezi ně rozdělili 30 měric obilí tak, že každý muž dostane 3 měrice, každá žena 2 měrice a každé dítě půl měrice obilí. Obilí vystačilo přesně. Kolik mužů, žen a dětí žilo na statku? Najděte všechny možnosti.

Z9–I–5

Na tabuli je napsáno číslo 100. Dva kamarádi hrají hru podle následujících pravidel:

- Hráči se u tabule pravidelně střídají.
- V každém tahu hráč číslo smaže a nahradí číslem novým.
- Nové číslo je z předchozího vytvořeno buď odečtením jedné, nebo vydělením dvěma.
- Všechna napsaná čísla jsou přirozená.
- Vyhrává hráč, který napíše číslo 1.

Ukázalo se, že jeden z hráčů může postupovat tak, aby zaručeně vyhrál. Který hráč to je a kolik nejméně tahů k výhře potřebuje? (I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Uvažme hru ze soutěžní úlohy, v níž je na začátku napsáno číslo 8 místo 100. Najděte všechny možné průběhy této hry.
- N2. Jak by probíhala hra ze soutěžní úlohy s nejmenším možným počtem tahů? Kdo by vyhrál?
- N3. Najděte tři nejmenší počáteční čísla hry ze soutěžní úlohy, pro která může druhý hráč postupovat tak, aby zaručeně vyhrál.
- D1. Hra NIM má mnoho variant, uvažujme tuto: Na hromádce je 12 sirek. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. V každém tahu hráč odebere jednu, nebo dvě sirky. Prohrává ten hráč, který odebere poslední sirku. Pokud to je možné, najděte vítěznou strategii pro prvního hráče.

Z9–I–6

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a jeho vnitřní bod P s těmito vlastnostmi:

- $|BC| = |CP| = |PD|$,
- $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PCB|$,
- $|\sphericalangle BAP| = 15^\circ$.

Určete velikost úhlu APB . (P. Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. V rovnoběžníku $ABCD$ je vnitřní úhel u vrcholu A o 30° větší než vnitřní úhel u vrcholu B . Určete velikosti vnitřních úhlů rovnoběžníku.
- N2. V rovnoramenném trojúhelníku RST se základnou RS značí φ velikost vnitřního úhlu u vrcholu T . Vyjádřete pomocí φ velikosti ostatních vnitřních a všech vnějších úhlů trojúhelníku RST .
- N3. Rozdělte pravidelný pětiúhelník na tři rovnoramenné trojúhelníky a jejich rovnoramennost zdůvodněte.
- D1. V trojúhelníku ABC leží bod D na straně BC , bod E na straně AC a platí

$$|AB| = |BE| = |EC| = |CD|, \quad |BD| = |DE|.$$

Určete velikosti úhlů ACB a BAD .