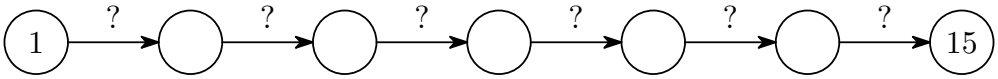
# I. kolo kategorie Z5

**Z5–I–1**

Zvláštní kalkulačka má pouze dvě funkční tlačítka. Po stisknutí prvního tlačítka se k číslu na displeji přičte jedna, po stisknutí druhého tlačítka se číslo na displeji vynásobí dvěma. Na displeji po každém stisknutí tlačítka svítí správný výsledek.

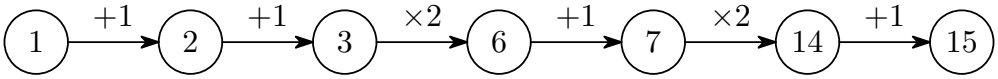
Najděte dva způsoby, jak pomocí šesti stisknutí tlačítek dostat na displeji z čísla 1 číslo 15. (*I. Jančigová*)

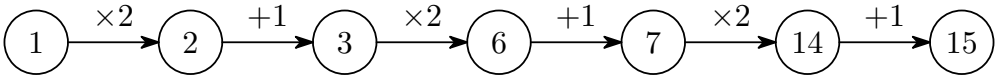
**Možné řešení.** Úlohu lze znázornit jako tzv. početního hada, kde místo otazníků můžeme dosadit buď +1, nebo ×2:




Po násobení dvěma je výsledkem sudé číslo. Tedy před lichým číslem je nutně +1. Před sudým číslem může být jak +1, tak ×2.

Postupně odzadu najdeme dvě vyhovující řešení:



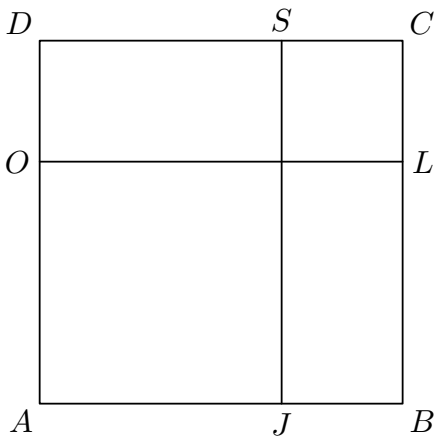

**Poznámka.** Uvedená řešení jsou jediná možná. Jakýkoli jiný způsob, jak z čísla 1 dostat číslo 15 pomocí dovolených operací, vyžaduje větší počet kroků.

**Z5–I–2**

U zámku je čtvercový park se stranou délky 240 metrů. Po stranách čtverce vedou cesty, v jeho vrcholech stojí akát, buk, cedr a dub. Park křižují dvě další cesty rovnoběžné s cestami po jeho stranách — jedna vede od javoru ke studánce, druhá vede od lípy k ořechu. Princezna při svých procházkách parkem chodila jen po cestách, nikde se nevracela, ani zbytečně neodbočovala a zjistila, že:

- procházka od buku ke studánce kolem javoru, akátu, ořechu a dubu je dvakrát delší než kolem lípy a cedru,
- procházka od buku ke studánce kolem lípy a cedru je stejně dlouhá jako procházka od dubu k lípě kolem studánky a cedru.

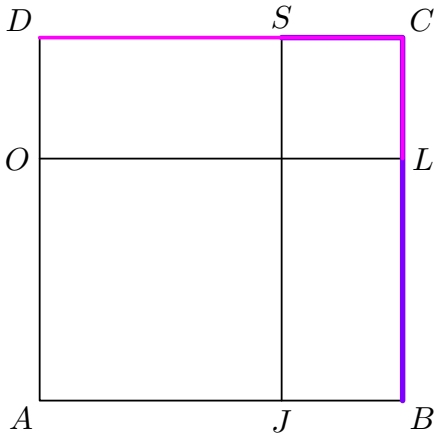
Jak dlouhá je přímá cesta od akátu k ořechu? (*M. Macko*)



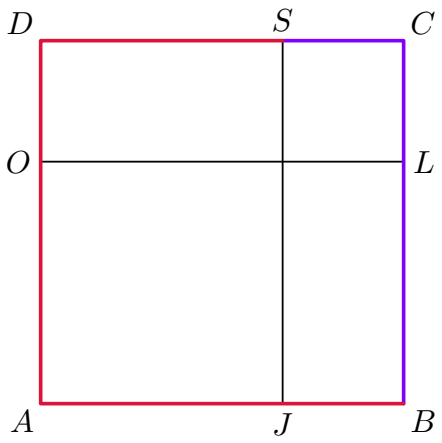

Poznámka: obrázek je pouze ilustrační, orientační body ze zadání jsou označeny jejich počátečními písmeny.

**Možné řešení.** Místo popisu ze zadání úlohy budeme užívat značení z obrázku.

Procházky zmiňované ve druhém bodě mají společnou část odpovídající úsečkám $LC$ a $CS$. Protože obě procházky jsou stejně dlouhé, úsečky $BL$ a $SD$ jsou stejně dlouhé. Protože $ABCD$ je čtverec, také úsečky $LC$ a $CS$ jsou stejně dlouhé. Tedy čtverec $ABCD$ je složen ze dvou čtverců a dvou stejných obdélníků (se stranami shodnými s úsečkami $BL$ a $LC$).




Procházky zmiňované v prvním bodě dávají dohromady obvod čtverce $ABCD$. Obvod tohoto čtverce sestává ze čtyř stejných stran, tedy měří $4 \cdot 240 = 960\,(\mathrm{m})$. První procházka je dvakrát delší než ta druhá, tedy druhá procházka odpovídá třetině obvodu čtverce $ABCD$. Délka druhé procházky je $960 : 3 = 320\,(\mathrm{m})$.




Druhá procházka sestává z úseček $BC$ a $CS$. Úsečka $BC$ je stranou čtverce, tedy délka úsečky $CS$ je

$$|CS| = 320 - 240 = 80\,(\mathrm{m}).$$

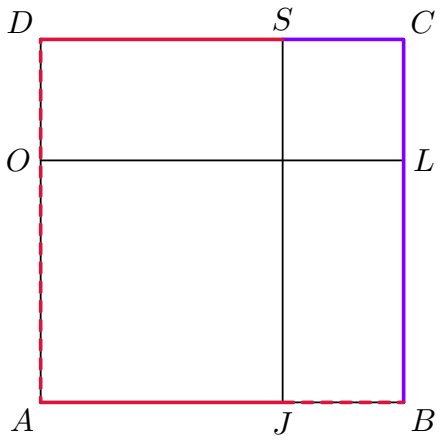
Z předchozího víme, že úsečky $AO$ a $BL$ jsou stejně dlouhé a že úsečky $LC$ a $CS$ jsou stejně dlouhé. Úsečky $BL$ a $LC$ dávají dohromady stranu $BC$ celého čtverce. Celkem platí:

$$\begin{aligned} |AO| = |BL| &= |BC| - |LC| = \\ &= |BC| - |CS| = 240 - 80 = 160\,(\mathrm{m}). \end{aligned}$$

Přímá cesta od akátu k ořechu měří 160 metrů.

**Poznámka.** Pro procházky zmiňované v prvním bodě platí:

- První procházka je dvakrát delší než druhá. Tedy rozdíl jejich délek je stejný jako délka kratší procházky, a ta je
$$|BC| + |CS| = |BL| + 2|LC|.$$
- Rozdíl procházek odpovídá úsečkám $AJ$ a $DS$, tedy měří
$$|AJ| + |DS| = |BL| + |BL|.$$
- Dohromady dostáváme $|BL| = 2|LC|$ neboli $|BC| = 3|LC|$.
- Protože $|BC| = 240\,\mathrm{m}$, platí $|LC| = 80\,\mathrm{m}$, a tedy $|AO| = |BL| = 160\,\mathrm{m}$.

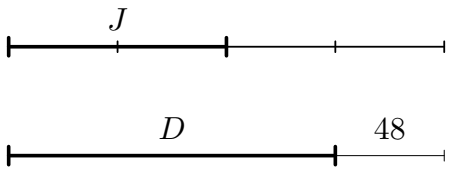


**Z5–I–3**

Danka a Janka každá pro sebe nasbíraly jahody. Kdyby měla Janka o polovinu víc jahod, než nasbírala, měla by jich stejně jako Danka. Kdyby měla Janka dvakrát víc jahod, než nasbírala, měla by jich o 48 víc než Danka.

Kolik jahod nasbírala Janka a kolik Danka? (*M. Dillingerová*)

**Možné řešení.** Podmínky ze zadání lze znázornit pomocí úseček ($J$ představuje počet Jančiných jahod, $D$ počet Dančiných jahod):




Odtud vyvozujeme, že 48 odpovídá polovině Jančiných jahod.

Janka nabírala $2 \cdot 48 = 96$ jahod, Danka nasbírala $3 \cdot 48 = 144$ jahod.

**Poznámka.** Podmínky ze zadání lze s předchozím značením zapsat jako

$$J + \tfrac{1}{2}J = D, \quad 2J = D + 48.$$

Odtud dostáváme

$$D + \tfrac{1}{2}J = 2J = D + 48,$$

a tedy $\frac{1}{2}J = 48$.

**Z5–I–4**

Anežka správně vynásobila určité číslo sedmi a výsledné pětimístné číslo napsala na papír. Papoušek Fráňa kus papíru vykloval a první číslice výsledku se tak stala nečitelnou. Na zbytku papíru zůstalo napsáno 2887.

Jaká mohla být první číslice Anežčina výsledku? Najděte všechny možnosti.

(*M. Petrová*)

**Možné řešení.** Výsledné číslo po násobení sedmi bylo pětimístné. Tedy původní mohlo být buď čtyřmístné, nebo pětimístné. Úlohu můžeme znázornit jako algebrogram (šedá hvězdička nemusí být nahrazena číslicí):

$$\begin{array}{rr} & {\color{gray}*}\,*\,*\,*\,* \\ \times & \qquad\quad 7 \\ \hline & ?\,2\,8\,8\,7 \end{array}$$

Součin čísla 7 s jednomístným číslem má pokaždé jinou číslici na místě jednotek:

$$0, \quad 7, \quad 14, \quad 21, \quad 28, \quad 35, \quad 42, \quad 48, \quad 56, \quad 63, \quad 72.$$

Díky této vlastnosti jednoznačně odzadu určíme poslední čtyři hvězdičky:

$$\begin{array}{rr} & {\scriptstyle *}\,1\,8\,4\,1 \\ \times & \qquad\quad 7 \\ \hline & ?\,2\,8\,8\,7 \end{array}$$

Postupně jsme počítali $1 \cdot 7 = 7$ (žádný přechod přes desítku), $4 \cdot 7 = 28$ (přes desítku přechází dvojka), $8 \cdot 7 + 2 = 58$ (přes desítku přechází pětka), $1 \cdot 7 + 5 = 12$ (přes desítku přechází jednička).

- Pokud původní číslo bylo čtyřmístné, pak výpočet vypadal takto:

$$\begin{array}{rr} & 1\,8\,4\,1 \\ \times & \qquad 7 \\ \hline & 1\,2\,8\,8\,7 \end{array}$$

- Pokud původní číslo bylo pětimístné, pak jeho první číslice byla 1 (aby výsledek byl pětimístný). Výpočet pak vypadal takto:

$$\begin{array}{rr} & 1\,1\,8\,4\,1 \\ \times & \qquad 7 \\ \hline & 8\,2\,8\,8\,7 \end{array}$$

  První číslice Anežčina výsledku byla buď 1, nebo 8.

**Z5–I–5**

Věky sedmi kamarádů jsou 8, 9, 10, 11, 11, 13 a 14 roků. Tři kamarádi jsou zrovna v kině, dva jsou na fotbale a dva doma. Součet věků těch v kině je 30 roků, součet věků těch na fotbale je 24 roků. Každý z kamarádů na fotbale má víc roků než Ondřej, který zůstal doma.

Kolik roků může mít Ondřej? Najděte všechny možnosti. (*M. Macko*)

**Možné řešení.** Součet 30 lze pomocí tří daných sčítanců získat jedině takto:

$$30 = 8 + 9 + 13 = 8 + 11 + 11 = 9 + 10 + 11.$$

Součet 24 lze pomocí dvou daných sčítanců získat jedině takto:

$$24 = 10 + 14 = 11 + 13.$$

První součet odpovídá třem kamarádům v kině, druhý dvěma kamarádům na fotbale. Uvedené možnosti kombinujeme tak, aby se doplňovaly, zbývající čísla odpovídají dvěma kamarádům doma:

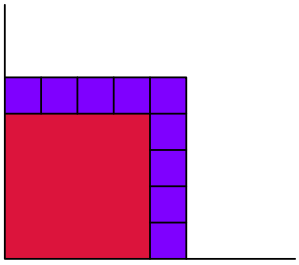
| v kině | na fotbale | doma |
|---|---|---|
| 8, 9, 13 | 10, 14 | 11, 11 |
| 8, 11, 11 | 10, 14 | 9, 13 |
| 9, 10, 11 | 11, 13 | 8, 14 |

Podmínka s Ondřejovým věkem může být splněna pouze ve druhém a třetím případě: Ondřej má buď 9, nebo 8 roků.

**Z5–I–6**

Čtyři děvčata dláždila čtvercovými dlaždicemi terasu v rohu dvoru. Viola používala dlaždice se stranou 1 dm, Růžena se stranou 2 dm, Blanka se stranou 3 dm a Karmen se stranou 4 dm. První z děvčat položila jednu ze svých dlaždic do rohu. Druhá položila své dlaždice podél volných stran předchozí dlaždice a přidala jednu navíc, aby vznikl čtverec (viz obrázek). Obdobným způsobem položilo své dlaždice třetí a nakonec i čtvrté děvče. Takto vznikla čtvercová terasa bez mezer a překryvů.

V jakém pořadí mohla děvčata pokládat dlaždice a kolik dlaždic celkem použila? Najděte všechny možnosti. (*M. Macko*)

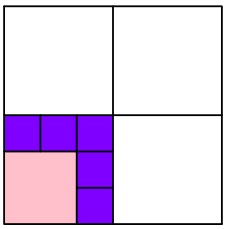


**Možné řešení.** Postupně probereme možnosti podle velikosti první dlaždice:

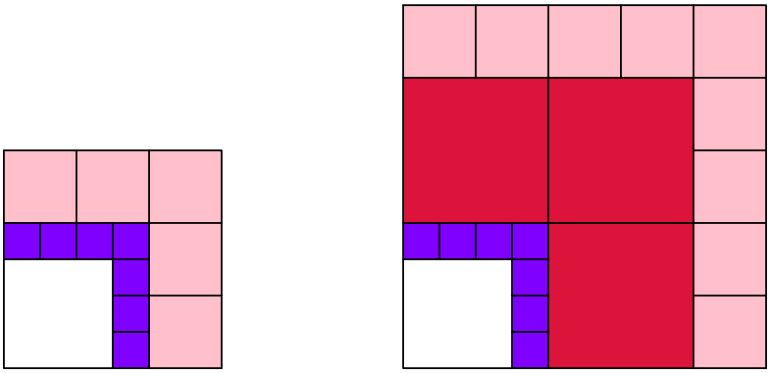
- K první dlaždici se stranou 1 dm nelze přikládat jiné dlaždice ze zadání.



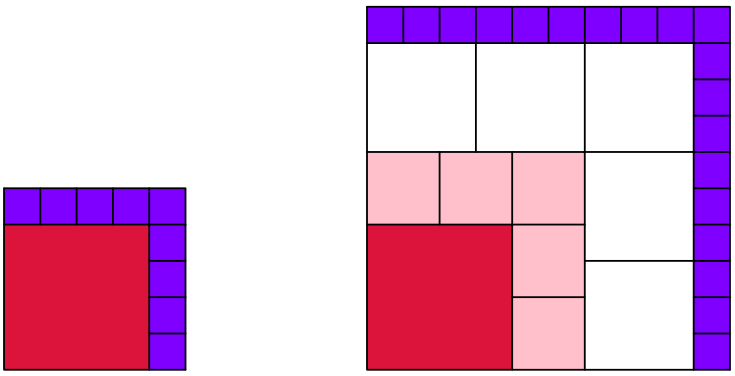
- K první dlaždici se stranou 2 dm lze přikládat jedině dlaždice se stranou 1 dm a poté jedině ty se stranou 3 dm. Zbývající dlaždice se stranou 4 dm už přikládat nelze.



- K první dlaždici se stranou 3 dm lze přikládat jedině dlaždice se stranou 1 dm a poté buď ty se stranou 2 dm, nebo ty se stranou 4 dm. V prvním případě zbývají dlaždice se stranou 4 dm, a ty přikládat nelze. Ve druhém případě zbývají dlaždice se stranou 2 dm, a ty přikládat lze.



- K první dlaždici se stranou 4 dm lze přikládat buď dlaždice se stranou 1 dm, nebo dlaždice se stranou 2 dm. V prvním případě zbývají dlaždice se stranami 2 dm a 3 dm, a ty přikládat nelze (v žádném pořadí). Ve druhém případě zbývají dlaždice se stranami 1 dm a 3 dm, a ty přikládat lze (v opačném pořadí).



Děvčata mohla pokládat dlaždice buď v pořadí Blanka, Viola, Karmen, Růžena a použít $1 + 7 + 3 + 9 = 20$ dlaždic, nebo v pořadí Karmen, Růžena, Blanka, Viola a použít $1 + 5 + 5 + 19 = 30$ dlaždic.

# I. kolo kategorie Z6

**Z6–I–1**

V následujícím sčítacím algebrogramu odpovídají různá písmena různým číslicím, stejná stejným:

$$\begin{array}{r} T\,O\,N\,A \\ O\,N\,A \\ N\,A \\ A \\ \hline 8\;6\;5\;4 \end{array}$$

Nahraďte písmena číslicemi tak, aby byl výpočet správný. Najděte všechny možnosti.

(*I. Jančigová*)

**Možné řešení.** Písmena budeme odhalovat odzadu (od jednotek k tisícovkám). Součet čtyř $A$ má končit číslicí 4, což je možné buď pro $A = 1$, nebo pro $A = 6$. Oba případy rozebereme:

- Pro $A = 1$ je $4 \cdot A = 4$ a nedochází k přechodu přes desítku. Součet tří $N$ má být 5, což je možné pouze pro $N = 5$. Nyní $3 \cdot N = 15$ a přes desítku přechází 1. Součet dvou $O$ a 1 má být 6, což není možné ($2O + 1$ je liché a 6 je sudé). Tento případ tedy k řešení nevede.
- Pro $A = 6$ je $4 \cdot A = 24$ a přes desítku přechází 2. Součet tří $N$ a 2 má být 5, což je možné pouze pro $N = 1$. Nyní $3 \cdot N + 2 = 5$ a nedochází k přechodu přes desítku. Součet dvou $O$ má být 6, což je možné buď pro $O = 3$, nebo $O = 8$. Příslušná doplnění vypadají takto:

$$\begin{array}{r} 8\;3\;1\;6 \\ 3\;1\;6 \\ 1\;6 \\ 6 \\ \hline 8\;6\;5\;4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\;8\;1\;6 \\ 8\;1\;6 \\ 1\;6 \\ 6 \\ \hline 8\;6\;5\;4 \end{array}$$

Písmena lze nahradit číslicemi dvěma právě uvedenými způsoby.

**Z6–I–2**

Od 1. ledna byl pan Novák zaměstnán v nové práci. Nástupní výše jeho platu byla 1 550 eur měsíčně. Protože se osvědčil, od jistého měsíce v prvním půlroce mu byl zvýšen plat o celý počet eur. Za celý rok si vydělal 20 000 eur.

Za který měsíc si pan Novák poprvé vydělal více a o kolik? Určete všechny možnosti.

(*M. Macko*)

**Možné řešení.** Pokud by panu Novákovi plat nezvýšili, tak by si za celý rok vydělal $12 \cdot 1\,550 = 18\,600$ eur. Rozdíl mezi tímto a jeho skutečným výdělkem je $20\,000 - 18\,600 = 1\,400$ eur.

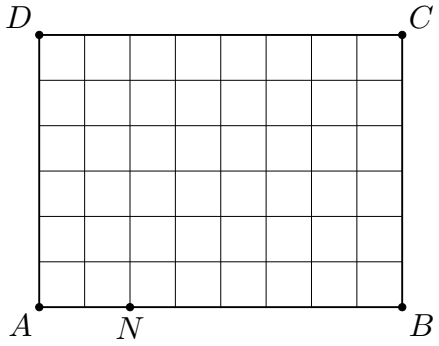
Částka 1 400 eur je násobkem počtu eur, o který mu byl zvýšen měsíční plat. Zvýšený plat dostával alespoň půl roku, tedy nás zajímají dělitelé čísla 1 400 v rozmezí od 6 do 12. Jediní dělitelé v tomto rozmezí jsou 7, 8 a 10:

- Sedm měsíců vyššího příjmu znamená od června, a to o částku $1\,400 : 7 = 200$ eur.
- Osm měsíců vyššího příjmu znamená od května, a to o částku $1\,400 : 8 = 175$ eur.
- Deset měsíců vyššího příjmu znamená od března, a to o částku $1\,400 : 10 = 140$ eur.

Pan Novák si poprvé vydělal více buď za březen o 140 eur, nebo za květen o 175 eur, nebo za červen o 200 eur.

**Z6–I–3**

Vrcholy obdélníku $ABCD$ jsou mřížovými body čtvercové sítě a bod $N$ je mřížovým bodem na straně $AB$:

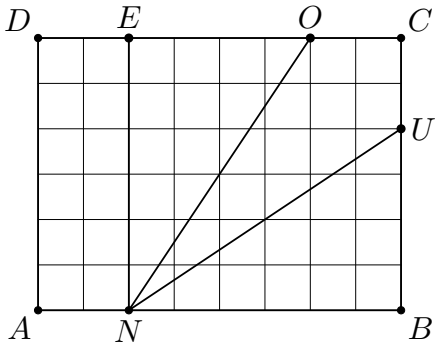



Rozdělte obdélník $ABCD$ třemi úsečkami se společným bodem $N$ na čtyři části se stejnými obsahy. (*D. Kovalčíková*)

**Možné řešení.** Obsahy budeme vyjadřovat pomocí počtů nejmenších čtverečků dané sítě.

Obdélník $ABCD$ sestává z $8 \cdot 6 = 48$ čtverečků. Tedy každá ze čtyř částí bude mít obsah $48 : 4 = 12$ čtverečků. Každá ze tří dělicích úseček má jeden krajní bod $N$, druhý bude na obvodu obdélníku $ABCD$.

Pokud probereme mřížové body na obvodu obdélníku $ABCD$, najdeme vyhovující řešení:



Skutečně:

- obsah obdélníku $NEDA$ je $2 \cdot 6 = 12$ čtverečků,
- obsah každého z pravoúhlých trojúhelníků $NOE$ a $NBU$ je $6 \cdot 4/2 = 12$ čtverečků,
- obsah čtyřúhelníku $NUCO$ nemůže být jiný ($48 - 3 \cdot 12 = 12$).

**Poznámka.** Obsah čtyřúhelníku $NUCO$ lze vyjádřit přímo pomocí trojúhelníků $NUC$ a $NOC$, z nichž každý má obsah $2 \cdot 6/2 = 6$ čtverečků.

### Z6–I–4

Veronika dostala jedno trojmístné a jedno dvojmístné číslo. Trojmístné číslo zaokrouhlila na stovky a dvojmístné zaokrouhlila na desítky. Rozdíl zaokrouhlených čísel byl 500.

Jaký nejmenší a jaký největší mohl být rozdíl nezaokrouhlených čísel? (*M. Macko*)

**Možné řešení.** Dvojmístná čísla zaokrouhlená na desítky jsou násobkem 10 v rozmezí od 10 do 100. Trojmístná čísla zaokrouhlená na stovky jsou násobkem 100 v rozmezí od 100 do 1000.

Rozdíl zaokrouhlených čísel byl 500, tedy nemohl vzniknout jinak než $600 - 100$. Trojmístné číslo bylo zaokrouhleno na 600, tedy to bylo číslo v rozmezí od 550 do 649. Dvojmístné číslo bylo zaokrouhleno na 100, tedy to bylo číslo v rozmezí od 95 do 99.

Nejmenší možný rozdíl nezaokrouhlených čísel je $550 - 99 = 451$, největší možný rozdíl je $649 - 95 = 554$.

### Z6–I–5

Peťa má ke každému dnu v týdnu přiřazenu barvu: pondělí modrou, úterý zelenou, středě bílou, čtvrtku červenou, pátku oranžovou, sobotě šedou a neděli hnědou. V těchto barvách nosí i ponožky, a to tak, že na pravé noze má ponožku barvy dne, avšak na levé noze nemá ponožku barvy tohoto dne, ani dne následujícího. (Např. v sobotu má na pravé noze šedou ponožku a na levé nemá šedou, ani hnědou.)

Určete, který je den, jestliže předevčírem měl Peťa na levé noze modrou ponožku, včera měl červenou a dnes má hnědou. (*M. Dillingerová*)

**Možné řešení.** Hnědou ponožku na levé noze Peťa nenosí v neděli ani v sobotu. Dnes tedy není neděle ani sobota.

Červenou ponožku na levé noze nenosí ve čtvrtek ani ve středu. Tedy včera nebyl čtvrtek ani středa, dnes není pátek ani čtvrtek.

Modrou ponožku na levé noze nenosí v pondělí ani v neděli. Tedy předevčírem nebylo pondělí ani neděle, dnes není středa ani úterý.

Vyloučili jsme všechny dny v týdnu kromě pondělí. Dnes je pondělí.

**Poznámka.** Předchozí úvahy jsou zestručněny v následující tabulce. Na prvních dvou řádcích zkracujeme názvy dnů v týdnu a odpovídajících barev, na zbylých řádcích kontro-

lujeme podmínky kladené na Peťovu levou ponožku (1 – možné, 0 – nemožné):

| den | ... | po | út | st | čt | pá | so | ne | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| barva | ... | mo | ze | bí | če | or | še | hn | ... |
| hn dnes | ... | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | ... |
| če včera | ... | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | ... |
| mo předvč. | ... | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |

**Z6–I–6**

Obdélníkový park má obvod 228 metrů. Ve vrcholech obdélníku a na jeho stranách rostlo 38 okrasných keřů tak, že vzdálenosti mezi každými dvěma sousedními keři byly stejné. Na dvou protilehlých stranách obdélníku zasadil zahradník mezi každé dva keře jeden další. Tím zvýšil počet keřů po obvodu parku na 60.

Určete rozměry parku. (*M. Macko*)

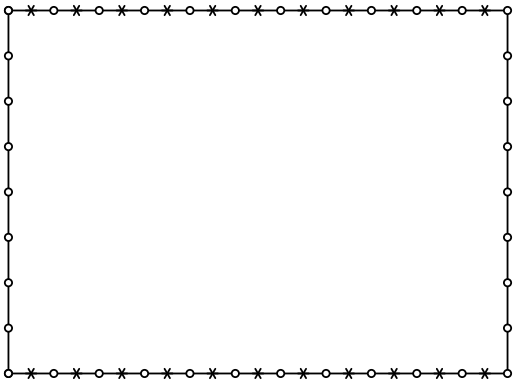
**Možné řešení.** Keře byly ve vrcholech obdélníku a pak rovnoměrně po celém obvodu. Původní vzdálenost mezi sousedními keři byla $228 : 38 = 6$ metrů.

Nově bylo vysazeno $60 - 38 = 22$ keřů, tedy na každou ze dvou protilehlých stran obdélníku 11 keřů. Tyto keře byly zasazeny do mezer mezi keře, které tam už rostly. Tedy tyto strany obdélníku měří $11 \cdot 6 = 66$ metrů, tzn. v součtu 132 metrů.

Do obvodu celého obdélníku chybí $228 - 132 = 96$ metrů, a to odpovídá součtu délek druhé dvojice protilehlých stran. Tedy tyto strany měří $96 : 2 = 48$ metrů.

Rozměry parku jsou 66 a 48 metrů.

**Poznámka.** Na každé ze stran obdélníku, kam zahradník sázel nové keře, jich původně bylo 12 (sázel do 11 mezer). Tedy na těchto dvou stranách jich v součtu bylo 24 a do původního počtu jich chybělo 14. To odpovídá 7 dalším keřům na každé ze dvou zbylých stran (kromě těch ve vrcholech). Těchto 7 keřů spolu s těmi ve vrcholech dělí příslušné strany na 8 stejných dílů. Tedy tyto strany vskutku měří $8 \cdot 6 = 48$ metrů.



# I. kolo kategorie Z7

**Z7–I–1**

Kolik existuje čtyřmístných čísel takových, že jejich třetina, polovina, dvojnásobek a trojnásobek jsou všechno čtyřmístná čísla? (*M. Macko*)

**Možné řešení.** Čtyřmístné číslo musí být v rozmezí

- od 3000 do 9999, aby jeho třetina byla čtyřmístným číslem,
- od 2000 do 9998, aby jeho polovina byla čtyřmístným číslem,
- od 1000 do 4999, aby jeho dvojnásobek byl čtyřmístným číslem,
- od 1000 do 3333, aby jeho trojnásobek byl čtyřmístným číslem.

Z první dvou podmínek plyne, že číslo musí být dělitelné dvěma a třemi, tedy šesti. Společně s ostatními podmínkami dostáváme, že číslo musí být v rozmezí od 3000 do 3333.

Násobky šesti v rozmezí od 3000 do 3333 jsou:

$$3000 = 500 \cdot 6, \quad 3006 = 501 \cdot 6, \quad \ldots, \quad 3330 = 555 \cdot 6.$$

Čísel vyhovujících uvedeným podmínkám je 56.

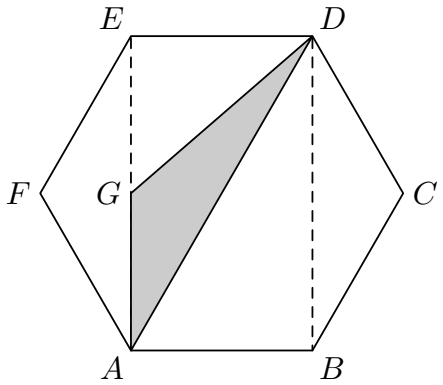
**Z7–I–2**

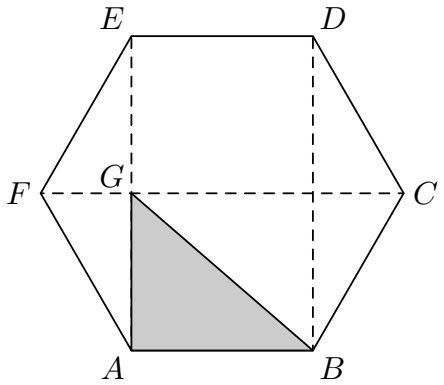
V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je bod $G$ středem úhlopříčky $AE$.

Určete poměr obsahů trojúhelníku $ADG$ a šestiúhelníku $ABCDEF$.

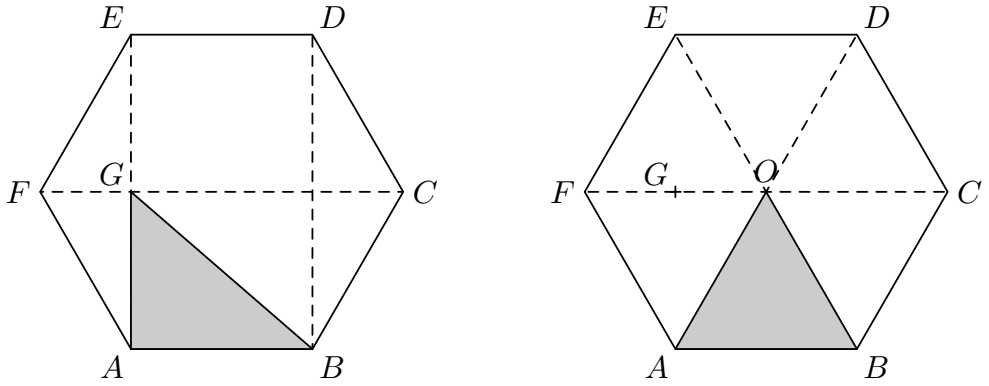
(*E. Semerádová*)

**Možné řešení.** V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je úhlopříčka $AE$ rovnoběžná s úhlopříčkou $BD$. Tedy trojúhelník $ADG$ má stejný obsah jako kterýkoli trojúhelník $AD'G$, jehož vrchol $D'$ leží na přímce $BD$. Speciálně trojúhelník $ADG$ má stejný obsah jako trojúhelník $ABG$:



Bod $G$ je středem úhlopříčky $AE$, tedy leží také na úhlopříčce $CF$. Úhlopříčka $CF$ je rovnoběžná se stranou $AB$. Tedy trojúhelník $ABG$ má stejný obsah jako kterýkoli trojúhelník $ABG'$, jehož vrchol $G'$ leží na přímce $CF$. Na této přímce leží střed $O$ pravidelného šestiúhelníku, tedy trojúhelník $ABG$ má stejný obsah jako trojúhelník $ABO$:




Dohromady platí, že trojúhelník $ADG$ má stejný obsah jako trojúhelník $ABO$, a pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ sestává ze šesti trojúhelníků shodných s trojúhelníkem $ABO$.

Poměr obsahů trojúhelníku $ADG$ a šestiúhelníku $ABCDEF$ je $1 : 6$.

**Z7–I–3**

Pan Komický, Elegantní a Vážný se znají z golfu. Jeden se jmenuje Karel, jeden Erik a jeden Viktor. Jeden nosí kravatu barvy krémové, jeden barvy ebenové a jeden barvy vínové.

- Výherce posledního utkání nosí ebenovou kravatu.
- Pan Elegantní nebyl nikdy na návštěvě u pana Komického.
- Viktor nosí krémovou kravatu.
- Panu Komickému připadá vtipné, že nikdy nevyhrál.
- Karel byl po posledním utkání u pana Komického.
- Pan Vážný nosí vínovou kravatu.

Zjistěte, jaké je vlastní jméno každého z pánů a jakou kdo nosí kravatu.

(*E. Novotná*)

**Možné řešení.** Rozlišujeme tři znaky, u každého máme tři možnosti. Vztahy ze zadání budeme postupně doplňovat do tabulky. Z poslední informace víme následující:

| příjmení | Komický | Elegantní | Vážný |
|---|---|---|---|
| jméno | | | |
| kravata | | | vínová |

Z první a čtvrté informace plyne, že pan Komický nenosí ebenovou kravatu. Z předchozího víme, že vínovou kravatu nosí pan Vážný, tedy kravata pana Komického je krémová.

Ebenová kravata zbývá na pana Elegantního:

| příjmení | Komický | Elegantní | Vážný |
|---|---|---|---|
| jméno | | | |
| kravata | krémová | ebenová | vínová |

Ze třetí informace a předchozího doplnění plyne, že pan Komický je Viktor. Ze druhé a páté informace plyne, že pan Elegantní není Karel. Tedy pan Elegantní je Erik a pan Vážný je Karel.

Výsledné přiřazení vypadá takto:

| příjmení | Komický | Elegantní | Vážný |
|---|---|---|---|
| jméno | Viktor | Erik | Karel |
| kravata | krémová | ebenová | vínová |

**Z7–I–4**

Adéla, Beáta, Šárka a Jitka si natrhaly třešně. Beáta jich měla pětkrát víc než Adéla, Šárka měla o 15 třešní víc než Beáta, Jitka měla o 200 víc než Adéla.

O kolik nejméně se mohly lišit počty třešní Šárky a Jitky? A kolik třešní by v takovém případě měla každá z dívek? (*K. Pazourek*)

**Možné řešení.** Počty třešní dívek označíme počátečními písmeny jejich jmen. Podle zadání platí

$$B = 5A, \quad \check{S} = B + 15, \quad J = A + 200.$$

Počty třešní Šárky a Jitky se lišily o

$$|J - \check{S}| = |185 + A - B| = |185 - 4A|.$$

Tento rozdíl je jistě nenulový, neboť 185 není násobkem čtyř. Nejbližší násobek čtyř k číslu 185 je $184 = 4 \cdot 46$. Tato možnost odpovídá hodnotám $A = 46$, $B = 230$, $\check{S} = 245$, $J = 246$.

Počty třešní Šárky a Jitky se lišily nejméně o jednu třešni. V takovém případě měla Adéla 46, Beáta 230, Šárka 245 a Jitka 246 třešní.

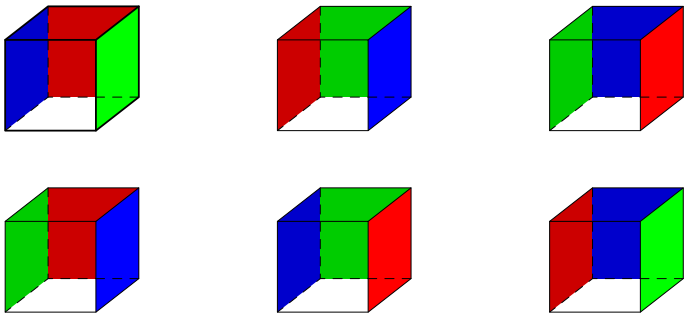
**Z7–I–5**

Václav měl několik bílých kostek. Na každé kostce nabarvil tři různé stěny třemi různými barvami, a to červenou, zelenou a modrou. Poté roztřídil kostky do skupin podle typu obarvení tak, že všechny kostky v jedné skupině vypadaly po vhodném otočení stejně.

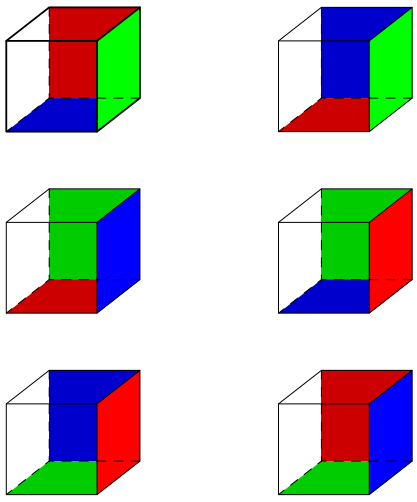
Kolik nejvýše skupin mohl Václav vytvořit? (*I. Jančigová*)

**Možné řešení.** Tři vybrané stěny lze třemi barvami obarvit celkem šesti způsoby. Podle vzájemné polohy obarvených stěn na kostce rozlišujeme dva případy:

- Obarvené stěny nemají společný vrchol, tzn. po rozvinutí tvoří pás. V tomto případě jsou Václavovy skupiny tři a jsou určeny barvou prostřední stěny. V následujícím přehledu jsou skupiny rozděleny po sloupcích (osa otočení prochází středem prostřední z obarvených stěn a je k ní kolmá):



- Obarvené stěny mají společný vrchol, tzn. každá sousedí s každou. V tomto případě jsou Václavovy skupiny dvě a opět jsou rozděleny po sloupcích (osa otočení je tělesová úhlopříčka procházející společným vrcholem obarvených stěn):



Václav mohl vytvořit pět skupin.

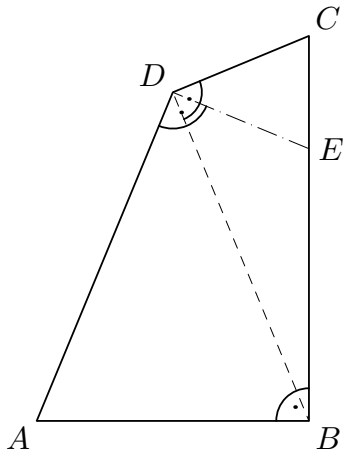
**Z7–I–6**

Pro čtyřúhelník $ABCD$ platí:

- strana $AD$ a úhlopříčka $BD$ jsou shodné,
- úhlopříčka $BD$ a strana $DC$ jsou kolmé,
- strany $AB$ a $BC$ jsou kolmé,
- osa úhlu $BDC$ a strana $AD$ jsou kolmé.

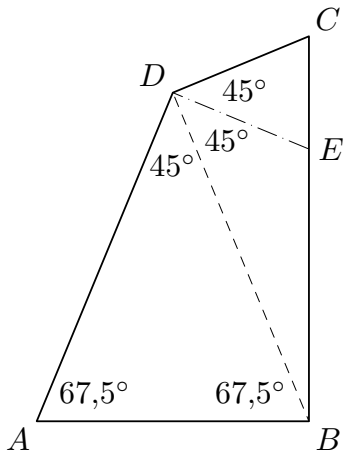
Určete velikost úhlu $BCD$. (*M. Macko*)

**Možné řešení.** Průsečík osy úhlu $BDC$ se stranou $BC$ označíme $E$:

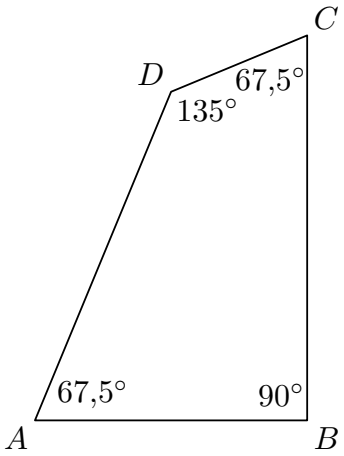



Přímka $DE$ je osou pravého úhlu $BDC$, tedy úhly $BDE$ a $EDC$ jsou shodné s velikostí 45°. Úhel $ADC$ je součtem úhlů $ADE$ a $EDC$ a úhel $ADE$ je pravý. Tedy velikost úhlu $ADC$ je 135° $(90 + 45 = 135)$.

Úhel $ADE$ je součtem úhlů $ADB$ a $BDE$. Úhel $ADE$ je pravý a úhel $BDE$ má velikost 45°, tedy úhel $ADB$ má také velikost 45°. Trojúhelník $ABD$ je rovnoramenný, tedy úhly $BAD$ a $ABD$ u základny jsou shodné. Součet vnitřních úhlů trojúhelníku $ABD$ je 180°, tedy velikost úhlu $BAD$ je 67,5° $(2 \cdot 67{,}5 + 45 = 180)$.



Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$ je 360°, tedy velikost úhlu $BCD$ je 67,5° (67,5 + 90 + 67,5 + 135 = 360).




**Poznámka.** Velikost úhlu $BCD$ lze dopočítat v rámci trojúhelníku $BCD$: úhel $BDC$ je pravý a úhel $DBC$ je rozdílem pravého úhlu $ABC$ a úhlu $ABD$, jehož velikost známe z předchozího.

# I. kolo kategorie Z8

**Z8–I–1**

Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel $p_1$, $p_2$, $p_3$, pro která platí

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_3 - p_1) = 195.$$

(*E. Novotná*)

**Možné řešení.** Součinem čísel $p_2 - p_1$ a $p_3 - p_1$ má být liché číslo 195. Tedy každé z čísel $p_2 - p_1$ a $p_3 - p_1$ musí být liché. Rozdíl dvou čísel je lichý, právě když jedno z čísel je liché a druhé sudé. Čísla $p_1$, $p_2$, $p_3$ mají být navzájem různá prvočísla a jediné sudé prvočíslo je 2. Tedy $p_1 = 2$ a zajímají nás všechny dvojice navzájem různých prvočísel $p_2$ a $p_3$, pro která platí

$$(p_2 - 2) \cdot (p_3 - 2) = 195. \qquad (*)$$

Možné rozklady čísla 195 na dva součinitele jsou

$$1 \cdot 195 = 3 \cdot 65 = 5 \cdot 39 = 13 \cdot 15.$$

Tomu odpovídají následující dvojice čísel $p_2$, $p_3$, která jsou možným řešením $(*)$ (až na pořadí):

$$3, 197, \quad 5, 67, \quad 7, 41, \quad 15, 17.$$

První tři dvojice tvoří prvočísla, čtvrtou nikoli.

Všechny vyhovující trojice prvočísel $p_1$, $p_2$, $p_3$ (až na pořadí $p_2$ a $p_3$), pro která platí podmínka ze zadání, jsou:

$$2, 3, 197, \quad 2, 5, 67, \quad 2, 7, 41.$$

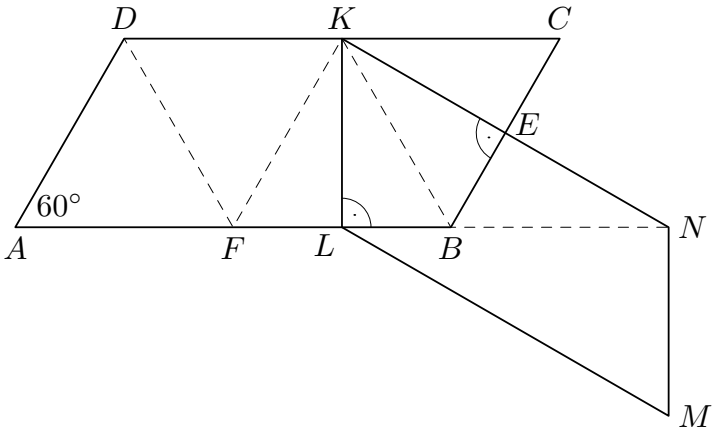
**Z8–I–2**

Pro rovnoběžníky $ABCD$ a $KLMN$ platí:

- bod $K$ je středem úsečky $CD$,
- bod $K$ je průsečíkem přímky $CD$ s osou úsečky $BC$,
- bod $L$ je průsečíkem přímky $AB$ s osou úsečky $CD$,
- bod $N$ je průsečíkem přímky $AB$ s osou úsečky $BC$,
- úhel $BAD$ má velikost $60°$.

Určete poměr obsahů rovnoběžníků $ABCD$ a $KLMN$. (*M. Macko*)

**Možné řešení.** Situaci si znázorníme spolu s dodatečným dělením, které dále okomentujeme. Bod $E$ značí střed úsečky $BC$, bod $F$ značí střed úsečky $AB$:

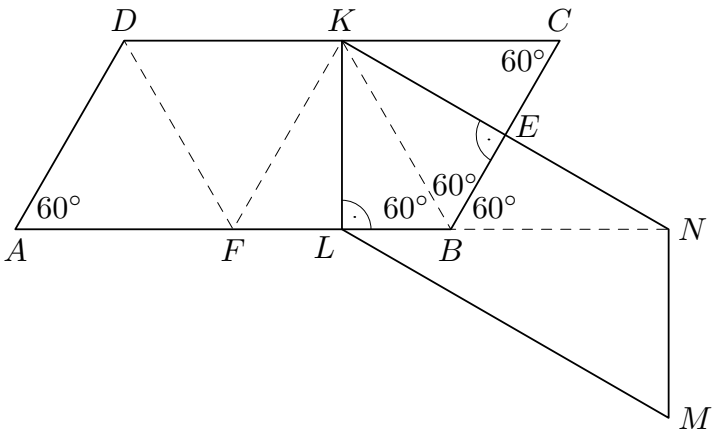



Protější strany rovnoběžníku jsou shodné a body $F$ a $K$ jsou středy protějších stran rovnoběžníku $ABCD$. Tedy rovnoběžník $ABCD$ se skládá ze dvou shodných rovnoběžníků $AFKD$ a $FBCK$.

Úhlopříčka rovnoběžníku jej dělí na dva shodné trojúhelníky a úsečky $FD$ a $BK$ jsou úhlopříčkami rovnoběžníků $AFKD$ a $FBCK$. Tedy rovnoběžník $ABCD$ se skládá ze čtyř navzájem shodných trojúhelníků $AFD$, $KDF$, $FBK$ a $CKB$.

Bod $K$ leží na ose úsečky $BC$, tedy úsečky $BK$ a $CK$ jsou shodné a trojúhelník $BCK$ je rovnoramenný. Protější vnitřní úhly v rovnoběžníku jsou shodné, tedy úhly $BAD$ a $BCD$ jsou shodné a mají velikost 60°. Odtud vyplývá, že trojúhelník $BCK$ je rovnostranný. Tedy rovnoběžník $ABCD$ se skládá ze čtyř rovnostranných trojúhelníků shodných s trojúhelníkem $BCK$.

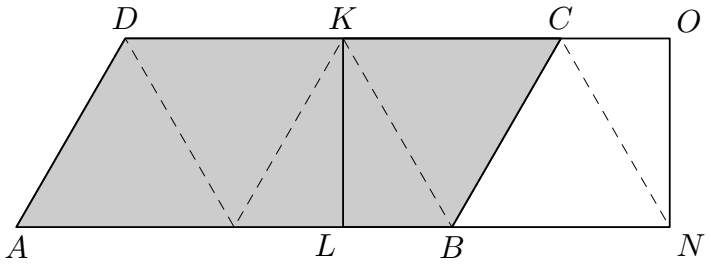
Přímý úhel $FBN$ je součtem úhlů $FBK$, $KBC$ a $CBN$, z nichž první dva mají velikost 60°. Tedy úhel $CBN$ má velikost 60°. Trojúhelníky $BEK$, $BLK$, $BEN$ jsou všechny pravoúhlé a mají shodné úhly u vrcholu $B$. Navíc první s druhým má společnou stranu $BK$ a první se třetím má společnou stranu $BE$. Tedy tyto tři trojúhelníky jsou navzájem shodné (podle věty *usu*).



Celkem rovnoběžník $ABCD$ se skládá z osmi trojúhelníků shodných s trojúhelníkem $BEK$. Trojúhelník $KLN$ se skládá ze tří trojúhelníků shodných s týmž trojúhelníkem, tedy rovnoběžník $KLMN$ se skládá ze šesti trojúhelníků shodných s trojúhelníkem $BEK$.

Poměr obsahů rovnoběžníků $ABCD$ a $KLMN$ je $8 : 6 = 4 : 3$.

**Poznámka.** Rovnoběžník $KLMN$ má stejný obsah jako obdélník $KLNO$, kde bod $O$ je průsečíkem přímek $MN$ a $CD$. Rovnoběžníky $ABCD$ a $KLNO$ mají společnou výšku $KL$ a poměr odpovídajících stran je $|AB| : |LN| = 2 : 1{,}5 = 4 : 3$. Poměr jejich obsahů je stejný.




**Z8–I–3**

Tomáš sbírá pohlednice z Islandu, Anglie a Norska. Z každé země má alespoň jednu pohlednici, celkem jich má 40. Pohlednic z Anglie má více než pohlednic z Norska. Pohlednic z Islandu má více než pětinásobek a méně než šestinásobek počtu pohlednic z Anglie.

Ze kterých zemí jsou pohlednice, jejichž počet v Tomášově sbírce lze určit jednoznačně?

(*E. Novotná*)

**Možné řešení.** Počty pohlednic z jednotlivých zemí označíme jejich počátečními písmeny. Postupně vzhledem k $A$ odvodíme rozmezí pro $N$ $(0 < N < A)$ a $I$ $(5A < I < 6A)$ a ověříme, zda pro nějaké $A$, $N$, $I$ platí zbylá podmínka $(A + N + I = 40)$:

- Pro $A < 6$ je $N < 5$ a $I < 30$. Součet $A + N + I$ je nanejvýš $5 + 4 + 29 = 38 < 40$.
- Pro $A = 6$ je $N = 1, \ldots, 5$ a $I = 31, \ldots, 35$. Součet $A+N+I$ je 40 ve třech případech:

$$N = 1,\ I = 33, \quad N = 2,\ I = 32, \quad N = 3,\ I = 31. \qquad (*)$$

- Pro $A > 6$ je $I > 35$ a součet $A + N + I$ je alespoň $7 + 1 + 36 = 45 > 40$.

Tedy pohlednic z Anglie bylo 6, počty ostatních jsou vyčísleny v $(*)$.

Počet pohlednic lze jednoznačně určit pouze pro Anglii.

**Jiné řešení.** Při stejném značení jako výše vyjádříme podmínky ze zadání:

$$A + N + I = 40, \quad 0 < N < A, \quad 5A < I < 6A.$$

Z poslední podmínky plyne, že $I$ je v rozmezí

$$I = 5A + 1,\ \ldots,\ 6A - 1.$$

Odtud a z první podmínky plyne, že $N = 40 - A - I$ je v rozmezí

$$N = 39 - 6A,\ \ldots,\ 41 - 7A.$$

Z podmínky $0 < N$ plyne, že $A < 7$. Z podmínky $N < A$ plyne, že $A > 5$. Celkem tedy $A = 6$ a možné dvojice $N$ a $I$ jsou jako v $(*)$.

Počet pohlednic lze jednoznačně určit pouze pro Anglii.

**Z8–I–4**

Žáci napsali první písemku s průměrným hodnocením 84 bodů. Stejní žáci napsali druhou písemku s průměrným hodnocením 70 bodů. Čtyři z těchto žáků měli v obou písemkách po 63 bodech. Průměrné hodnocení ostatních žáků ve druhé písemce bylo 72 bodů.

Určete průměrné hodnocení ostatních žáků v první písemce. (*I. Jančigová*)

**Možné řešení.** Součet bodů, které podprůměrným žákům chyběly do celkového průměru, odpovídá součtu bodů, o které nadprůměrní žáci tento průměr převyšovali.

Ve druhé písemce měli čtyři žáci každý o 7 bodů méně než byl průměr, což je v součtu 28 bodů. Ve stejné písemce měli ostatní žáci průměrně o 2 body více než byl průměr. Tedy ostatních žáků bylo 14 ($4 \cdot 7 = 14 \cdot 2$) a všech žáků bylo 18 ($14 + 4 = 18$).

V první písemce byl celkový průměr všech žáků 84 bodů, což je v součtu $18 \cdot 84 = 1512$ bodů. Čtyři podprůměrní žáci měli v součtu $4 \cdot 63 = 252$ bodů. Ostatních 14 žáků mělo v součtu $1512 - 252 = 1260$ bodů, tedy průměrně $1260/14 = 90$ bodů.

Průměrné hodnocení ostatních žáků v první písemce bylo 90 bodů.

**Poznámka.** Pokud označíme počet všech žáků $n$, pak součet bodů v první písemce byl $84n$ a ve druhé $70n$ bodů. Průměrné hodnocení ostatních žáků ve druhé písemce bylo $(70n - 252)/(n - 4) = 72$ bodů, což po úpravách dává $n = 18$. Tedy průměrné hodnocení ostatních žáků v první písemce bylo $(84n - 252)/(n - 4) = 1260/14 = 90$ bodů.

**Z8–I–5**

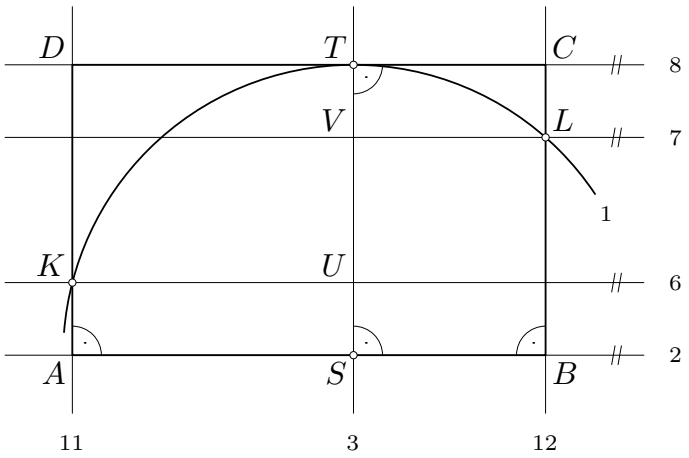
Je dána kružnice $k$ se středem $S$ a poloměrem 6 cm a přímka $p$ procházející bodem $S$. Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby platilo:

- vrcholy $A$ a $B$ leží na přímce $p$,
- kružnice $k$ se dotýká strany $CD$,
- kružnice $k$ protíná stranu $AD$ v bodě $K$ a stranu $BC$ v bodě $L$,
- $|AK| = |CL| = 1{,}5$ cm.

(*M. Petrová*)

**Možné řešení.** Bod dotyku kružnice $k$ a strany $CD$ označíme $T$. Úsečka $ST$ je poloměrem kružnice, tedy $|ST| = 6$ cm, a $T$ je bodem dotyku, tedy $ST \perp CD$. Tím je zcela určena přímka $CD$, tzn. jeden rozměr obdélníku — jedná se o přímku rovnoběžnou s přímkou $p$ ve vzdálenosti 6 cm.

Druhý rozměr obdélníku je vymezen ostatními podmínkami ze zadání — body $K$ a $L$ leží na rovnoběžkách s přímkami $p$ a $CD$, které jsou od nich vzdáleny 1,5 cm (směrem dovnitř obdélníku), strany $AD$ a $BC$ prochází těmito body a jsou kolmé k přímce $p$.




Konstrukce (body 1 a 2 představují zadání, body 3 až 15 řešení úlohy):

1) kružnice se středem $S$ a poloměrem 6 cm (stačí část),
2) přímka procházející bodem $S$,
3) kolmice k přímce 2) procházející bodem $S$,
4) bod $T$ je průsečíkem kružnice 1) a přímky 3),
5) body $U$ a $V$ na úsečce $ST$ se vzdálenostmi $|SU| = |TV| = 1{,}5$ cm,
6) rovnoběžka s přímkou 2) procházející bodem $U$,
7) rovnoběžka s přímkou 2) procházející bodem $V$,
8) rovnoběžka s přímkou 2) procházející bodem $T$,
9) bod $K$ je průsečíkem kružnice 1) a přímky 6),
10) bod $L$ je průsečíkem kružnice 1) a přímky 7) v opačné polorovině než $K$ vzhledem k přímce 3),
11) kolmice k přímce 2) procházející bodem $K$,
12) kolmice k přímce 2) procházející bodem $L$,
13) body $A$ a $D$ jsou průsečíky přímky 11) s přímkami 2) a 8),
14) body $B$ a $C$ jsou průsečíky přímky 12) s přímkami 2) a 8),
15) obdélník $ABCD$.

**Z8–I–6**

Jonáš a Michal sestavili každý svůj osmiboký jehlan s devíti různými čísly na jeho různých stěnách. Všechna čísla byla větší než 10, menší než 30 a žádné nebylo dělitelné čtyřmi. Pro každý vrchol však součet čísel na všech stěnách, které ho obsahovaly, byl dělitelný čtyřmi. Jonáš tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 15. Michal tvrdil, že na dvou bočních stěnách má čísla 14 a 17.

Kdo z chlapců měl pravdu? (*K. Pazourek*)

**Možné řešení.** Hlavní vrchol jehlanu náleží všem osmi bočním stěnám, ostatních osm vrcholů náleží podstavě a dvěma dalším stěnám. Zkusíme najít možná očíslování stěn Jonášova jehlanu:

- Uvažme čísla 14 a 15 na dvou sousedních bočních stěnách jehlanu. Aby součet těchto čísel s číslem na podstavě byl dělitelný čtyřmi, musí číslo na podstavě dávat po dělení čtyřmi zbytek 3. Nejmenší nepoužité číslo s touto vlastností v daném rozmezí je 11.

- Uvažme číslo 11 na podstavě a hledejme číslo na boční stěně sousedící se stěnou s číslem 15. Aby součet těchto tří čísel byl dělitelný čtyřmi, musí hledané číslo dávat po dělení čtyřmi zbytek 2. Nejmenší nepoužité číslo s touto vlastností v daném rozmezí je 18.
- Tímto způsobem postupně najdeme možná čísla na osmi bočních stěnách:

$$14,\ 15,\ 18,\ 19,\ 22,\ 23,\ 26,\ 27.$$

- Součet těchto osmi čísel je 164, což je číslo dělitelné čtyřmi. Tedy Jonáš mohl mít jehlan se všemi vlastnostmi ze zadání.

Obdobně lze najít možná očíslování stěn Michalova jehlanu: na podstavě může být číslo 13 a na osmi bočních stěnách čísla

$$14,\ 17,\ 18,\ 21,\ 22,\ 25,\ 26,\ 29.$$

Tedy také Michal mohl mít jehlan se všemi vlastnostmi ze zadání.

Pravdu měli oba chlapci.

**Poznámka.** Uvedená očíslování stěn nejsou jediná možná, ale v daných mezích jich není mnoho. Obecně lze z podmínky o součtech trojic čísel na stěnách se společným vrcholem na podstavě odvodit, že rozdíly čísel ob jednu boční stěnu musí být dělitelné čtyřmi. Podmínka o součtu osmi stěn se společným hlavním vrcholem je pak splněna automaticky. Při hledání možných očíslování stěn stačí zvolit čísla na dvou sousedních bočních stěnách, čísla ob stěnu vybírat tak, aby se lišila o násobek čtyř, doplnit číslo na podstavě a neustále hlídat dané meze.

# I. kolo kategorie Z9

**Z9–I–1**

Do rohových políček tabulky $3 \times 3$ jsou vepsána čísla jako na obrázku:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | | 6 |
| | | |
| 12 | | 15 |

Do prázdných políček doplňte kladná celá čísla tak, aby součin čísel ve všech řádcích a sloupcích byl stejný. Najděte všechny možnosti. (*J. Zhouf*)

**Možné řešení.** Součin daných čísel v prvním řádku je 18, ve třetím řádku 180, v prvním sloupci 36 a ve třetím sloupci 90. Čísla 18, 36 a 90 jsou děliteli čísla 180:

$$180 = 18 \cdot 10 = 36 \cdot 5 = 90 \cdot 2.$$

Aby součiny všech čísel v těchto čtyřech řádcích/sloupcích byly stejné, musí být neznámá čísla v prvním řádku, v prvním sloupci a ve třetím sloupci násobky neznámého čísla ve třetím řádku. Toto číslo označíme $x$, neznámé číslo v prostředním políčku označíme $y$:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $10x$ | 6 |
| $5x$ | $y$ | $2x$ |
| 12 | $x$ | 15 |

Aby součin všech čísel ve druhém řádku či sloupci byl stejný jako všechny ostatní, musí platit $10x^2y = 180x$, a tedy $xy = 18$. Číslo 18 má šest (kladných) dělitelů:

$$18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6,$$

a to jsou jediné možnosti k doplnění neznámých $x$ a $y$.

Tabulku lze doplnit šesti způsoby:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 10 | 6 |
| 5 | 18 | 2 |
| 12 | 1 | 15 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 20 | 6 |
| 10 | 9 | 4 |
| 12 | 2 | 15 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 30 | 6 |
| 15 | 6 | 6 |
| 12 | 3 | 15 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 180 | 6 |
| 90 | 1 | 36 |
| 12 | 18 | 15 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 90 | 6 |
| 45 | 2 | 18 |
| 12 | 9 | 15 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 60 | 6 |
| 30 | 3 | 12 |
| 12 | 6 | 15 |

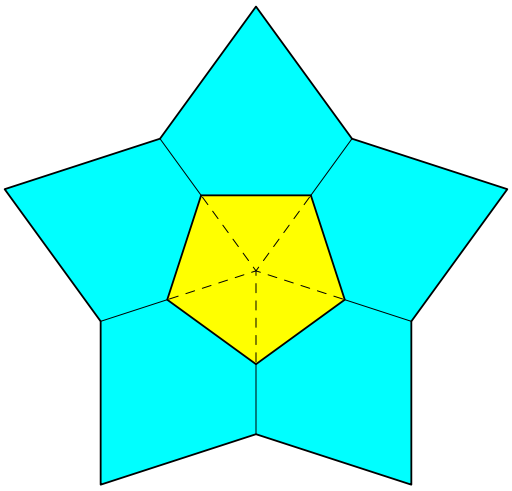
**Poznámka.** Bez úvodního pozorování je v tabulce pět neznámých, jejichž závislosti lze postupně odvodit porovnáváním součinů. Tytéž závislosti lze odhalit také pomocí prvočíselných rozkladů daných čísel:

| | | |
|---|---|---|
| $3$ | $2 \cdot 5 \cdot x$ | $2 \cdot 3$ |
| $5 \cdot x$ | $y$ | $2 \cdot x$ |
| $2 \cdot 2 \cdot 3$ | $x$ | $3 \cdot 5$ |

**Z9–I–2**

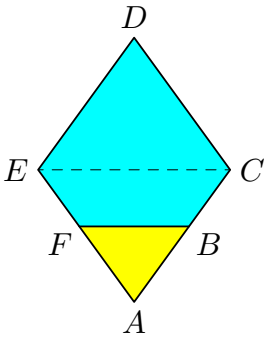
Útvar na obrázku je vytvořen z pěti shodných azurových kosočtverců a jednoho žlutého pravidelného pětiúhelníku, který kosočtverce částečně překrývá. Kosočtverce sousedí celými stranami a na nich leží vrcholy pětiúhelníku. Poměr velikostí poloměru kružnice opsané pětiúhelníku a strany kosočtverce je $4 : 7$.

Rozhodněte, zda nepřekrytá část každého kosočtverce má větší, stejný, nebo menší obsah než pětiúhelník. (*M. Dományová*)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

**Možné řešení.** Vybíráme jeden částečně překrytý kosočtverec, příslušné body označíme jako na obrázku:




Úsečky $BF$ a $CE$ jsou rovnoběžné, tedy trojúhelníky $ABF$ a $ACE$ jsou podobné. Úsečka $AB$ představuje poloměr kružnice opsané pětiúhelníku, úsečka $AC$ je stranou kosočtverce. Jejich velikosti jsou v poměru $4 : 7$, a to je také koeficient podobnosti trojúhelníků $ABF$ a $ACE$. Pro jejich obsahy tedy platí

$$S_{ABF} : S_{ACE} = 16 : 49. \qquad (*)$$

Pětiúhelník má obsah $5S_{ABF}$, nepřekrytá část kosočtverce má obsah $2S_{ACE} - S_{ABF}$. Oba obsahy vyjádříme pomocí $(*)$ a porovnáváme:

$$5S_{ABF} = 5 \cdot \frac{16}{49}\, S_{ACE} = \frac{80}{49}\, S_{ACE},$$
$$2S_{ACE} - S_{ABF} = \left(2 - \frac{16}{49}\right) S_{ACE} = \frac{82}{49}\, S_{ACE}.$$

Nepřekrytá část kosočtverce má větší obsah než pětiúhelník.

**Poznámka.** Pro obecný koeficient $k$ podobnosti trojúhelníků $ABF$ a $ACE$ vychází $5S_{ABF} = 2S_{ACE} - S_{ABF}$, právě když $5k^2 = 2 - k^2$ neboli $k^2 = 1/3$. Pro $k = 4/7$ dostáváme $k^2 = 16/49 < 1/3$, a tedy $5S_{ABF} < 2S_{ACE} - S_{ABF}$.

### Z9–I–3

Na tabuli je napsáno několik po sobě jdoucích přirozených čísel počínaje jedničkou. Každé z těchto čísel má buď azurovou, nebo žlutou barvou. Součet každých dvou různobarevných čísel je prvočíslem, součet každých dvou stejnobarevných čísel je složeným číslem.

Kolik nejvíce čísel může být napsáno na tabuli? *(P. Bak)*

**Možné řešení.** Postupně probereme možnosti podle počtu čísel na tabuli, kde v každém kroku rozšíříme závěry kroku předchozího. V případech s více možnými součty vypisujeme prvočíselné výsledky na prvním řádku, složené výsledky na druhém.

- Případ s jedním číslem vyhovuje triviálně, neboť není co sčítat.
- Pro dvě čísla je jediný možný součet

$$1 + 2 = 3,$$

a to je prvočíslo. Tento případ je vyhovující, právě když jsou čísla 1 a 2 různobarevná.

- Pro tři čísla jsou tři možné součty; navíc k předchozímu to jsou

$$2+3=5,$$
$$1+3=4.$$

Tento případ je vyhovující, právě když čísla 1 a 3 mají jednu barvu a číslo 2 druhou.

- Pro čtyři čísla je šest možných součtů; navíc k předchozím to jsou

$$1+4=5, \quad 3+4=7,$$
$$2+4=6.$$

Tento případ je vyhovující, právě když čísla 1 a 3 mají jednu barvu a čísla 2 a 4 druhou.

- Pro pět čísel je deset možných součtů; navíc k předchozím to jsou

$$2+5=7,$$
$$1+5=6, \quad 3+5=8, \quad 4+5=9.$$

Tento případ je nevyhovující: nové číslo 5 má mít jinou barvu než 2 ($2+5=7$) a stejnou barvu jako 4 ($4+5=9$), přitom čísla 2 a 4 mají barvu stejnou ($2+4=6$).

Případy s více než pěti čísly zahrnují všechny předchozí součty, tedy jsou všechny nevyhovující (problém s barvou čísla 5).

Na tabuli mohou být napsána nanejvýš čtyři čísla.

**Z9–I–4**

Přirozené číslo se nazývá *čtverečkové*, pokud jeho zápis obsahuje číslici nebo skupinu po sobě jdoucích číslic, jež jsou zápisem druhé mocniny kladného celého čísla. (Např. čísla 257 a 725 jsou čtverečková, čísla 275 a 572 nikoli.)

Určete počet všech dvojmístných čtverečkových čísel. (*M. Dillingerová*)

**Možné řešení.** Druhé mocniny jednomístných čísel jsou

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81.$$

Druhé mocniny dvojmístných čísel jsou alespoň trojmístná čísla a není třeba uvažovat. Tedy dvojmístná čtverečková čísla jsou dvojmístná čísla z předchozího výčtu nebo čísla obsahující číslice 1, 4 či 9 (tyto možnosti se nevylučují).

Dvojmístných čísel obsahujících danou nenulovou číslici je 18: pro číslici na místě jednotek to je 9 možností ($1*, \ldots, 9*$), pro číslici na místě desítek to je 10 možností ($*0, \ldots, *9$) a číslo s toutéž číslicí na místě jednotek i desítek je zahrnuto v obou případech.

Abychom nic neopomněli a něco nezahrnuli dvakrát, budeme čtverečková čísla počítat postupně:

- dvojmístných čísel v úvodním výčtu je 6 (jmenovitě 16, 25, 36, 49, 64, 81),

- dalších čísel obsahujících číslici 1 je 16 (čísla 16 a 81 jsou již započtena),
- dalších čísel obsahujících číslici 4 je 14 (čísla 14, 41, 49 a 64 jsou již započtena),
- dalších čísel obsahujících číslici 9 je 14 (čísla 19, 91, 49 a 94 jsou již započtena).

Dvojmístných čtverečkových čísel je $6 + 16 + 14 + 14 = 50$.

**Poznámka.** Dvojmístná čísla začínající číslicí 1, 4 či 9 (s libovolnou druhou číslicí) jsou čtverečková — takových čísel je $3 \cdot 10 = 30$. Dvojmístná čísla začínající číslicí 2, 3, 5, 6, 7 či 8 jsou čtverečková, pokud druhá číslice je 1, 4 či 9 — takových čísel je $6 \cdot 3 = 18$. Dvojmístná čísla, která jsou druhými mocninami přirozených čísel a která nejsou zahrnuta mezi předchozími případy, jsou dvě — 25 a 36. Dvojmístných čtverečkových čísel je $30 + 18 + 2 = 50$.

### Z9–I–5

V lyžařském oddíle se počet všech dětí snížil o 10 %, přitom poměr děvčat vůči všem dětem vzrostl z 50 % na 55 %.

O kolik procent se změnil počet děvčat? (*I. Jančigová*)

**Možné řešení.** Označme $d$ původní počet děvčat v oddíle. Původní poměr děvčat vůči všem dětem byl 50 %, tedy původní počet všech dětí byl $2d$. Počet všech dětí se snížil o 10 %, tedy nový počet všech dětí byl

$$\frac{9}{10} \cdot 2d = \frac{9}{5}\, d.$$

Nový poměr děvčat vůči všem dětem byl 55 %, tedy nový počet děvčat byl

$$\frac{55}{100} \cdot \frac{9}{5}\, d = \frac{99}{100}\, d.$$

Počet děvčat se snížil o 1 %.

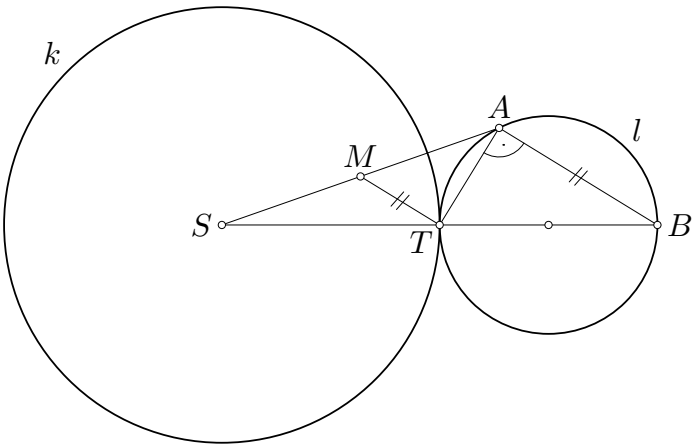
### Z9–I–6

Kružnice $k$ a $l$ se zvnějšku dotýkají a poloměr kružnice $k$ je stejný jako průměr kružnice $l$. Bod $S$ je středem kružnice $k$, bod $T$ je bodem dotyku kružnic, bod $A$ leží na kružnici $l$ mimo spojnici středů kružnic a bod $M$ je středem úsečky $AS$.

Dokažte, že úhel $ATM$ je pravý. (*L. Komín*)

**Možné řešení.** Dotyk kružnic $k$ a $l$ znamená, že spojnice jejich středů prochází bodem dotyku $T$. Druhý průsečík této spojnice s kružnicí $l$ označíme $B$.

Kružnice $k$ je dvakrát větší než kružnice $l$, tedy bod $T$ je středem úsečky $SB$. Bod $M$ je středem úsečky $AS$, tedy $MT$ je střední příčkou trojúhelníku $SBA$. Odtud plyne, že úsečky $AB$ a $MT$ jsou rovnoběžné, a proto jsou (střídavé) úhly $ATM$ a $BAT$ shodné. Podle Thaletovy věty je úhel $BAT$ pravý, tedy také úhel $ATM$ je pravý.


k
A
l
M
S
T
B